Aula 10

Neste livro, as séries de Fourier aparecem principalmente como um meio de resolver determinados problemas em equações diferenciais parciais. No entanto, tais séries têm uma aplicação muito mais ampla em ciência e engenharia, e, em geral, são ferramentas valiosas na investigação de fenômenos periódicos. Um problema básico é decompor um sinal de entrada em seus componentes harmônicos, o que corresponde a construir sua representação em série de Fourier. Em algumas bandas de frequência, os termos separados correspondem a cores diferentes ou a tons audíveis diferentes. O módulo do coeficiente determina a amplitude de cada componente. Esse processo é conhecido como análise espectral.

PROBLEMAS

Em cada um dos problemas de 1 a 8, determine se a função dada é periódica. Se for, encontre seu período fundamental.

1. $\operatorname{sen} 5x$ 2. $\cos 2\pi x$ 3. $\operatorname{senh} 2x$ 4. $\operatorname{sen} \pi x/L$ 5. $\tan \pi x$ 6. x^2

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & 2n-1 \le x < 2n, \\ 1, & 2n \le x < 2n+1; \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8. $f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & 2n-1 \le x < 2n, \\ 1, & 2n \le x < 2n+1; \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

9. Se $f(x) = -x$ para $-L < x < L$ e se $f(x + 2L) = f(x)$, encontre uma fórmula para $f(x)$ no intervalo $L < x < 2L$ e no intervalo $-3L < x < -2L$.

10. Se $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } -1 < x < 0, \\ x, & \text{se } \ 0 < x < 1, \end{cases}$ e se $f(x + 2) = f(x)$, encontre uma fórmula para $f(x)$ no intervalo $1 < x < 2$ e no intervalo $8 < x < 9$.

11. Se $f(x) = L - x$ para $0 < x < 2L$ e se $f(x + 2L) = f(x)$, encontre uma fórmula para $f(x)$ no intervalo $-L < x < 0$.

12. Verifique as Eqs. (6) e (7) nessa seção integrando diretamente.

Em cada um dos problemas de 13 a 18:

(a) Esboce o gráfico da função dada por três períodos.
(b) Encontre a série de Fourier da função dada.

13. $f(x) = -x, \quad -L \le x < L; \qquad f(x + 2L) = f(x)$

2017 Rec. 14. $f(x) = \begin{cases} 1, & -L \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < L; \end{cases} \qquad f(x + 2L) = f(x)$

2017 15. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi; \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$

16. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0, \\ 1-x, & 0 \le x < 1; \end{cases} \qquad f(x + 2) = f(x)$

17. $f(x) = \begin{cases} x+L, & -L \le x \le 0, \\ L, & 0 < x < L; \end{cases} \qquad f(x + 2L) = f(x)$

18. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x \le -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 \le x < 2; \end{cases} \qquad f(x + 4) = f(x)$

Em cada um dos problemas de 19 a 24:

(a) Esboce o gráfico da função dada por três períodos.
(b) Encontre a série de Fourier da função dada.
(c) Faça o gráfico da soma parcial $s_m(x)$ em função de x para $m = 5, 10$ e 20.
(d) Descreva como a série de Fourier parece estar convergindo.

19. $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 2; \end{cases} \qquad f(x + 4) = f(x)$

20. $f(x) = x, \quad -1 \le x < 1; \qquad f(x + 2) = f(x)$

21. $f(x) = x^2/2, \quad -2 \le x \le 2; \qquad f(x + 4) = f(x)$

22. $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \le x < 0, \\ 2-2x, & 0 \le x < 2; \end{cases} \qquad f(x + 4) = f(x)$

23. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & -2 \le x < 0, \\ 2x - \frac{1}{2}x^2, & 0 \le x < 2; \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)$

24. $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \le x \le 0, \\ x^2(3-x), & 0 < x < 3; \end{cases} \qquad f(x+6) = f(x)$

25. Considere a função f definida no Problema 21, e seja $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$.
(a) Faça o gráfico de $|e_m(x)|$ em função de x para $0 \le x \le 2$ para diversos valores de m.
(b) Encontre o menor valor de m para o qual $|e_m(x)| \le 0{,}01$ para todo x.

26. Considere a função f definida no Problema 24, e seja $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$.
(a) Faça o gráfico de $|e_m(x)|$ em função de x para $0 \le x \le 3$ para diversos valores de m.
(b) Encontre o menor valor de m para o qual $|e_m(x)| \le 0{,}1$ para todo x.

27. Suponha que g é uma função integrável e periódica com período T.
(a) Se $0 \le a \le T$, mostre que

$$\int_0^T g(x)\,dx = \int_a^{a+T} g(x)\,dx.$$

Sugestão: Mostre primeiro que $\int_0^a g(x)dx = \int_T^{a+T} g(x)dx$. Considere a mudança de variável $s = x - T$ na segunda integral.
(b) Mostre que, para qualquer valor de a, não necessariamente em $0 \le a \le T$,

$$\int_0^T g(x)dx = \int_a^{a+T} g(x)dx.$$

(c) Mostre que, para quaisquer valores de a e b,

$$\int_a^{a+T} g(x)\,dx = \int_b^{b+T} g(x)dx.$$

28. Se f for diferenciável e periódica com período T, mostre que f' também é periódica com período T. Determine se

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

é sempre periódica.

29. Nesse problema, indicamos algumas semelhanças entre vetores geométricos tridimensionais e séries de Fourier.
(a) Sejam $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ três vetores ortogonais dois a dois em três dimensões, e seja $\mathbf{u}$ qualquer vetor tridimensional. Mostre que

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3, \tag{i}$$

em que

$$a_i = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{ii}$$

Mostre que a_i pode ser interpretado como a projeção de $\mathbf{u}$ na direção de $\mathbf{v}_i$ dividida pelo comprimento de $\mathbf{v}_i$.
(b) Defina o produto interno (u, v) por

$$(u, v) = \int_{-L}^{L} u(x)v(x)dx. \tag{iii}$$

Sejam

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \cos(n\pi x/L), & n &= 0, 1, 2, \ldots; \\ \psi_n(x) &= \operatorname{sen}(n\pi x/L), & n &= 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{iv}$$

Mostre que a Eq. (10) pode ser escrita na forma

$$(f, \phi_n) = \frac{a_0}{2}(\phi_0, \phi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\phi_m, \phi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m(\psi_m, \phi_n). \tag{v}$$

(c) Use a Eq. (v) e a equação correspondente para (f, ψ_n) junto com as relações de ortogonalidade para mostrar que

$$a_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad b_n = \frac{(f, \psi_n)}{(\psi_n, \psi_n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{vi}$$

Note a semelhança entre as Eqs. (vi) e a Eq. (ii). As funções ϕ_n e ψ_n têm um papel semelhante ao dos vetores ortogonais $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ no espaço tridimensional. Os coeficientes a_n e b_n podem ser interpretados como as projeções da função f sobre as funções da base ϕ_n e ψ_n.

Observe também que qualquer vetor tridimensional pode ser expresso como uma combinação linear de três vetores ortogonais dois a dois. De maneira semelhante, qualquer função suficientemente suave definida em $-L \le x \le L$ pode ser expressa como uma combinação linear das funções ortogonais $\cos(n\pi x/L)$ e $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$, ou seja, como uma série de Fourier.

10.3 O Teorema de Convergência de Fourier

Na seção precedente, mostramos que, se a série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \right) \tag{1}$$

convergir e definir, então, uma função f, essa função f será periódica com período $2L$ e os coeficientes a_m e b_m estarão relacionados com $f(x)$ pelas fórmulas de Euler-Fourier:

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots; \tag{2}$$

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}\, dx, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Nesta seção, vamos supor que é dada uma função f. Se essa função for periódica com período $2L$ e integrável no intervalo $[-L, L]$, então será possível calcular um conjunto de coeficientes a_m e b_m pelas Eqs. (2) e (3), e será possível construir, formalmente, uma série da forma (1). O problema é saber se essa série converge para cada valor de x e, nesse caso, se sua soma é $f(x)$. Foram descobertos exemplos que mostram que uma série de Fourier correspondente a uma função f pode não convergir para $f(x)$ ou pode até divergir. Funções cujas séries de Fourier não convergem para o valor da função em pontos isolados são fáceis de construir; exemplos serão apresentados, mais adiante, nessa seção. Funções cujas séries de Fourier divergem em um ou mais pontos são mais patológicas e não serão consideradas neste livro.

Para garantir a convergência de uma série de Fourier para a função da qual seus coeficientes foram calculados, é essencial colocar hipóteses adicionais sobre a função. De um ponto de vista prático, tais condições devem ser fracas o suficiente para cobrir todas as situações de interesse e, ainda, simples o suficiente para serem facilmente verificadas para funções particulares. Ao longo dos anos, foram desenvolvidos diversos conjuntos de condições com esse propósito.

Antes de enunciar um teorema de convergência para séries de Fourier, vamos definir uma expressão que aparece no teorema. Uma função f é dita **seccionalmente contínua** em um intervalo $a \le x \le b$, se o intervalo pode ser dividido por um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de modo que

1. f é contínua em cada subintervalo aberto $x_{i-1} < x < x_i$.
2. f tende a um limite finito nas extremidades de cada subintervalo, quando aproximadas do interior do subintervalo.

A Figura 10.3.1 mostra o gráfico de uma função seccionalmente contínua.

A notação $f(c+)$ é usada para denotar o limite de $f(x)$ quando $x \to c$ pela direita; analogamente, $f(c-)$ denota o limite de $f(x)$ quando x tende a c pela esquerda.

Note que não é necessário que a função esteja definida nos pontos da partição x_i. Por exemplo, no teorema a seguir, supomos que f' é seccionalmente contínua; mas, certamente, f' não pode existir da série de Fourier (6) convergem para f está indicada na Figura 10.3.3, em que L foi escolhido como 1 e aparece o gráfico de $s_8(x)$. A figura sugere que, nos pontos em que f é contínua, as somas parciais tendem a $f(x)$ quando n aumenta. No entanto, em vizinhanças dos pontos de descontinuidade, tais como $x = 0$ e $x = L$, as somas parciais não convergem suavemente ao ponto médio. Em vez disso, elas tendem a passar da marca em cada extremidade do salto, como se tivessem dificuldade de se acomodar à mudança brusca que têm que fazer em cada um desses pontos. Esse comportamento é típico de séries de Fourier em pontos de descontinuidade e é conhecido como o fenômeno de Gibbs.[5]

Pode-se obter melhor compreensão considerando-se o erro $e_n(x) = f(x) - s_n(x)$. A Figura 10.3.4 mostra um gráfico de $|e_n(x)|$ em função de x para $n = 8$ e $L = 1$. A menor cota superior para $|e_8(x)|$ é 0,5 e é aproximada quando $x \to 0$ e $x \to 1$. Quando n aumenta, o erro diminui no interior do intervalo [em que $f(x)$ é contínua], mas a menor cota superior não diminui quando n aumenta. Não podemos, então, reduzir o erro uniformemente no intervalo inteiro aumentando o número de termos.

As Figuras 10.3.3 e 10.3.4 mostram também que a série nesse exemplo converge mais devagar do que a no Exemplo 1 na Seção 10.2. Isso se deve ao fato de que os coeficientes na série (6) são proporcionais, apenas, a $1/(2n - 1)$.

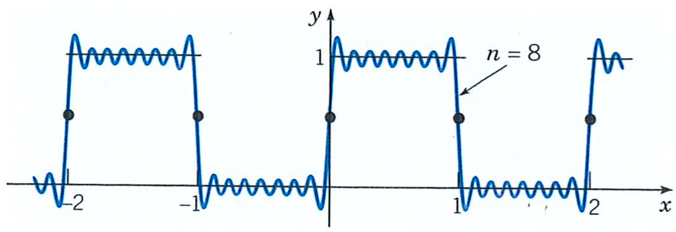

FIGURA 10.3.3 A soma parcial $s_8(x)$ da série de Fourier, Eq. (6), para a onda quadrada.

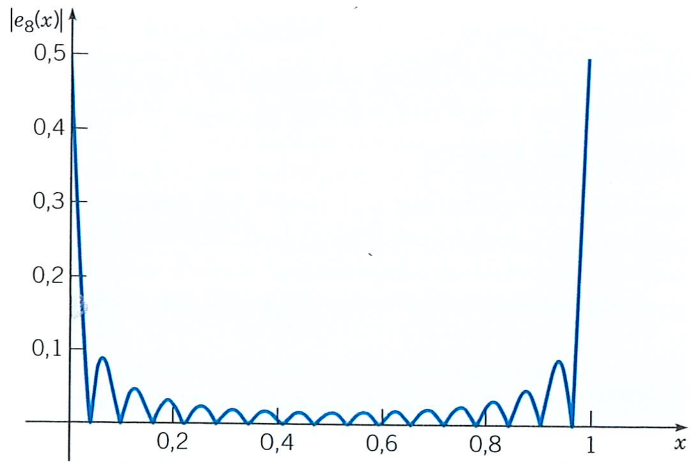

FIGURA 10.3.4 Um gráfico do erro $|e_8(x)|$ em função de x para a onda quadrada.

PROBLEMAS

Em cada um dos problemas de 1 a 6, suponha que a função dada é estendida, periodicamente, para fora do intervalo original.

(a) Encontre a série de Fourier da função estendida.
(b) Esboce o gráfico da função para a qual a série converge por três períodos.

30 1. $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

31 2. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

---

[5]O fenômeno de Gibbs leva este nome em honra a Josiah Willard Gibbs (1839-1903), que é mais conhecido por seu trabalho em análise vetorial e mecânica estatística. Gibbs foi professor de física matemática em Yale e um dos primeiros cientistas americanos a obter reputação internacional. O fenômeno de Gibbs é discutido em mais detalhes por Carslaw (Capítulo 9).

32 3. $f(x) = \begin{cases} L + x, & -L \le x < 0, \\ L - x, & 0 \le x < L \end{cases}$ 33 4. $f(x) = 1 - x^2, \quad -1 \le x < 1$

34 5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < -\pi/2, \\ 1, & -\pi/2 \le x < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$ 35 6. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

Em cada um dos problemas sw 7 a 12, suponha que a função dada é estendida, periodicamente, para fora do intervalo original.

(a) Encontre a série de Fourier da função dada.

(b) Seja $e_n(x) = f(x) - s_n(x)$. Encontre a menor cota superior ou o valor máximo (se existir) de $|e_n(x)|$ para n = 10, 20 e 40.

(c) Se possível, encontre o menor n para o qual $|e_n(x)| \le 0{,}01$ para todo x.

36 7. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi; \end{cases}$ $\quad f(x + 2\pi) = f(x)$ (veja a Seção 10.2, Problema 15)

37 8. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x < 0, \\ 1 - x, & 0 \le x < 1; \end{cases}$ $\quad f(x + 2) = f(x)$ (veja a Seção 10.2, Problema 16)

38 9. $f(x) = x, \quad -1 \le x < 1; \quad f(x + 2) = f(x)$ (veja a Seção 10.2, Problema 20)

39 10. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \le x < 0, \\ 2 - 2x, & 0 \le x < 2; \end{cases}$ $\quad f(x + 4) = f(x)$ (veja a Seção 10.2, Problema 22)

40 11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x^2, & 0 \le x < 1; \end{cases}$ $\quad f(x + 2) = f(x)$ (veja o Problema 6)

41 12. $f(x) = x - x^3, \quad -1 \le x < 1; \quad f(x + 2) = f(x)$

Forças Externas Periódicas. Neste capítulo, estamos preocupados, basicamente, com a utilização de séries de Fourier para resolver problemas de valores de contorno para determinadas equações diferenciais parciais. No entanto, as séries de Fourier são, também, úteis em muitas outras situações em que ocorrem fenômenos periódicos. Os problemas de 13 a 16 indicam como elas podem ser usadas para resolver problemas de valor inicial com a parte não homogênea periódica.

42 13. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = \operatorname{sen} nt, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0,$$

em que n é um inteiro positivo e $\omega^2 \neq n^2$. O que acontece se $\omega^2 = n^2$?

43 14. Encontre a solução formal do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0,$$

em que $\omega > 0$ é diferente de todos os inteiros positivos. Como essa solução é modificada se $\omega = m$, em que m é um inteiro positivo?

44 15. Encontre a solução formal do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

em que f é periódica com período 2π e

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi; \\ 0, & t = 0, \pi, 2\pi; \\ -1, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

Veja o Problema 1.

45 16. Encontre a solução formal do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

em que f é periódica com período 2 e

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \le t < 1; \\ -1 + t, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

Veja o Problema 8.

46 17. Supondo que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{i}$$

mostre, formalmente, que

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Essa relação entre uma função f é seus coeficientes de Fourier é conhecida como a identidade de Parseval.[6] Essa identidade é muito importante na teoria de séries de Fourier; veja o Problema 9 na Seção 11.6.
Sugestão: Multiplique a Eq. (i) por $f(x)$, integre de $-L$ a L e use as fórmulas de Euler-Fourier.

47 18. Esse problema indica uma demonstração de convergência de séries de Fourier sob condições mais restritivas do que as do Teorema 10.3.1.
(a) Se f e f' forem seccionalmente contínuas em $-L \to x < L$ e se f for periódica com período $2L$, mostre que na_n e nb_n permanecerão limitadas quando $n \to \infty$.
Sugestão: Use integração por partes.
(b) Se f for contínua em $-L \le x \le L$ e periódica com período $2L$, e se f' e f'' forem seccionalmente contínuas em $-L \le x < L$, mostre que n^2a_n e n^2b_n permanecerão limitadas quando $n \to \infty$. Se f for contínua no intervalo *fechado*, então será contínua para todo x. Por que isso é importante?
Sugestão: Novamente, integre por partes.
(c) Usando o resultado do item (b), mostre que $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ convergem.
(d) Do resultado no item (c), mostre que a série de Fourier (4) converge absolutamente[7] para todo x.

Aceleração da Convergência. No próximo problema, mostramos como é possível, algumas vezes, aumentar a velocidade de convergência de uma série de Fourier.

48 19. Suponha que queremos calcular valores da função g, em que

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)}{1+(2n-1)^2}\operatorname{sen}(2n-1)\pi x. \tag{i}$$

É possível mostrar que essa série converge, embora bem devagar. No entanto, observe que, para n grande, os termos na série (i) são aproximadamente iguais a $[\operatorname{sen}(2n-1)\pi x]/(2n-1)$ e que esses últimos são semelhantes aos termos no exemplo no texto, Eq. (6).
(a) Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\operatorname{sen}(2n-1)\pi x]/(2n-1) = (\pi/2)\left[f(x) - \tfrac{1}{2}\right], \tag{ii}$$

em que f é a onda quadrada no exemplo com $L = 1$.
(b) Subtraia a Eq. (ii) da Eq. (i) e mostre que

$$g(x) = \frac{\pi}{2}\left[f(x) - \tfrac{1}{2}\right] - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{(2n-1)[1+(2n-1)^2]}. \tag{iii}$$

A série (iii) converge muito mais rápido do que a série (i) e, assim, fornece um modo melhor de calcular valores de $g(x)$.

---

[6]Marc-Antoine Parseval (1755-1836) foi um matemático francês relativamente obscuro que teve um resultado importante batizado com seu nome. Ele apresentou um precursor deste resultado em 1799, embora não no contexto de séries de Fourier.

[7]Ela também converge uniformemente; para uma explicação do que isto significa, consulte um livro de cálculo avançado ou de análise.

Como indicado anteriormente, podemos representar f por uma série em cossenos ou por uma em senos. Esboce o gráfico da soma de cada uma dessas séries para $-6 \leq x \leq 6$.

Nesse exemplo, $L = 2$, de modo que a série em cossenos para f converge para a extensão periódica par de f de período 4, cujo gráfico está esboçado na Figura 10.4.4.

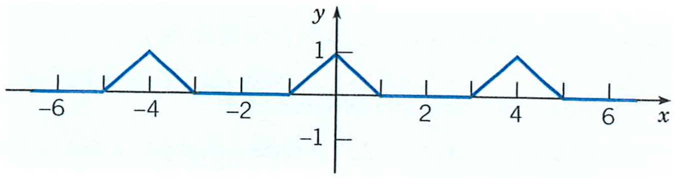

FIGURA 10.4.4 Extensão periódica par de $f(x)$ dada pela Eq. (13).

Analogamente, a série em senos para f converge para a extensão periódica ímpar de f de período 4. O gráfico dessa função está esboçado na Figura 10.4.5.

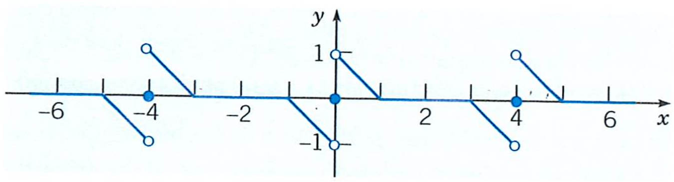

FIGURA 10.4.5 Extensão periódica ímpar de $f(x)$ dada pela Eq. (13).

PROBLEMAS

Em cada um dos problemas de 1 a 6, determine se a função dada é par, ímpar, ou nenhuma das duas.

49 1. $x^3 - 2x$

50 2. $x^3 - 2x + 1$

51 3. $\tan 2x$

52 4. $\sec x$

53 5. $|x|^3$

54 6. e^{-x}

Em cada um dos problemas de 7 a 12, é dada uma função f em um intervalo de comprimento L. Em cada caso, esboce os gráficos da extensão par e da extensão ímpar de f de período $2L$.

55 7. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x < 3 \end{cases}$

56 8. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ x - 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

57 9. $f(x) = 2 - x, \quad 0 < x < 2$

58 10. $f(x) = x - 3, \quad 0 < x < 4$

59 11. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

60 12. $f(x) = 4 - x^2, \quad 0 < x < 1$

61 13. Prove que qualquer função pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função ímpar. Ou seja, para qualquer função f cujo domínio contém $-x$ sempre que contiver x, mostre que há uma função par g e uma função ímpar h tal que $f(x) = g(x) + h(x)$.
Sugestão: O que você pode dizer sobre $f(x) + f(-x)$?

62 14. Encontre os coeficientes para as séries em cossenos e em senos descritas no Exemplo 2.

Em cada um dos problemas de 15 a 22:

(a) Encontre a série de Fourier indicada para a função dada.
(b) Esboce o gráfico da função para a qual a série converge em um intervalo de três períodos.

63 15. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2; \end{cases}$ série em cossenos, período 4

Compare com o Exemplo 1 e o Problema 5 da Seção 10.3.

64 16. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2; \end{cases}$ série em senos, período 4

65 17. $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le \pi;$ série em cossenos, período 2π

66 18. $f(x) = 1, \quad 0 < x < \pi;$ série em senos, período 2π

67 19. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi, \\ 1, & \pi < x < 2\pi, \\ 2, & 2\pi < x < 3\pi; \end{cases}$ série em senos, período 6π

68 20. $f(x) = x, \quad 0 \le x < 1;$ série com período 1

69 21. $f(x) = L - x, \quad 0 \le x \le L;$ série em cossenos, período $2L$
Compare com o Exemplo da Seção 10.2.

70 22. $f(x) = L - x, \quad 0 < x < L;$ série em senos, período $2L$

Em cada um dos problemas de 23 a 26:

(a) Encontre a série de Fourier indicada na função dada.
(b) Esboce o gráfico da função para a qual a série converge em um intervalo de três períodos.
(c) Faça o gráfico de uma ou mais somas parciais da série.

23. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \pi < x < 2\pi; \end{cases}$ série em cossenos, período 4π 71

24. $f(x) = -x, \quad -\pi < x < 0;$ série em senos, período 2π 72

25. $f(x) = 2 - x^2, \quad 0 < x < 2;$ série em senos, período 4 73

26. $f(x) = x^2 - 2x, \quad 0 < x < 4;$ série em cossenos, período 8 74

Em cada um dos problemas de 27 a 30, é dada uma função em um intervalo $0 < x < L$.

(a) Esboce os gráficos da extensão periódica par $g(x)$ e da extensão periódica ímpar $h(x)$ da função dada, ambas com período $2L$, em um intervalo de três períodos.
(b) Encontre as séries de Fourier em cossenos e em senos da função dada.
(c) Faça os gráficos de algumas das somas parciais de cada série.
(d) Para cada série, investigue a dependência em n do erro máximo em $[0, L]$.

27. $f(x) = 3 - x, \quad 0 < x < 3$ 75

28. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$ 76

29. $f(x) = (4x^2 - 4x - 3)/4, \quad 0 < x < 2$ 77

30. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 1, \quad 0 < x < 3$ 78

31. Prove que, se f for uma função ímpar, então 79

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0.$$

80 32. Prove as propriedades 2 e 3 de funções pares e ímpares, como enunciadas no texto.

81 33. Prove que a derivada de uma função par é ímpar e que a derivada de uma função ímpar é par.

82 34. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Mostre que, se f for par, então F será ímpar, e que, se f for ímpar, F será par.

83 35. A partir da série de Fourier da onda quadrada no Exemplo 1 da Seção 10.3, mostre que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Essa relação entre π e os inteiros positivos ímpares foi descoberta por Leibniz em 1674.

84 36. A partir da série de Fourier para a onda triangular (Exemplo 1 da Seção 10.2), mostre que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

85 37. Suponha que f tem uma série de Fourier em senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/L), \qquad 0 < x < L.$$

(a) Mostre, formalmente, que

$$\frac{2}{L}\int_0^L [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Compare esse resultado (equação de Parseval) com o resultado do Problema 17 na Seção 10.3. Qual será o resultado correspondente se f tiver uma série em cossenos?

(b) Aplique o resultado do item (a) à série da função dente de serra dada pela Eq. (9), mostrando, assim, que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Essa relação foi descoberta por Euler em torno de 1735.

Séries de Fourier Mais Especializadas. Seja f uma função definida originalmente em $0 \le x \le L$ e satisfazendo aí as condições de continuidade do Teorema 10.3.1. Mostramos, nesta seção, que é possível representar f por uma série em senos ou por uma série em cossenos, através da construção da extensão periódica ímpar ou par de f, respectivamente. Os problemas de 38 a 40 tratam de outras séries de Fourier mais especializadas que convergem à função f dada no intervalo $(0, L)$.

86

38. Estenda f ao intervalo $(L, 2L]$ arbitrariamente, mas sujeita às condições de continuidade do Teorema 10.3.1. Depois estenda a função resultante a $(-2L, 0)$ como uma função ímpar e ao resto da reta como periódica de período $4L$ (veja a Figura 10.4.6). Mostre que essa função tem uma série de Fourier em senos formada pelas funções $\text{sen}(n\pi x/2L)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}(n\pi x/2L),$$

em que

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\,\text{sen}(n\pi x/2L)\,dx.$$

Essa série converge para a função original em $(0, L)$.

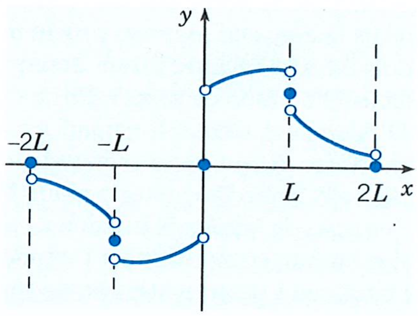

FIGURA 10.4.6 Gráfico da função no Problema 38.

87

39. Estenda primeiro f a $(L, 2L)$ de modo que seja simétrica em relação à reta $x = L$. Então f satisfaz $f(2L - x) = f(x)$ para $0 \le x < L$. Estenda a função resultante a $(-2L, 0)$ como ímpar e ao resto da reta real como periódica de período $4L$ (veja a Figura 10.4.7). Mostre que essa função tem série de Fourier formada pelas funções $\text{sen}(\pi x/2L)$, $\text{sen}(3\pi x/2L)$, $\text{sen}(5\pi x/2L)$, $\ldots$; ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

em que

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\,dx.$$

Essa série converge para a função original em $(0, L]$.

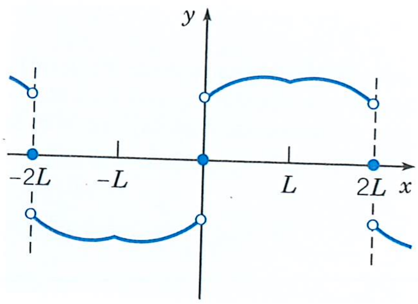

FIGURA 10.4.7 Gráfico da função no Problema 39.

88

40. (a) Como se deve estender f, definida originalmente em $[0, L]$, de modo a se obter uma série de Fourier envolvendo apenas as funções $\cos(\pi x/2L)$, $\cos(3\pi x/2L)$, $\cos(5\pi x/2L), \ldots$? Veja os Problemas 38 e 39.
(b) Se $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq L$, esboce a função para a qual essa série de Fourier converge para $-4L \leq x \leq 4L$.

ıção de Variáveis; Condução de Calor em uma Barra

As equações diferenciais parciais básicas de condução de calor, propagação de ondas e teoria do potencial, que vamos discutir neste capítulo, estão associadas a três tipos distintos de fenômenos físicos: processos de difusão, processos oscilatórios e processos independentes do tempo ou estacionários. Essas equações são, portanto, de importância fundamental em muitos ramos da física. Elas também são muito importantes do ponto de vista matemático. As equações diferenciais parciais, cuja teoria está mais bem desenvolvida e cujas aplicações são mais significativas e variadas, são as equações lineares de segunda ordem. Todas essas equações podem ser classificadas em três tipos: a equação de calor, a equação de onda e a equação do potencial, respectivamente, são protótipos de cada um desses tipos. Assim, um estudo dessas três equações fornece muita informação sobre as equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem mais gerais.

Durante os dois últimos séculos, foram desenvolvidos diversos métodos para resolver equações diferenciais parciais. O método de separação de variáveis é o método sistemático mais antigo, tendo sido usado por D'Alembert, Daniel Bernoulli e Euler em torno de 1750 em suas investigações sobre ondas e vibrações. Nesse meio-tempo, o método foi consideravelmente refinado e generalizado, permanecendo, ainda hoje, como um método muito importante e de uso frequente. Para mostrar como o método de separação de variáveis funciona, vamos considerar primeiro um problema básico de condução de calor em um corpo sólido. O estudo matemático de condução de calor começou[9] em torno de 1800 e continua a atrair a atenção de cientistas modernos. Por exemplo, a análise da dissipação e transferência do calor produzido por máquinas de alta velocidade para longe de sua fonte é, com frequência, um problema tecnológico importante.

Vamos considerar um problema de condução de calor em uma barra de seção reta uniforme feita com material homogêneo. Escolha o eixo dos x de modo a formar o eixo da barra e suponha que $x = 0$ e $x = L$ correspondem às extremidades da barra (veja a Figura 10.5.1). Suponha, ainda, que os lados da barra estão perfeitamente isolados, de modo que não há transmissão de calor aí. Podemos supor, também, que as dimensões da seção reta são tão pequenas que a temperatura u pode ser considerada constante em qualquer seção reta. Então, u só depende da coordenada axial x e do instante t.

[9]A primeira investigação importante sobre condução de calor foi feita ...