MA22 - Unidade 10 - Exercícios

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

28 de Abril de 2013

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Exercícios

1) Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $3x^3$

(b) $2x^2 + x$

(c) $2x^{-3}$

(d) $\frac{x}{\sqrt{x}}$

(e) $(x^2 + 3)(x + 1)$

(f) $\sqrt{x}(x - a)$

(g) $x^{3/2} = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$

(h) $\frac{x^2+1}{x-1}$

(i) $\frac{x^3+2x^2}{x^2+1}$

(j) $\frac{x+2}{\sqrt{x}}$

(k) $\frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-a}$

(l) $x^{-5/2}$

2) Determine a reta tangente no ponto $(1, 1)$, do gráfico da curva $y = x^4 - x^2 + 1$.

3) Determine a reta tangente no ponto de abscissa $x = 3$ da curva dada por $y = 2\sqrt{x + 1}$, para $x \geq 1$. Faça um gráfico.

Exercícios

4) Estude a derivabilidade da função $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Encontre a derivada no ponto de abscissa $x = 2$.

5) Encontre a derivada de $f(x) = (x+1)^5$ no ponto $x = 1$.

6) Seja $f(x) = (x+1)^n$, com n inteiro positivo. Mostre que $f'(1) = n2^{n-1}$. (Sugestão: use a fórmula do binômio de Newton).

Seja f uma função derivável. Se f' é derivável, então sua derivada é chamada derivada segunda de f e denotada f''. Se f'' também é derivável, sua derivada é chamada derivada terceira de f e denotada f'''. Se f é n-vezes derivável, a n-ésima derivada é denotada $f^{(n)}(x)$.

7) Mostre que se $f(x) = x^n$, com $n > 0$, então $f^n(x) = n!$.

8) Demonstre que

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg'' \ .$$

9) Demonstre que

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh' \ .$$

Exercícios

10) Encontre a derivada das seguintes funções:

1. $\sec x$
2. x
3. x
4. $x \operatorname{sen} x$
5. $x^2 \cos x + x$
6. $\operatorname{sen} 2x$

11) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ no ponto $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Esboce o gráfico.

12) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ em um ponto $(x_0, \operatorname{sen} x_0)$ arbitrário.

13) Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Calcule $f^{(50)}(x)$.

14) Encontre uma função $F(x)$ cuja derivada é $f(x) = \operatorname{sen} 3x$.

15) Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$$

não é derivável em $x = 0$.

Exercícios

16) Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$$

é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

17) Calcule a derivadas das seguintes funções:

1. $f(x) = \left(x^3 + 2x\right)^3$
2. $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
4. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
5. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$
6. $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$, para $x > 0$
7. $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$
8. $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x^2)$
9. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos(x^2))$
10. $f(x) = \left(x + \operatorname{sen}(x^3 + x)\right)^4$

Exercícios

18) Calcule a derivada dy/dx em cada um dos seguintes casos:

11. $y = \frac{1}{1+u}, \; u = x^2 + 1$
12. $y = \left(u + \frac{1}{u}\right)^3, \; u = x^2 + 1$
13. $y = \operatorname{sen}^2 u, \; u = \cos x$
14. $y = \sqrt{1 - u^2}, \; u = \operatorname{sen} x$

19) Determine a equação da reta tangente à curva de equação $y = (x-1)^{-2}$ no ponto de abscissa $x = 2$.

Seja $h(x) = f(x^2 + x)$. Sabendo que f é derivável em 2 e que $f'(2) = 3$, calcule $h'(1)$.

20) Determine a reta tangente à curva de equação $h(x) = f(g(x))$ no ponto de abscissa $x = 1$, sabendo que g é derivável em $x = 1$, $g(1) = -3$ e $g'(1) = -1$ e que f é derivável em -3 e $f(-3) = 4$ e $f'(-3) = 1/2$.

21) eja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $\mathbb{R}$. Mostre que:

1. Se f é par então f' é ímpar;
2. Se f é ímpar então f' é par;

Observação: uma função f é dita *par* se $f(x) = f(-x)$ para todo x no domínio de f e é dita *ímpar* se $f(x) = -f(-x)$ para todo x no domínio em seu domínio. Por exemplo $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ é uma função par enquanto $f(x) = \cos(x)$ é uma função ímpar.