***Problemas Mais Gerais.*** O método de separação de variáveis também pode ser usado para resolver problemas de condução de calor com outras condições de contorno diferentes das condições dadas pelas Eqs. (8) e (24). Por exemplo, a extremidade esquerda da barra pode ser mantida a uma temperatura fixa $T$, enquanto a outra extremidade está isolada. Nesse caso, as condições de contorno ficam

$$u(0,t) = T, \qquad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0. \tag{43}$$

O primeiro passo para resolver esse problema é reduzir as condições de contorno dadas a condições homogêneas, subtraindo-se a solução estado estacionário. O problema resultante é resolvido, essencialmente, pelo mesmo método usado nos problemas considerados anteriormente. No entanto, a extensão da função inicial $f$ fora do intervalo $[0, L]$ é um pouco diferente das extensões consideradas até agora (veja o Problema 15).

Um tipo mais geral de condições de contorno ocorre quando o fluxo de calor nas extremidades da barra é proporcional à temperatura. Demonstra-se, no Apêndice A, que as condições de contorno nesse caso são da forma

$$u_x(0,t) - h_1u(0,t) = 0, \qquad u_x(L,t) + h_2u(L,t) = 0, \quad t > 0, \tag{44}$$

em que $h_1$ e $h_2$ são constantes não negativas. Se aplicarmos o método de separação de variáveis ao problema que consiste nas Eqs. (1), (3) e (44), veremos que $X(x)$ tem que ser solução de

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X'(0) - h_1X(0) = 0, \qquad X'(L) + h_2X(L) = 0, \tag{45}$$

em que $\lambda$ é a constante de separação. Mais uma vez, é possível mostrar que só existem soluções não triviais para determinados valores reais não negativos de $\lambda$, os autovalores, mas esses valores não são dados por uma fórmula simples (veja o Problema 20). Também é possível mostrar que as soluções correspondentes das Eqs. (45), as autofunções, satisfazem uma relação de ortogonalidade e que é possível satisfazer a condição inicial (3) pela superposição das soluções das Eqs. (45). No entanto, a série resultante não está incluída nas discussões deste capítulo. Existe uma teoria mais geral que cobre tais problemas e está esquematizada no Capítulo 11.

## PROBLEMAS

Em cada um dos problemas de 1 a 8, encontre a solução estado estacionário da equação do calor $\alpha^2u_{xx} = u_t$ que satisfaz o conjunto dado de condições de contorno.

2017

1. $u(0,t) = 10, \quad u(50,t) = 40$
2. $u(0,t) = 30, \quad u(40,t) = -20$ 2015
3. $u_x(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0$
4. $u_x(0,t) = 0, \quad u(L,t) = T$
5. $u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0$
6. $u(0,t) = T, \quad u_x(L,t) = 0$
7. $u_x(0,t) - u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = T$
8. $u(0,t) = T, \quad u_x(L,t) + u(L,t) = 0$

9. Considere uma barra de alumínio, com 20 cm de comprimento, inicialmente a uma temperatura uniforme de 25°C. Suponha que, no instante $t = 0$, a extremidade $x = 0$ é esfriada a 0°C, enquanto a extremidade $x = 20$ é aquecida a 60°C, e ambas são mantidas, daí para frente, a essas temperaturas.
   (a) Encontre a distribuição de temperatura na barra em qualquer instante $t$.
   (b) Faça os gráficos da distribuição inicial de temperatura, da distribuição final (estado estacionário) e de duas distribuições em dois instantes representativos intermediários no mesmo conjunto de eixos.
   (c) Faça o gráfico de $u$ em função de $t$ para $x = 5$, 10 e 15.
   (d) Determine o intervalo de tempo necessário para que a temperatura em $x = 5$ cm alcance um intervalo de 1% (e permaneça nesse intervalo) em torno de seu valor no estado estacionário.

10. (a) Suponha que as extremidades de uma barra de cobre com 100 cm de comprimento são mantidas a 0°C. Suponha que o centro da barra é aquecido a 100°C por uma fonte externa de calor; que essa situação se mantém até resultar em um estado estacionário. Encontre essa distribuição de temperatura no estado estacionário.
    (b) Em um instante $t = 0$ [depois de atingido o estado estacionário do item (a)], suponha que a fonte externa é removida. No mesmo instante, suponha que a extremidade $x = 0$ é colocada em contato com um reservatório a 20°C, enquanto a outra extremidade permanece a 0°C. Encontre a temperatura em função da posição e do tempo.
    (c) Faça o gráfico de $u$ em função de $x$ para diversos valores de $t$. Faça, também, o gráfico de $u$ em função de $t$ para diversos valores de $x$.
    (d) A que valor limite tende a temperatura no centro da barra depois de um longo período de tempo? Depois de quanto tempo o centro da barra esfriará de modo a ficar a 1°C de seu valor limite?

11. Considere uma barra com 30 cm de comprimento para a qual $\alpha^2 = 1$. Suponha que a distribuição inicial de temperatura é dada por $u(x, 0) = x(60 - x)/30$ e que as condições de contorno são $u(0, t) = 30$ e $u(30, t) = 0$.
(a) Encontre a temperatura na barra em função da posição e do tempo.
(b) Faça o gráfico de $u$ em função de $x$ para diversos valores de $t$. Faça, também, o gráfico de $u$ em função de $t$ para diversos valores de $x$.
(c) Faça o gráfico de $u$ em função de $t$ para $x = 12$. Note que $u$ inicialmente diminui, depois cresce por um tempo e, finalmente, diminui para alcançar seu valor no estado estacionário. Explique, fisicamente, por que esse comportamento ocorre nesse ponto.

12. Considere uma barra uniforme de comprimento $L$ a uma temperatura inicial dada por $u(x, 0) = \text{sen}(\pi x/L)$, $0 \le x \le L$. Suponha que ambas as extremidades estão isoladas.
(a) Encontre a temperatura $u(x, t)$.
(b) Qual é a temperatura no estado estacionário, quando $t \to \infty$?
(c) Sejam $\alpha^2 = 1$ e $L = 40$. Faça o gráfico de $u$ em função de $x$ para diversos valores de $t$. Faça, também, o gráfico de $u$ em função de $t$ para diversos valores de $x$.
(d) Descreva em poucas palavras como a temperatura na barra varia com o passar do tempo.

13. Considere uma barra com 40 cm de comprimento cuja temperatura inicial é dada por $u(x, 0) = x(60 - x)/30$. Suponha que $\alpha^2 = 1/4$ cm²/s e que ambas as extremidades da barra estão isoladas.
(a) Encontre a temperatura $u(x, t)$.
(b) Faça o gráfico de $u$ em função de $x$ para diversos valores de $t$. Faça, também, o gráfico de $u$ em função de $t$ para diversos valores de $x$.
(c) Determine a temperatura na barra no estado estacionário.
(d) Determine o intervalo de tempo necessário para que a temperatura em $x = 40$ fique a 1°C de seu valor no estado estacionário.

14. Considere uma barra com 30 cm de comprimento, feita de um material para o qual $\alpha^2 = 1$ e cujas extremidades estão isoladas. Suponha que a temperatura inicial é zero, exceto no intervalo $5 < x < 10$, em que é 25°C.
(a) Encontre a temperatura $u(x, t)$.
(b) Faça o gráfico de $u$ em função de $x$ para diversos valores de $t$. Faça, também, o gráfico de $u$ em função de $t$ para diversos valores de $x$.
(c) Faça o gráfico de $u(4, t)$ e $u(11, t)$ em função de $t$. Note que os pontos $x = 4$ e $x = 11$ estão localizados simetricamente em relação ao pulso inicial, mas os gráficos de suas respectivas temperaturas são bem diferentes. Explique fisicamente por que isso acontece.

15. Considere uma barra uniforme de comprimento $L$ com distribuição inicial de temperatura dada por $f(x)$, $0 \le x \le L$. Suponha que a temperatura na extremidade $x = 0$ é mantida a 0°C, enquanto a extremidade $x = L$ está isolada, de modo que não há fluxo de calor através dela.
(a) Mostre que as soluções fundamentais da equação diferencial parcial e das condições de contorno são

$$u_n(x, t) = e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t/4L^2} \,\text{sen}[(2n - 1)\pi x/2L], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(b) Encontre uma expansão em série formal para a temperatura $u(x, t)$,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t)$$

que satisfaça, também, a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$.
*Sugestão*: Embora as soluções fundamentais envolvam apenas senos ímpares, ainda é possível representar $f$ por uma série de Fourier em senos envolvendo apenas essas funções. Veja o Problema 39 da Seção 10.4.

16. Na barra do Problema 15, suponha que $L = 30$, que $\alpha^2 = 1$ e que a distribuição inicial de temperatura é $f(x) = 30 - x$ para $0 < x < 30$.
(a) Encontre a temperatura $u(x, t)$.
(b) Faça o gráfico de $u$ em função de $x$ para diversos valores de $t$. Faça, também, o gráfico de $u$ em função de $t$ para diversos valores de $x$.
(c) Como muda a localização do ponto mais quente da barra $x_m$ quando $t$ aumenta? Desenhe o gráfico de $x_m$ em função de $t$.
(d) Faça o gráfico da temperatura máxima na barra em função de $t$.

17. Suponha que as condições são como nos Problemas 15 e 16, exceto que a condição de contorno em $x = 0$ é $u(0, t) = 40$.
(a) Encontre a temperatura $u(x, t)$.
(b) Faça o gráfico de $u$ em função de $x$ para diversos valores de $t$. Faça, também, o gráfico de $u$ em função de $t$ para diversos valores de $x$.
(c) Compare os gráficos obtidos nesse problema com os do Problema 16. Explique como a mudança na condição de contorno em $x = 0$ causa as diferenças observadas no comportamento da temperatura na barra.

18. Considere o problema

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X'(0) = 0, \qquad X'(L) = 0. \tag{i}$$

Seja $\lambda = \mu^2$, em que $\mu = \nu + i\sigma$, com $\nu$ e $\sigma$ reais. Mostre que, se $\sigma \neq 0$, então a única solução das Eqs. (i) é a solução trivial $X(x) = 0$.

*Sugestão*: Use um argumento semelhante ao do Problema 23 da Seção 10.1.

19. A extremidade direita de uma barra de comprimento $a$ com condutividade térmica $\kappa_1$ e área de seção reta $A_1$ é juntada à extremidade esquerda de uma barra com condutividade térmica $\kappa_2$ e área de seção reta $A_2$. A barra composta tem comprimento total $L$. Suponha que a extremidade $x = 0$ é mantida à temperatura zero, ao passo que a extremidade $x = L$ é mantida à temperatura $T$. Encontre a temperatura na barra composta no estado estacionário, supondo que a temperatura e a taxa de fluxo de calor são contínuas em $x = a$.

*Sugestão*: Veja a Eq. (2) no Apêndice A.

20. Considere o problema

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{xx} &= u_t, & 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0,t) = 0, \qquad u_x(L,t) + \gamma u(L,t) &= 0, & t > 0; \\ u(x,0) &= f(x), & 0 \le x \le L. \end{aligned} \tag{i}$$

(a) Seja $u(x,t) = X(x)T(t)$ e mostre que

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X'(L) + \gamma X(L) = 0, \tag{ii}$$

e

$$T' + \lambda \alpha^2 T = 0,$$

em que $\lambda$ é a constante de separação.

(b) Suponha que $\lambda$ é real e mostre que o problema (ii) não tem soluções não triviais se $\lambda \le 0$.

(c) Se $\lambda > 0$, seja $\lambda = \mu^2$ com $\mu > 0$. Mostre que o problema (ii) só tem soluções não triviais se $\mu$ for solução da equação

$$\mu \cos \mu L + \gamma \operatorname{sen} \mu L = 0. \tag{iii}$$

(d) Reescreva a Eq. (iii) como $\tan(\mu L) = -\mu/\gamma$. Depois, desenhando os gráficos de $y = \tan(\mu L)$ e de $y = -\mu L/\gamma L$ para $\mu > 0$ no mesmo conjunto de eixos, mostre que a Eq. (iii) é satisfeita por uma infinidade de valores positivos de $\mu$; denote esses valores por $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$, ordenados em ordem crescente.

(e) Determine o conjunto de soluções fundamentais $u_n(x,t)$ correspondente aos valores $\mu_n$ encontrados no item (d).

**Uma Fonte de Calor Externa.** Considere o problema de condução de calor em uma barra em contato térmico com uma fonte ou um sorvedouro externo de calor. Então a equação de calor modificada é

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + s(x), \tag{i}$$

em que o termo $s(x)$ descreve o efeito do agente externo; $s(x)$ é positivo para uma fonte e negativo no caso de um sorvedouro. Suponha que as condições de contorno são

$$u(0,t) = T_1, \qquad u(L,t) = T_2 \tag{ii}$$

e que a condição inicial é

$$u(x,0) = f(x). \tag{iii}$$

Os problemas de 21 a 23 tratam desse tipo de problema.

21. Escreva $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, em que $v$ e $w$ são as partes estacionária e transiente, respectivamente, da solução. Enuncie os problemas de valores de contorno que $v(x)$ e $w(x,t)$ satisfazem, respectivamente. Observe que o problema para $w$ é o problema de condução de calor fundamental discutido na Seção 10.5, com uma distribuição inicial de temperatura modificada.

22. (a) Suponha que $\alpha^2 = 1$ e que $s(x) = k$ na Eq. (i), com $k$ constante. Encontre $v(x)$.

(b) Suponha que $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $L = 20$, $k = 1/5$ e que $f(x) = 0$ para $0 < x < L$. Determine $w(x,t)$. Depois faça o gráfico de $u(x,t)$ em função de $x$ para diversos valores de $t$; faça também o gráfico, no mesmo conjunto de eixos, da parte estacionária da solução, $v(x)$.

23. (a) Sejam $\alpha^2 = 1$ e $s(x) = kx/L$ na Eq. (i), em que $k$ é constante. Encontre $v(x)$.

(b) Suponha que $T_1 = 10$, $T_2 = 30$, $L = 20$, $k = 1/2$ e que $f(x) = 0$ para $0 < x < L$. Determine $w(x, t)$. Depois faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de $x$ para diversos valores de $t$; faça também o gráfico, no mesmo conjunto de eixos, da parte estacionária da solução, $v(x)$.

## Equação de Onda: Vibrações de uma Corda Elástica

Uma segunda equação diferencial parcial, que ocorre com frequência em matemática aplicada, é a equação de onda.[10] Alguma forma dessa equação, ou uma de suas generalizações, aparece quase que inevitavelmente em qualquer análise matemática de fenômenos envolvendo a propagação de ondas em um meio contínuo. Por exemplo, estudos de ondas acústicas, ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas baseiam-se todos nessa equação.

Talvez a situação mais fácil de visualizar seja a investigação de vibrações mecânicas. Suponha que uma corda elástica de comprimento $L$ esteja ligeiramente esticada entre dois suportes no mesmo nível horizontal, de modo que o eixo dos $x$ esteja ao longo da corda (veja a Figura 10.7.1).

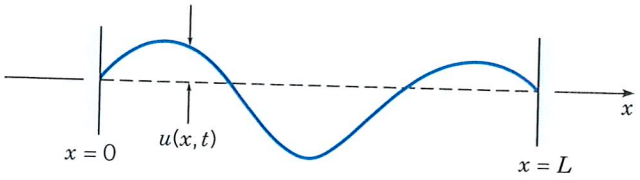



**FIGURA 10.7.1** Uma corda vibrante.

Pode-se pensar nessa corda elástica como uma corda de guitarra, ou um esteio, ou, possivelmente, um cabo de transmissão de energia elétrica. Suponha que a corda é colocada em movimento (sendo puxada, por exemplo) de modo que vibra em um plano vertical, e denote por $u(x, t)$ o deslocamento vertical da corda no ponto $x$ no instante $t$. Se forem desprezados os efeitos de amortecimento, como a resistência do ar, e se a amplitude do movimento não for muito grande, então $u(x, t)$ satisfará a equação diferencial parcial

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \tag{1}$$

no domínio $0 < x < L$, $t > 0$. A Eq. (1) é conhecida como a **equação de onda** unidimensional e está deduzida no Apêndice B no final deste capítulo. O coeficiente constante $a^2$ que aparece na Eq. (1) é dado por

$$a^2 = T/\rho\,, \tag{2}$$

em que $T$ é a tensão (força) na corda e $\rho$ é a massa por unidade de comprimento do material da corda. Segue que $a$ tem unidades de comprimento/tempo, ou seja, de velocidade. O Problema 14 mostra que $a$ é a velocidade de propagação das ondas ao longo da corda.

Para descrever completamente o movimento da corda, é necessário especificar, também, condições iniciais e de contorno adequadas para o deslocamento $u(x, t)$. Supõe-se que as extremidades permanecem fixas; logo, as condições de contorno são

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{3}$$

[10] A solução da equação de onda foi um dos principais problemas matemáticos de meados do século XVIII. A equação de onda foi deduzida e estudada pela primeira vez por D'Alembert em 1746. Atraiu, também, a atenção de Euler (1748), Daniel Bernoulli (1753) e Lagrange (1759). Foram obtidas soluções de formas diferentes; os méritos de cada uma e as relações entre elas foram discutidas, algumas vezes acaloradamente, em uma série de artigos durante mais de 25 anos. Os pontos principais em discussão tratavam da natureza de uma função e dos tipos de funções que podem ser representadas por séries trigonométricas. Essas questões não foram resolvidas até o século XIX.