PEM5116 — Mecânica Quântica

Lista de Exercícios no. 2

15 de maio de 2019

1. Para os estados ψ_0 e ψ_1 do oscilador harmônico:
   (a) Calcule $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$.
   (b) Verifique o princípio da incerteza para esses estados.
   (c) Calcule $\langle T \rangle$ (a energia cinética média) e $\langle V \rangle$ (a energia potencial média) para ambos os estados (não precisa integrar de novo!). A soma das duas é o que você esperava?

   Os estados $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ são dados respectivamente por

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}, \qquad \psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

   Use o site `https://www.wolframalpha.com` se precisar resolver integrais complicadas.

2. Uma partícula no potencial do oscilador harmônico está no estado

$$\Psi(x, 0) = A[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)]$$

   (a) Calcule A.
   (b) Ao medir a energia da partícula, quais valores você pode obter e com quais probabilidades?
   (c) Monte $\Psi(x, t)$ e $|\Psi(x, t)|^2$.
   (d) Calcule $\langle x \rangle$ e $\langle p \rangle$. Verifique se o postulado de Ehrenfest é satisfeito:

$$\frac{d\,\langle p \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

3. O editor de uma renomada revista científica lhe enviou um artigo, a respeito do qual você deve emitir um parecer. Em certo ponto, os autores do trabalho propõem um operador $\hat{Q}$, que representa um observável Q, com autofunções $f_n(x, t)$ dadas por

$$f_n(x, t) = \sqrt{\frac{2kn}{\pi}} \frac{e^{-i\omega t}}{1 + (nkx)^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

   válidas em todo o espaço (unidimensional) e com k e ω constantes reais positivas. Escreva seu parecer, recomendando ou não a publicação do artigo. **Dica:** para quaisquer duas autofunções $f_n(x, t)$ e $f_m(x, t)$ do artigo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x, t)\, f_m(x, t)\, dx = \frac{2\sqrt{mn}}{m + n}$$

   Sua nota na questão, obviamente, dependerá da concordância do editor (ou seja, do professor) com o parecer.

4. Como visto em aula, as autofunções do operador momento, $\hat{p}$, são

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

   com autovalor $p \in \mathbb{R}$.
   (a) Calcule o comutador $[\hat{p}, \hat{T}]$, sendo $\hat{T}$ o operador energia cinética, $\hat{T} = \hat{p}^2/2m$.
   (b) Determine os aautoestados e autovalores de $\hat{T}$. Lembre que operadores que comutam compartilham o mesmo conjunto de autoestados.