Spin

Prof. Luiz T. F. Eleno

Departamento de Engenharia de Materiais
Escola de Engenharia de Lorena
Universidade de São Paulo

2019

Plano de aula

1. Mecânica Quântica e Álgebra Linear
   - Mecânica Quântica e Álgebra Linear
2. Notação de Dirac simplificada
   - Bras e Kets
   - Bras, kets e operadores
3. Spin
   - Clássico vs. Quântico
   - Teoria algébrica do spin
4. O caso $s = 1/2$
   - Estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$
   - Representação matricial
   - Medidas de spin
5. Elétron em um campo magnético
   - Momento de dipolo magnético
   - Autoestados do momento de dipolo magnético
   - Precessão de Larmor
   - O experimento de Stern-Gerlach
6. Soma de spins
   - Soma de spins 1/2
   - Combinação tripleto
   - Combinação singleto
   - Autoestados de duas partículas de spin 1/2
   - Coeficientes de Clebsch-Gordan

Plano de aula

1. Mecânica Quântica e Álgebra Linear
   - Mecânica Quântica e Álgebra Linear
2. Notação de Dirac simplificada
   - Bras e Kets
   - Bras, kets e operadores
3. Spin
   - Clássico vs. Quântico
   - Teoria algébrica do spin
4. O caso $s = 1/2$
   - Estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$
   - Representação matricial
   - Medidas de spin
5. Elétron em um campo magnético
   - Momento de dipolo magnético
   - Autoestados do momento de dipolo magnético
   - Precessão de Larmor
   - O experimento de Stern-Gerlach
6. Soma de spins
   - Soma de spins 1/2
   - Combinação tripleto
   - Combinação singleto
   - Autoestados de duas partículas de spin 1/2
   - Coeficientes de Clebsch-Gordan

Mecânica Quântica e Álgebra Linear

- Mecânica Quântica:
  - estado do sistema $\rightarrow$ funções de onda $\rightarrow$ **vetores**
  - observáveis $\rightarrow$ transformações lineares $\rightarrow$ **operadores** (hermitianos)
- $\Rightarrow$ A linguagem natural da Mecânica Quântica é a **Álgebra Linear**
- Vetor: $\vec{a}$, **a** ou $|a\rangle$:

$$|a\rangle = \vec{a} = \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

  - $|a\rangle$ é a **representação de Dirac** do estado (vetor) $\vec{a}$
    - $|a\rangle$ é também chamado de **ket** (mais detalhes a seguir)
    - $|a\rangle$ "mora" num espaço vetorial (em quântica, no espaço de Hilbert)
- o produto escalar (ou *produto interno*) de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ indicado por $\langle a \mid b\rangle$ e é dado por

$$\langle a \mid b\rangle = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \ldots + a_N^* b_N$$

- uma transformação linear T é representada por uma matriz que age sobre um vetor gerando outro:

$$|b\rangle = T\,|a\rangle = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1N} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{N1} & t_{N2} & \ldots & t_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

Plano de aula

1. Mecânica Quântica e Álgebra Linear
   - Mecânica Quântica e Álgebra Linear
2. Notação de Dirac simplificada
   - Bras e Kets
   - Bras, kets e operadores
3. Spin
   - Clássico vs. Quântico
   - Teoria algébrica do spin
4. O caso $s = 1/2$
   - Estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$
   - Representação matricial
   - Medidas de spin
5. Elétron em um campo magnético
   - Momento de dipolo magnético
   - Autoestados do momento de dipolo magnético
   - Precessão de Larmor
   - O experimento de Stern-Gerlach
6. Soma de spins
   - Soma de spins 1/2
   - Combinação tripleto
   - Combinação singleto
   - Autoestados de duas partículas de spin 1/2
   - Coeficientes de Clebsch-Gordan

Bras e Kets

- Na notação de Dirac, a função de onda é representada por um **ket**:

$$\boxed{\Psi_n \to |\Psi_n\rangle \to |n\rangle}$$

  - (qualquer uma das representações acima é usada)
- O **bra** correspondente ao **ket** $|n\rangle$ é representado por $\langle n|$

$$\boxed{\text{Dirac: } \begin{cases} |n\rangle\,, & \text{ket} \\ \langle n|\,, & \text{bra} \end{cases}}$$

- Quando um bra (na esquerda) encontra um ket (na direita), teremos um **braket** (de *bracket*, colchete), equivalente ao produto interno:

$$\langle m| \quad |n\rangle \to \boxed{\langle m\,|\,n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m^*(x,t)\,\Psi_n(x,t)\,dx}$$

  (veja que podemos eliminar um dos $|$ ao juntar o bra ao ket)
- $\Rightarrow$ Já vínhamos usando parte da notação de Dirac sem saber!!!
- A partir daqui, vamos frequentemente usar essa notação de **bras** e **kets** $\Rightarrow$ acostume-se!

Bras, kets e operadores

- Quando um operador $\hat{Q}$ (na esquerda) encontra em ket (na direita), ele age sobre o estado representado pelo ket:

$$\boxed{\hat{Q}\,|n\rangle = |\hat{Q}n\rangle = \hat{Q}\Psi_n}$$

- E se agora chega (pela esquerda) um bra $\langle m|$? Ele forma o "sanduíche" do operador:

$$\langle m| \quad \hat{Q}\,|n\rangle \rightarrow \boxed{\langle m\,|\,\hat{Q}\,|\,n\rangle = \langle m\,|\,\hat{Q}n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m^*(x,t)\,\hat{Q}\Psi_n(x,t)\,dx}$$

  (ou seja, é o produto interno ou o braket entre Ψ_m e $\hat{Q}\Psi_n$)

- Observação importante: é muito comum usar a notação

$$\langle m\,|\,\hat{Q}\,|\,n\rangle$$

  que é a mesma coisa que

$$\langle m\,|\,\hat{Q}n\rangle$$

  (ou seja, o segundo "|" é supérfluo)

  - Usaremos frequentemente a partir daqui a notação $\langle m\,|\,\hat{Q}\,|\,n\rangle$, que é a preferida mundo afora

Plano de aula

1. Mecânica Quântica e Álgebra Linear
   - Mecânica Quântica e Álgebra Linear
2. Notação de Dirac simplificada
   - Bras e Kets
   - Bras, kets e operadores
3. Spin
   - Clássico vs. Quântico
   - Teoria algébrica do spin
4. O caso $s = 1/2$
   - Estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$
   - Representação matricial
   - Medidas de spin
5. Elétron em um campo magnético
   - Momento de dipolo magnético
   - Autoestados do momento de dipolo magnético
   - Precessão de Larmor
   - O experimento de Stern-Gerlach
6. Soma de spins
   - Soma de spins 1/2
   - Combinação tripleto
   - Combinação singleto
   - Autoestados de duas partículas de spin 1/2
   - Coeficientes de Clebsch-Gordan

Mecânica clássica

- Na mecânica clássica, há dois tipos de momento angular:
  1. momento angular **orbital** ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$): associado ao movimento **do** centro de massa
  2. momento angular de **spin** (ou de rotação, $\mathbf{S} = I\,\boldsymbol{\omega}$): associado ao movimento **em torno** do centro de massa (I é o momento de inércia relativo ao eixo de rotação e $\boldsymbol{\omega}$ o vetor frequência angular)
- Essa distinção é pura conveniência no contexto clássico:
  - o momento de spin é a soma dos momentos angulares orbitais de todos os elementos de massa que compõem o objeto

Spin

Clássico *vs.* Quântico

Mecânica clássica

- Na mecânica clássica, há dois tipos de momento angular:
  1. momento angular **orbital** ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$): associado ao movimento **do** centro de massa
  2. momento angular de **spin** (ou de rotação, $\mathbf{S} = I\,\boldsymbol{\omega}$): associado ao movimento **em torno** do centro de massa (I é o momento de inércia relativo ao eixo de rotação e $\boldsymbol{\omega}$ o vetor frequência angular)
- Essa distinção é pura conveniência no contexto clássico:
  - o momento de spin é a soma dos momentos angulares orbitais de todos os elementos de massa que compõem o objeto

Mecânica quântica

- Na mecânica quântica, acontece coisa semelhante, mas com uma diferença fundamental:
  1. **o momento angular orbital** é descrito pelos **harmônicos esféricos** Y_l^m
     - por exemplo, oriundo do movimento do elétron em torno do núcleo no átomo de hidrogênio
  2. **outra forma** de momento angular, que associamos, **por analogia,** ao momento de spin clássico
     - não tem a ver com o movimento no espaço $\Rightarrow$ **não é função das coordenadas espaciais** r, θ, ϕ
     - não force a analogia: o elétron (até onde se sabe) é uma partícula pontual
  - $\Rightarrow$ podemos falar que partículas elementares carregam um
    1. momento angular **extrínseco, L**
    2. momento angular **intrínseco, S**

Teoria algébrica do spin

- A **teoria algébrica do spin** é um clone da teoria do momento angular orbital
- Começando pelas relações fundamentais de comutação:

$$\boxed{[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z\,, \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x\,, \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y}$$

- E também os autoestados e autovalores de $\hat{S}^2$ e $\hat{S}_z$ satisfazem as equações

$$\boxed{\hat{S}^2\,|sm_s\rangle = s(s+1)\hbar^2\,|sm_s\rangle\,, \qquad \hat{S}_z\,|sm_s\rangle = m_s\hbar\,|sm_s\rangle}$$

- Os **números quânticos** s e m_s equivalem aos números l e m e identificam o **autoestado** $|sm_s\rangle$
- Como os autoestados não são funções no mesmo sentido que $Y_l^m(\theta,\phi)$, preferimos identificá-los pela **notação de Dirac** usando um ket: $|sm_s\rangle$
- Mas, diferente de l e m, nada impede que s seja um semi-inteiro:

$$\boxed{s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\,, \qquad m = -s, -s+1, \ldots, s-1, s}$$

Exercício

32. Demonstre que

$$\hat{S}_\pm\,|sm_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}\;|s(m_s \pm 1)\rangle$$

sendo

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$$

os operadores escada (levantamento e abaixamento). *Dica:* veja o ex. 4.18 do Griffiths.

O spin é fixo

- Além disso, uma partícula tem um **valor de** s **imutável,** que chamamos de seu **spin**
  - mésons π têm spin 0
  - elétrons, prótons e nêutrons têm spin 1/2
  - fótons têm spin 1
  - partículas δ têm spin 3/2
  - grávitons têm spin 2
  - ...

- Diferentemente, o número quântico l (relacionado ao momento angular orbital) pode assumir qualquer valor inteiro (em átomos como o do hidrogênio, por exemplo), e será alterado se o sistema for perturbado.

- No entanto, s **é fixo** e só é alterado se **a partícula em si for alterada**
  - por exemplo, por colisão em alta energia num acelerador de partículas
    - (não entraremos no mundo da física nuclear!)

Exercício

33. Se o elétron fosse uma esfera sólida clássica de raio

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$

(chamado de **raio clássico do elétron,** obtido supondo que a massa do elétron vem da energia armazenada em seu campo elétrico via fórmula de Eintein $E = mc^2$), e seu momento angular fosse $\hbar/2$, quão rápido (em m/s) um ponto se moveria sobre o "equador" do elétron? Isso parece realista? *Dica:* o momento de inércia de uma esfera homogênea de raio r e massa m é $I = 2mr^2/5$.

Plano de aula

1. Mecânica Quântica e Álgebra Linear
   - Mecânica Quântica e Álgebra Linear
2. Notação de Dirac simplificada
   - Bras e Kets
   - Bras, kets e operadores
3. Spin
   - Clássico vs. Quântico
   - Teoria algébrica do spin
4. O caso $s = 1/2$
   - Estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$
   - Representação matricial
   - Medidas de spin
5. Elétron em um campo magnético
   - Momento de dipolo magnético
   - Autoestados do momento de dipolo magnético
   - Precessão de Larmor
   - O experimento de Stern-Gerlach
6. Soma de spins
   - Soma de spins 1/2
   - Combinação tripleto
   - Combinação singleto
   - Autoestados de duas partículas de spin 1/2
   - Coeficientes de Clebsch-Gordan

O caso $s = 1/2$

estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$

- O caso mais importante é o de spin $s = 1/2$
- Vale para as partículas que compõem a matéria — elétrons, prótons, nêutrons
  - além de quarks e léptons
- É o formalismo de spin mais fácil, pois só há dois autoestados possíveis com $m_s = \pm 1/2$:

$$\chi_+ = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = |\uparrow\rangle\,, \qquad \chi_- = \left|\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\rangle = |\downarrow\rangle$$

  - χ_+ é o estado **spin para cima** (*spin up*), $\uparrow$
  - χ_- é o estado **spin para baixo** (*spin down*), $\downarrow$
  - (*up* e *down* são só uma analogia para as duas possibilidades de autoestados)

Representação matricial

dos autoestados

- Como existem apenas dois autoestados, é mais fácil trabalhar na **representação matricial** dos operadores
  - todos os operadores serão matrizes 2×2
  - todos os estados serão vetores coluna 2×1 (dito **spinor**)
- Vamos representar assim os dois autoestados (ou **autospinores**) de $\hat{S}^2$ e $\hat{S}_z$:
  - spin para cima:

$$\chi_+ = |\uparrow\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - spin para baixo:

$$\chi_- = |\downarrow\rangle = \left|\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Representação matricial dos operadores $\hat{S}^2$ e $\hat{S}_z$

- Vejamos o que acontece com o operador $\hat{S}^2$ para $s = 1/2$ em representação matricial. Sabemos que

$$\hat{S}^2 \left| s m_s \right\rangle = s(s+1)\hbar^2 \left| s m_s \right\rangle$$

ou seja para os dois autoestados com $s = 1/2$,

$$\hat{S}^2 \left| \uparrow \right\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \left| \uparrow \right\rangle \,, \qquad \hat{S}^2 \left| \downarrow \right\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \left| \downarrow \right\rangle$$

- Vamos supor que o operador $\hat{S}^2$ seja representado por uma matriz 2×2 na forma $\hat{S}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,, \qquad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\boxed{\hat{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Exercícios

Exercícios

34. Usando o procedimento do slide anterior, mostre que

$$\boxed{\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

35. Com o auxílio do exercício do slide 10, mostre que

$$\boxed{\hat{S}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{\hat{S}_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

36. Mostre por fim que

$$\boxed{\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}$$

Matrizes de spin de Pauli

- O operador momento angular de spin é

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{S}_x\mathbf{i} + \hat{S}_y\mathbf{j} + \hat{S}_z\mathbf{k}$$

- $\Rightarrow$ pode ser escrito, em representação matricial, como

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$$

sendo

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_x\mathbf{i} + \boldsymbol{\sigma}_y\mathbf{j} + \boldsymbol{\sigma}_x\mathbf{k}\,,$$

com

$$\boxed{\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

as chamadas **matrizes de spin de Pauli**

- Veja que $\hat{S}_x$, $\hat{S}_x$, $\hat{S}_x$ e $\hat{S}^2$ são todos **hermitianos** (como deveria ser, já que são todos **observáveis.**)
- Mas $\hat{S}_+$ e $\hat{S}_-$ não são hermitianos e, portanto, não são observáveis (verifique!)

Matrizes hermitianas

Uma matriz M é hermitiana se $M^\dagger = M$, sendo $M^\dagger = (M^t)^*$, ou seja, o conjugado complexo da transposta de M.

Medidas de spin

- Os autospinores de $\hat{S}_z$ são $|\uparrow\rangle$ (autovalor: $+\hbar/2$) e $|\downarrow\rangle$ (autovalor: $-\hbar/2$)
- Do axioma de Dirac (ver a aula "Formalismo I"), os autoestados formam uma base completa e qualquer estado é uma combinação linear dos elementos da base:

$$\chi = a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle$$

sendo que a normalização impõe

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

- Qualquer medida de $\hat{S}_z$ de uma partícula nesse estado só pode resultar em dois valores:
  1. $+\hbar/2$, com probabilidade $|a|^2$
  2. $-\hbar/2$, com probabilidade $|b|^2$

Valores esperados

- Sabemos que o valor esperado de uma grandeza Q é dado pelo seu sanduíche com o estado χ do sistema:

$$\langle Q\rangle = \langle\chi\,|\,\hat{Q}\,|\,\chi\rangle$$

- Mas, se $\hat{Q}$ está em representação matricial, o produto interno é dado por

$$\langle Q\rangle = \chi^{\dagger}\hat{Q}\chi$$

- Isso simplifica enormemente o cálculo de valores esperados

Medidas de spin

E se, ao invés de medir S_z, você resolve medir S_x?

- Busque os autoestados normalizados de $\hat{S}_x$, com seus respectivos autovalores, que são

$$\chi_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ (com autovalor } +\hbar/2) \quad \text{e} \quad \chi_{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \text{ (com autovalor } -\hbar/2)$$

- Veja que

$$\chi_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right), \qquad \chi_{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$$

  e então

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_{x_1} + \chi_{x_2}\right), \qquad |\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_{x_1} - \chi_{x_2}\right)$$

- Portanto, na base $\{\chi_{x_1}, \chi_{x_2}\}$, o estado genérico χ é

$$\chi = \frac{a+b}{\sqrt{2}}\chi_{x_1} + \frac{a-b}{\sqrt{2}}\chi_{x_2}$$

- $\Rightarrow$ Medidas de $\hat{S}_x$ resultariam nos seguintes resultados:
  1. $+\hbar/2$, com probabilidade $|a+b|^2/2$
  2. $-\hbar/2$, com probabilidade $|a-b|^2/2$

Exercício

37. Liste os valores possíveis de medidas de S_z e S_x, com suas respectivas probabilidades, para um elétron no estado

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix}$$

Exercícios

Exercício

38. Um elétron está no estado de spin

$$\chi = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

    (a) Determine a constante de normalização A.
    (b) Calcule os valores esperados de S_x, S_y e S_z. *Dica:* o complexo conjugado de um vetor coluna é seu transposto conjugado, um vetor linha.
    (c) Calcule as incertezas σ_{S_x}, σ_{S_y} e σ_{S_z} (que são desvios-padrão, não matrizes de Pauli!)
    (d) Confira que o resultado é consistente com o princípio da incerteza que vimos na aula "Momento Angular" (trocando L por S, claro).

39. Para um spinor genérico $\chi = a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle$, calcule $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$, $\langle S_z \rangle$, $\langle S_x^2 \rangle$, $\left\langle S_y^2 \right\rangle$ e $\langle S_z^2 \rangle$. Verifique se $\langle S_x^2 \rangle + \left\langle S_y^2 \right\rangle + \langle S_z^2 \rangle = \langle S^2 \rangle$.

40. (a) Calcule os autovalores e autoestados de $\hat{S}_y$.
    (b) Se você medir S_y de um elétron no spinor genérico $\chi = a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle$, quais valores pode obter e com quais probabilidades?
    (c) Se você mede S_y^2, quais valores pode obter e com quais probabilidades?

41. Construa as matrizes de spin $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$ para uma partícula de spin 1 ($s = 1$). *Dica:* quantos são os autoestados de S_z? Determine a ação de $\hat{S}_z$, $\hat{S}_+$ e $\hat{S}_-$ em cada um deles e use o mesmo procedimento usado anteriormente para o caso $s = 1/2$.

Plano de aula

1. Mecânica Quântica e Álgebra Linear
   - Mecânica Quântica e Álgebra Linear
2. Notação de Dirac simplificada
   - Bras e Kets
   - Bras, kets e operadores
3. Spin
   - Clássico vs. Quântico
   - Teoria algébrica do spin
4. O caso $s = 1/2$
   - Estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$
   - Representação matricial
   - Medidas de spin
5. Elétron em um campo magnético
   - Momento de dipolo magnético
   - Autoestados do momento de dipolo magnético
   - Precessão de Larmor
   - O experimento de Stern-Gerlach
6. Soma de spins
   - Soma de spins 1/2
   - Combinação tripleto
   - Combinação singleto
   - Autoestados de duas partículas de spin 1/2
   - Coeficientes de Clebsch-Gordan

Elétron em um campo magnético

- Uma partícula carregada (por exemplo, um elétron) girando (*spinning*) ao redor de si mesma constitui um **dipolo magnético**
- O **momento de dipolo magnético** $\boldsymbol{\mu}$ é proporcional ao seu momento angular de spin:

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S}$$

  onde a constante de proporcionalidade γ é o chamado **fator giromagnético**
- Quando um dipolo magnético sente um campo magnético $\mathbf{B}$, ele sofre um torque $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ que tende a alinhá-lo paralelo ao campo
  - como a agulha de uma bússola
- A energia (ou seja, a hamiltoniana) associada a esse torque é

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

- Assim, o operador hamiltoniano (desconsiderando a energia cinética de translação) é

$$\hat{H} = -\gamma\, \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}}$$

Autoestados do momento de dipolo magnético

- Imagine que o campo magnético seja uniforme e aponte na direção z:

$$\mathbf{B} = B_0\,\mathbf{k}$$

- o operador hamiltoniano devido ao momento de dipolo magnético, como vimos, é

$$\hat{H} = -\gamma\,\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{S}}$$

- Para uma partícula de spin 1/2, em notação matricial:

$$\hat{H} = -\gamma B_0 \mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{S}} = -\gamma B_0 \hat{S}_z = -\gamma B_0 \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Como esse $\hat{H}$ é proporcional a $\hat{S}_z$, eles comutam e portanto compartilham autoestados, que são:

$$\begin{cases} |\uparrow\rangle\,, & \text{com energia } E_\uparrow = -\dfrac{\gamma B_0 \hbar}{2} \\ |\downarrow\rangle\,, & \text{com energia } E_\downarrow = +\dfrac{\gamma B_0 \hbar}{2} \end{cases}$$

- A energia é menor quando o momento de dipolo é paralelo (mesma direção e sentido) ao campo, como esperado!

Solução geral da eq. de Schrödinger

do elétron em um campo magnético

- A solução geral da **eq. de Schrödinger dependente do tempo** para esse hamiltoniano,

$$\hat{H}\chi = i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}\,,$$

é

$$\chi(t) = a\,|\uparrow\rangle\, e^{-iE_\uparrow t/\hbar} + b\,|\downarrow\rangle\, e^{-iE_\downarrow t/\hbar} = \begin{pmatrix} ae^{i\gamma B_0 t/2} \\ be^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

- As constantes a e b vêm da condição inicial:

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

com, pela condição de normalização,

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

que nos permite escrever

$$a = \cos(\alpha/2)\,, \qquad b = \mathrm{sen}(\alpha/2)$$

sendo α um ângulo qualquer (veremos o significado de α em breve)

- Com isso, a solução geral é

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2)\, e^{i\gamma B_0 t/2} \\ \mathrm{sen}(\alpha/2)\, e^{-i\gamma B_0 t/2} \end{pmatrix}$$

Precessão de Larmor

- Vamos calcular o valor esperado de **S** e ver o que acontece:

$$\langle S_x \rangle = \chi^\dagger(t)\,\hat{S}_x\,\chi(t) = \begin{pmatrix}\cos(\alpha/2)\,e^{-i\gamma B_0 t/2} & \operatorname{sen}(\alpha/2)\,e^{+i\gamma B_0 t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\alpha/2)\,e^{+i\gamma B_0 t/2}\\ \operatorname{sen}(\alpha/2)\,e^{-i\gamma B_0 t/2}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos(\gamma B_0 t)$$

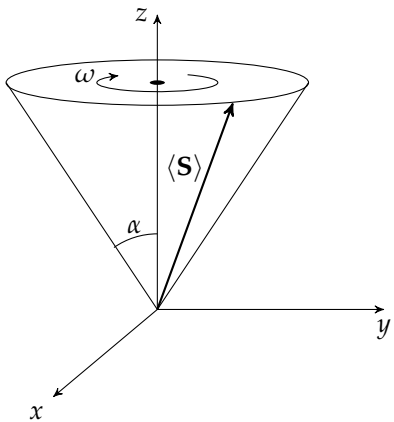
- De modo semelhante,

$$\langle S_y \rangle = -\frac{\hbar}{2}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\gamma B_0 t)\,, \qquad \langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2}\cos\alpha$$

- Com isso, $\langle S^2 \rangle = (\hbar/2)^2$
- Além disso, $\langle \mathbf{S} \rangle$ é um vetor inclinado de um ângulo constante α em relação ao eixo z (que é a direção do campo magnético aplicado) e precessiona (ou seja, rotaciona) em relação ao campo magnético na **frequência de Larmor**

$$\omega = \gamma B_0$$

  exatamente como faria **S**, classicamente
- o **Teorema de Ehernfest** (lembra dele?) garante que deveria ser exatamente assim



Força sobre um dipolo magnético

- Vimos que a energia associada ao torque advindo do momento de dipolo magético é

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

- Se o campo é heterogêneo, ou seja, varia de ponto a ponto do espaço, o dipolo sente uma força:

$$\mathbf{F} = -\nabla H = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = \gamma \nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})$$

  - a força é igual a menos o gradiente da energia (potencial)
  - se o campo magnético é constante, o dipolo não sente força alguma.

- Essa força pode ser usada para separar partículas com diferentes **orientações de spin** (ou seja, com diferentes m_s). Vejamos como.

- Vamos pensar que o campo magnético seja

$$\mathbf{B}(x,y,z) = -\alpha x\,\mathbf{i} + (B_0 + \alpha z)\mathbf{k}$$

  em que B_0 é um forte campo uniforme e a constante α descreve um pequeno desvio da homogeneidade
  - veja que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, como diz uma das leis de Maxwell (lei de Gauss para o magnetismo)

- A força nesse caso é

$$\mathbf{F} = \gamma \nabla \left\{ [-\alpha x\,\mathbf{i} + (B_0 + \alpha z)\mathbf{k}] \cdot (s_x\,\mathbf{i} + S_y\,\mathbf{j} + S_z\,\mathbf{k}) \right\} = \gamma \nabla \left[-\alpha x S_x + (B_0 + \alpha z) S_z \right]$$

$$= -\gamma \alpha S_x\,\mathbf{i} + \gamma \alpha S_z\,\mathbf{k} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = \gamma \alpha (-S_x\,\mathbf{i} + S_z\,\mathbf{k})$$

O experimento de Stern-Gerlach

- Do slide anterior, vemos que a força na direção z é

$$F_z = \gamma \alpha S_z$$

- Portanto:
  - partículas com $S_z > 0$ serão desviadas para cima
  - partículas com $S_z < 0$ serão desviadas para baixo
- Experimento realizado por Otto Stern e Walther Gerlach em 1922:

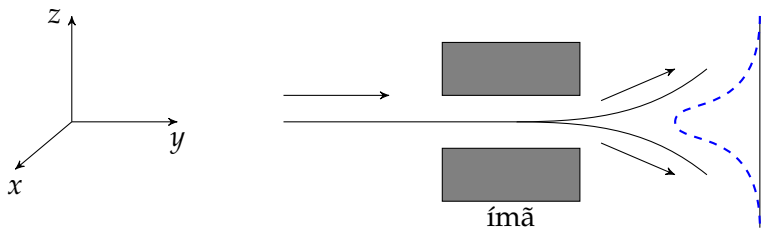


Figura: Aparato de Stern-Gerlach

- Classicamente, esperaríamos apenas uma *mancha*, pois S_z não seria quantizada

O experimento de Stern-Gerlach

- Do slide anterior, vemos que a força na direção z é

$$F_z = \gamma \alpha S_z$$

- Portanto:
  - partículas com $S_z > 0$ serão desviadas para cima
  - partículas com $S_z < 0$ serão desviadas para baixo
- Experimento realizado por Otto Stern e Walther Gerlach em 1922:

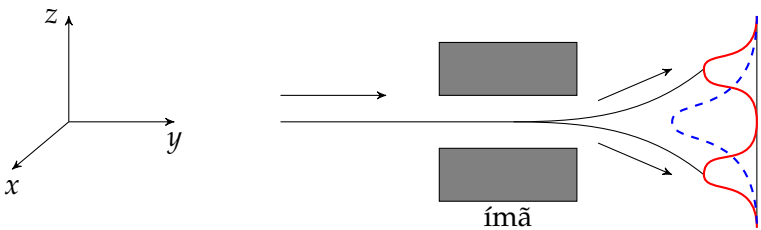


Figura: Aparato de Stern-Gerlach

- Classicamente, esperaríamos apenas uma *mancha*, pois S_z não seria quantizada
- Mas Otto e Walther encontraram uma distribuição bimodal

O experimento de Stern-Gerlach

- Do slide anterior, vemos que a força na direção z é

$$F_z = \gamma \alpha S_z$$

- Portanto:
  - partículas com $S_z > 0$ serão desviadas para cima
  - partículas com $S_z < 0$ serão desviadas para baixo
- Experimento realizado por Otto Stern e Walther Gerlach em 1922:

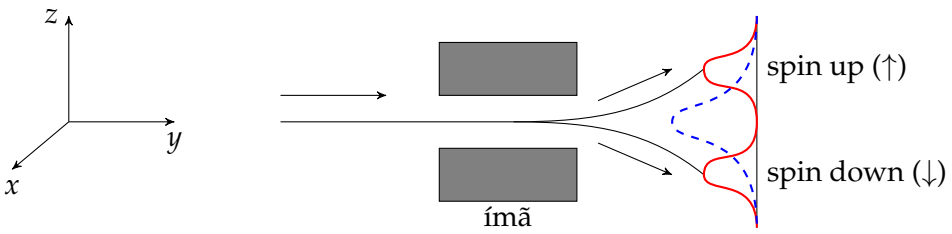


Figura: Aparato de Stern-Gerlach

- Classicamente, esperaríamos apenas uma *mancha*, pois S_z não seria quantizada
- Mas Otto e Walther encontraram uma distribuição bimodal

O experimento de Stern-Gerlach

- Do slide anterior, vemos que a força na direção z é

$$F_z = \gamma \alpha S_z$$

- Portanto:
  - partículas com $S_z > 0$ serão desviadas para cima
  - partículas com $S_z < 0$ serão desviadas para baixo
- Experimento realizado por Otto Stern e Walther Gerlach em 1922:

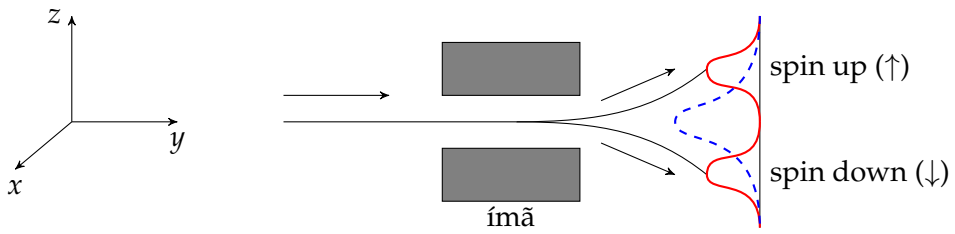


Figura: Aparato de Stern-Gerlach

- Classicamente, esperaríamos apenas uma *mancha*, pois S_z não seria quantizada
- Mas Otto e Walther encontraram uma distribuição bimodal
- O experimento não funciona com um feixe de elétrons — eles são muito leves!
  - eles usaram átomos de prata
  - Um átomo de prata tem 47 elétrons no total, mas 46 deles têm momentos de spin que se cancelam aos pares. O elétron de valência, **desemparelhado,** causa o spin resultante do átomo: $s = 1/2$ e $m_s = \pm 1/2$
  - No caso de uma partícula de spin s qualquer, o feixe se divide em $2s + 1$ correntes separadas

Exercícios

Exercícios

42. (a) Se voce medir a componente de um momento angular de spin ao longo da direção x, no instante t, qual é a probabilidade de que vá obter $\hbar/2$?
    (b) Responda à mesma pergunta, mas para a componente y.
    (c) Responda à mesma pergunta, mas para a componente z.

43. Um elétron está em repouso em um campo magnético oscilante

$$\mathbf{B} = B_0 \cos(\omega t)\, \mathbf{k}\,,$$

em que B_0 e ω são constantes reais positivas.

(a) Monte a matriz hamiltoniana para esse sistema.
(b) O elétron inicia (em $t = 0$) no estado spin up em relação ao eixo x, isto é,

$$\chi(0) = \chi_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Determine $\chi(t)$ em qualquer instante t posterior. *Cuidado:* esse é um hamiltoniano *dependente do tempo* e, portanto, não dá para obter $\chi(t)$ da maneira usual a partir dos estados estacionários. Felizmente, nesse caso, é possível resolver a eq. de Schrödinger dependente do tempo diretamente.

(c) Calcule a probabilidade de se obter $-\hbar/2$ ao se medir S_x. Resposta:

$$\operatorname{sen}^2\left[\frac{\gamma B_0}{2\omega} \operatorname{sen}(\omega t)\right]$$

(d) Quais os valores, de B_0 para ser possível medir $S_x = -\hbar/2$ com 100% de probabilidade?

Plano de aula

1. Mecânica Quântica e Álgebra Linear
   - Mecânica Quântica e Álgebra Linear
2. Notação de Dirac simplificada
   - Bras e Kets
   - Bras, kets e operadores
3. Spin
   - Clássico vs. Quântico
   - Teoria algébrica do spin
4. O caso $s = 1/2$
   - Estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$
   - Representação matricial
   - Medidas de spin
5. Elétron em um campo magnético
   - Momento de dipolo magnético
   - Autoestados do momento de dipolo magnético
   - Precessão de Larmor
   - O experimento de Stern-Gerlach
6. Soma de spins
   - Soma de spins 1/2
   - Combinação tripleto
   - Combinação singleto
   - Autoestados de duas partículas de spin 1/2
   - Coeficientes de Clebsch-Gordan

Soma de spins 1/2

- Considere que temos duas partículas de spin 1/2
  - por exemplo, o átomo de hidrogênio (elétron + próton) no estado fundamental
    - em que não há momento angular orbital: $l = 0$
- Como as duas partículas podem ter spin up ou down, há quatro possibilidades no total:

$$\chi_{1,2} = \chi_1\chi_2 = \{\, |\uparrow\uparrow\rangle \,, \qquad |\uparrow\downarrow\rangle \,, \qquad |\downarrow\uparrow\rangle \,, \qquad |\downarrow\downarrow\rangle \,\}$$

  - a primeira seta se refere ao elétron, a segunda ao próton
- Pergunta: qual é o momento angular total do átomo?
  - vamos nos limitar ao caso em que $l = 0$, assim podemos nos restringir apenas ao spin
- Para responder à pergunta, considere o seguinte operador:

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}^{(1)} + \hat{\mathbf{S}}^{(2)}$$

- O operador $\hat{\mathbf{S}}_z$ (projeção de $\hat{\mathbf{S}}$ sobre o eixo z) tem por autoestados os quatro estados acima, ou seja, as componentes z simplesmente se somam:

$$\hat{S}_z\chi_1\chi_2 = \left(\hat{S}_z^{(1)} + \hat{S}_z^{(2)}\right)\chi_1\chi_2 = \left(\hat{S}_z^{(1)}\chi_1\right)\chi_2 + \chi_1\left(\hat{S}_z^{(2)}\chi_2\right) = \hbar m_1\chi_1\chi_2 + \chi_1\hbar m_2\chi_2$$

$$\Rightarrow \hat{S}_z\chi_1\chi_2 = (m_1 + m_2)\,\hbar\chi_1\chi_2$$

  - veja que $\hat{\mathbf{S}}^{(1)}$ age somente sobre χ_1 e $\hat{\mathbf{S}}^{(2)}$ sobre χ_2

Soma de spins 1/2

- Assim, o número quântico m_s para o sistema composto é $m_1 + m_2$
- As possibilidades são:

$$\begin{cases} \uparrow\uparrow : m_s = 1 \\ \uparrow\downarrow : m_s = 0 \\ \downarrow\uparrow : m_s = 0 \\ \downarrow\downarrow : m_s = -1 \end{cases}$$

- Isso não parece certo! Poderíamos supor que somar dois spins $s = 1/2$ resultaria em $s = 1$, e deveríamos ter apenas três autoestados, com $m_s = -1, 0, 1$
  - mas há um autoestado extra com $m_s = 0$
- Para entender, vamos ver o que acontece se aplicarmos o operador abaixamento $\hat{S}_- = \hat{S}_-^{(1)} + \hat{S}_-^{(2)}$ ao estado $|\uparrow\uparrow\rangle$:

$$\hat{S}_- |\uparrow\uparrow\rangle = \left(\hat{S}_-^{(1)} |\uparrow\rangle\right) |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \left(\hat{S}_-^{(2)} |\uparrow\rangle\right) = \hbar |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle \hbar |\downarrow\rangle = \hbar \left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

- Mas o spin total do estado $|\uparrow\uparrow\rangle$ é $s = s_1 + s_2 = 1/2 + 1/2 = 1$. Além disso, ele tem $m_s = 1$.
  - podemos indicar esse estado, portanto, como $|sm_s\rangle = |11\rangle$, além de $|\uparrow\uparrow\rangle$
  - mas o operador abaixamento têm sobre esse estado o seguinte efeito, com a ajuda do exercício 32:

$$\hat{S}_- |11\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}\, |10\rangle = \hbar\sqrt{2}\, |10\rangle$$

  - Fica claro então que

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

Combinação tripleto

- Aplique agora o operador abaixamento ao estado $|10\rangle$
  - a resposta deve ser

$$\hat{S}_- |10\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1\,-1\rangle$$

- Mas o estado $|1\,-1\rangle$ é o estado com spin total $s = 1 = 1/2 + 1/2$ e $m_s = -1 = -1/2 - 1/2$
  - ou seja, é o estado $|\downarrow\downarrow\rangle$, que, portanto, pode também ser representado por $|1\,-1\rangle$
- Com tudo isso, descobrimos que há três estados com $s = 1$, cada um deles com os valores permitidos para m_s (-1, 0 e $+1$):

$$\boxed{\left.\begin{aligned} |1\,1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle \\ |1\,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \\ |1\,-1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}\right\} \quad s = 1 \quad \text{(tripleto)}}$$

- Esses autoestados são chamados de combinação **tripleto**

Combinação singleto

- Vimos que existem três estados (com $s = 1$), formando a combinação tripleto
- Mas vimos que há um estado extra com $m_s = 0$
  - esse estado não pode ter $s = 1$, pois só três estados são permitidos para esse caso
- Você pode verificar que o seguinte estado é ortogonal a todos os estados tripleto:

$$|sm_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

  - e portanto é o quarto autoestado que buscamos
  - já sabemos que $m_s = 0$ para esse estado, mas qual é o valor de s?

Exercícios

44. Aplique $\hat{S}_+$ e $\hat{S}_-$ ao estado acima, e verifique que obterá zero nos dois casos se $s = 0$.
45. No exercício anterior, $s = -1$ também é possivel matematicamente, mas porque não é aceitável fisicamente?

- Do ex. 44, descobrimos que o autoestado extra tem $s = 0$ e $m_s = 0$, ou seja,

$$\boxed{|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)} \quad s = 0 \quad \text{(singleto)}$$

- Esse autoestado é chamado de **singleto**

Autoestados de duas partículas de spin 1/2

- Pelo que vimos, a combinação de duas partículas de spin 1/2 (com momento angular orbital nulo) pode ter:
  1. spin total $s = 1$, em uma combinação linear dos estados tripletos
  2. spin total $s = 0$, no estado singleto
- Para comprovar isso, precisamos mostrar que:
  1. os estados tripletos são autofunções de $\hat{S}^2$ com autovalor $1(1+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$
  2. o estado singleto é autofunção de $\hat{S}^2$ com autovalor $0(0+1)\hbar^2 = 0$
- Vamos tentar demonstrar isso a seguir $\rightarrow$

Demonstração: autovalores para partículas com spin total $s = 0$ ou $s = 1$

- A demonstração começa com o seguinte:

$$\hat{S}^2 = \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{S}} = \left(\hat{\mathbf{S}}^{(1)} + \hat{\mathbf{S}}^{(2)}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{S}}^{(1)} + \hat{\mathbf{S}}^{(2)}\right) = \left(\hat{S}^{(1)}\right)^2 + \left(\hat{S}^{(2)}\right)^2 + 2\hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)}$$

- Temos ainda que

$$\hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)} = \left(\hat{S}_x^{(1)}\right)\left(\hat{S}_x^{(2)}\right) + \left(\hat{S}_y^{(1)}\right)\left(\hat{S}_y^{(2)}\right) + \left(\hat{S}_z^{(1)}\right)\left(\hat{S}_z^{(2)}\right)$$

- Então:

$$\hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)} \left|\uparrow\downarrow\right\rangle = \left(\hat{S}_x^{(1)} \left|\uparrow\right\rangle\right)\left(\hat{S}_x^{(2)} \left|\downarrow\right\rangle\right) + \left(\hat{S}_y^{(1)} \left|\uparrow\right\rangle\right)\left(\hat{S}_y^{(2)} \left|\downarrow\right\rangle\right) + \left(\hat{S}_z^{(1)} \left|\uparrow\right\rangle\right)\left(\hat{S}_z^{(2)} \left|\downarrow\right\rangle\right)$$

- Com a ajuda das matrizes de Pauli, vamos aplicar esse operador aos estados $\left|\uparrow\downarrow\right\rangle$ e $\left|\downarrow\uparrow\right\rangle$:

$$\hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)} \left|\uparrow\downarrow\right\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\left|\downarrow\right\rangle\right)\left(\frac{\hbar}{2}\left|\uparrow\right\rangle\right) + \left(\frac{i\hbar}{2}\left|\downarrow\right\rangle\right)\left(-\frac{i\hbar}{2}\left|\uparrow\right\rangle\right) + \left(\frac{\hbar}{2}\left|\uparrow\right\rangle\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\left|\downarrow\right\rangle\right)$$

ou seja,

$$\hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)} \left|\uparrow\downarrow\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(2\left|\downarrow\uparrow\right\rangle - \left|\uparrow\downarrow\right\rangle\right)$$

- De maneira similar,

$$\hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)} \left|\downarrow\uparrow\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(2\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)$$

Demonstração (cont.)

- Segue que

$$\hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)} \left|1\,0\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\left|\downarrow\uparrow\right\rangle - \left|\uparrow\downarrow\right\rangle + 2\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) = \frac{\hbar^2}{4}\left|1\,0\right\rangle$$

e também

$$\hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)} \left|0\,0\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\left|\downarrow\uparrow\right\rangle - \left|\uparrow\downarrow\right\rangle - 2\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) = -\frac{3}{4}\hbar^2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right) = -\frac{3}{4}\hbar^2\left|0\,0\right\rangle$$

- Vamos usar também as expressões que encontramos anteriormente para um único spin,

$$\left(\hat{S}^{(1,2)}\right)^2\left|\uparrow\right\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\left|\uparrow\right\rangle\,, \qquad \left(\hat{S}^{(1,2)}\right)^2\left|\downarrow\right\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\left|\downarrow\right\rangle$$

e com isso temos

$$\hat{S}^2\left|1\,0\right\rangle = \left(\frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 + 2\,\frac{\hbar^2}{4}\right)\left|1\,0\right\rangle = 2\hbar^2\left|1\,0\right\rangle$$

e

$$\hat{S}^2\left|0\,0\right\rangle = \left(\frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 - 2\,\frac{3}{4}\hbar^2\right)\left|0\,0\right\rangle = 0$$

o que comprova o que queríamos demonstrar

  - na verdade, falta mostrar para os autoestados $\left|1\,1\right\rangle$ e $\left|1\,-1\right\rangle$; fica como exercício! $\square$

Coeficientes de Clebsch-Gordan

- O Griffiths continua com o caso geral de adição de dois spins quaisquer s_1 e s_2
- Os valores possíveis de s são

$$s = s_1 + s_2, s_1 + s_2 - 1, \ldots, |s_1 - s_2|$$

- Qualquer autoestado $|sm\rangle$ é uma combinação linear dos estados de partícula única:

$$|sm\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C^{s_1 s_2 s}_{m_1 m_2 m} |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle$$

- Os $C^{s_1 s_2 s}_{m_1 m_2 m}$ são os **coeficientes de Clebsch-Gordan**
  - (para nosso curso, fica apenas como uma curiosidade)

Exercícios

46. **Quarks** têm spin 1/2. Três quarks se juntam para formar um **bárion** (como o próton e o nêutron); dois quarks (ou, mais precisamente, um quark e um antiquark) compõem um **méson.** Suponha que os quarks estejam no estado fundamental (assim, o momento angular orbital é nulo).
    (a) Quais spins são possíveis para os bárions? *Dica:* some primeiro dois quarks, depois some o terceiro.
    (b) Quais spins são possíveis para os mésons?
47. Uma partícula de spin 1 e uma partícula de spin 2 tem ambas momento angular orbital nulo. Elas estão numa configuração em que o spin total é 3 e a componente z é $\hbar$. Se você medir a componente z do momento angular total da partícula spin 2, quais valores pode obter, e com quais probabilidades?
48. Um elétron com spin down está no estado ψ_{510} do átomo de hidrogênio. Se você pudesse medir apenas o quadrado do momento angular total do elétron (*não* incluindo o spin do próton), quais valores poderia obter e com quais probabilidades? *Dica:* tudo o que vimos também funciona para a soma de momentos angulares orbitais e para a soma de momento angular orbital *e* de spin (mesmo que seja da mesma partícula!).