

PEM5116 — Mecânica Quântica

Lista de Exercícios n.º 3

5 de junho de 2019

1. Monte a autofunção normalizada ψ_{300} . Quantos e quais autoestados têm a mesma energia E_3 ?
2. Calcule $\langle r \rangle$ e $\langle r^2 \rangle$ para um elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio. Expresse a resposta em termos do raio de Bohr.
3. Calcule $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ para um elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio. *Dica:* não precisa integrar de novo: use a simetria, sabendo que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
4. Qual é o valor mais provável de r no estado fundamental do hidrogênio? A resposta não é zero! *Dica:* escreva primeiramente a probabilidade de encontrar o elétron entre r e $r + dr$.
5. Calcule $\langle x^2 \rangle$ para o estado ψ_{211} . *Atenção:* esse estado não é simétrico em x, y, z . Use $x = r \sin \theta \cos \phi$.
6. Um átomo de hidrogênio é preparado na seguinte combinação linear inicial de estados estacionários:

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{211}(r) + \psi_{21-1}(r)] .$$

- (a) Monte $\Psi(\vec{r}, t)$. Simplifique o máximo que puder.
 - (b) Calcule o valor esperado da energia potencial, $\langle V \rangle$. (Ela depende de t ?) Obtenha tanto a fórmula quanto o valor em eV.
7. Considere o estado ψ_{433} .
 - (a) Construa a função de onda.
 - (b) Calcule o valor esperado de r nesse estado.
 8. (a) Mostre que, quando $l = n - 1$, a parte radial da função de onda toma a forma

$$R_n^{n-1}(r) = N_n r^{n-1} e^{-r/na}$$

e determine a constante N_n .

- (b) Calcule $\langle r \rangle$ e $\langle r^2 \rangle$ para os estados da forma $\psi_{n(n-1)m}$.
 - (c) Demonstre que a “incerteza” em r nesses estados, ou seja, σ_r , é
- $$\sigma_r = \frac{\langle r \rangle}{\sqrt{2n+1}} .$$
- (d) Note que o espalhamento diminui com o aumento de n . Nesse sentido, o sistema “começa a parecer clássico,” com “órbitas” circulares identificáveis para n grande. Esboce a parte radial da função de onda para diversos valores de n , ilustrando essa observação.
9. Qual é a probabilidade de que um elétron no estado fundamental do hidrogênio seja encontrado *dentro do núcleo*?
 - (a) Primeiro calcule a resposta exata, considerando que o raio do núcleo é b .
 - (b) Use valores experimentais, $b \approx 10^{-15}$ m e $a \approx 0,5 \times 10^{-10}$ m para obter uma estimativa numérica. A grosso modo, isso representa a “fração do tempo que o elétron gasta dentro do núcleo”
 10. Aplique o teorema do virial para o átomo de hidrogênio e demonstre que, para estados estacionários,

$$\langle T \rangle = -E_n ; \quad \langle V \rangle = 2E_n .$$

O teorema do virial tridimensional para os estados estacionários é

$$2 \langle T \rangle = \langle \vec{r} \cdot \nabla V \rangle$$