MA22 - Unidade 10 - Resumo

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

28 de Abril de 2013

SOCIEDADE BRASILEIRA
DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Cálculo de Derivadas

Regras de Derivação Sejam f e g funções definidas em um intervalo aberto I e suponha que sejam deriváveis em $x_0 \in I$.

(a) (Derivada da Soma) A função soma $f + g$ é derivável em x_0 e vale que

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

(b) (Derivada do Produto) A função produto $(fg)(x)$ é derivável em x_0 e vale que

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

(c) (Derivada do Quociente) Se $g(x_0) \neq 0$, então a função produto $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ é derivável em x_0 e vale que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Cálculo de Derivadas

Exemplo Cálculo da derivada da função $2x + 1 + \frac{1}{x}$.
A função $g(x) = \frac{1}{x}$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}^*$ e $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Portanto, $(f + g)(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}^*$ e

$$(f + g)'(x) = (2x + 1)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2 - \frac{1}{x^2}$$

Exemplo Vamos calcular a derivada da função $f(x) = x\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \cdot \sqrt{x} + x \cdot \left(\sqrt{x}\right)' \\ f'(x) &= 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(x) &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}\ . \end{aligned}$$

Cálculo de Derivadas

Exemplo Vamos calcular a derivada da função $f(x) = (x^2 + x)(x^2 - 1)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 + x\right)'(x^2 - 1) + (x^2 + x)\left(x^2 - 1\right)' \\ f'(x) &= (2x + 1)(x^2 - 1) + (x^2 + x)(2x) \\ f'(x) &= 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1. \end{aligned}$$

Exemplo (Quociente)

$$f(x) = \frac{x + a}{x - a}, \quad \text{para } x \neq a. \ \text{Então,}$$

$$f'(x) = \frac{(x + a)'(x - a) - (x + a)(x - a)'}{(x - a)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{(x - a) - (x + a)}{(x - a)^2} = -\frac{2a}{(x - a)^2}$$

Derivada da Potência

Proposição (Derivada da Potência) A função $f(x) = x^n$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ se $n \geq 0$ e derivável para $x \in \mathbb{R}^*$ se $n < 0$. Nos dois casos

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$$

Demonstração Se $n = 0$ o resultado se segue, pois $f(x) = 1$ e $f'(x) = 0$.
Suponha que o resultado vale para $n = k$, ou seja, $f(x) = x^k$ é derivável e $f'(x) = kx^{k-1}$.A regra do produto usada em $g(x) = x^{k+1} = x \cdot x^k$:

$$\left(x^{k+1}\right)' = \left(x \cdot x^k\right)' = x'x^k + x.\left(x^k\right)' = x^k + kxx^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1)x^{k+1} \ ,$$

completa a prova do caso $n > 1$.

Continuação

Suponha agora que $n < 0$. então $n = -m$, com $m > 0$ e

$$x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

Se $x \neq 0$ então, pela derivada do produto, $\frac{1}{x^m}$ é derivável e vale:

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{(1)'(x^m) - 1\,(x^m)'}{(x^m)^2}$$
$$= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1},$$

que completa a prova.

Exemplo Cálculo da derivada da função $f(x) = x^4 + x^3 + x^2$:

$$(x^4 + x^3 + x^2)' = (x^4)' + (x^3)' + (x^2)' = 4x^3 + 3x^2 + 2x.$$

Derivadas das funções trigonométricas

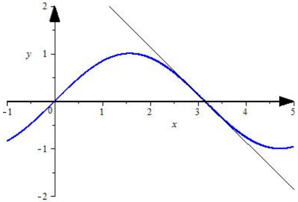
Prposição (Derivada do seno) Se $f(x) = \mathrm{sen} x$ então $f'(x) = \cos x$.

Exemplo Cálculo da equação da reta tangente ao gráfico de $y = \mathrm{sen} x$ no ponto $(\pi, 0)$.

A inclinação da reta tangente é $f'(\pi) = \cos(\pi) = -1$. Logo, a reta tangente tem equação $y = -x + b$. Como passa pelo ponto $(\pi, 0)$, temos:

$$0 = -\pi + b \implies b = \pi\,.$$

Assim, a equação da reta é $y = -x + \pi$.



Derivadas das funções trigonométricas

Prposição (Derivada do cosseno) Se $f(x) = \cos x$ então $f'(x) = -\mathrm{sen} x$.

Exemplo Calculo da equação da reta tangente ao gráfico de $y = \cos x$ no ponto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

A inclinação da reta tangente é $f'(\pi/4) = -\mathrm{sen}(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$. Logo, a reta tangente tem equação $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + b$. Como a reta passa pelo ponto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ temos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\pi}{4} + b \implies b = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Assim, a equação da reta é $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$.

Derivadas das funções trigonométricas

Exemplo Cálculo da derivada de $y = \tan x$.
Temos $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Como $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ são funções deriváveis, então $\tan(x)$ é derivável nos pontos em que $\cos(x) \neq 0 \implies x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in$. Usando a regra do quociente, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

Regra da cadeia

Lembramos que dadas funções f e g, em que a imagem de f está contida no domínio de g, a composta $h = f \circ g$ é definida por:

$$h(x) = f\left(g(x)\right)(x)$$

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f\left(g(x)\right)(x)$$

Por exemplo, $h(x) = \operatorname{sen} x^2$ é a composição da função $g(x) = x^2$ com a função $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$x \xrightarrow{g} \overbrace{x^2}^{g(x)} \xrightarrow{f} \overbrace{\operatorname{sen} x^2}^{f(g(x))}$$

Ainda neste exemplo, sabemos perfeitamente derivar tanto $f(x) = \operatorname{sen} x$ quanto $g(x) = x^2$, mas ainda não sabemos derivar sua composição $h(x) = \operatorname{sen} x^2$.

Regra da cadeia

Teorema (Regra da cadeia) Sejam f e g funções reais tais que a imagem de g está contida no domínio de f. Se g é derivável em x_0 e f é derivável em $g(x_0)$ então $f \circ g$ é derivável em x_0 e

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\left(g(x_0)\right) g'(x_0)$$

Exemplo Cálculo da derivada da função $h(x) = \mathrm{sen} x^2$.
Como $h(x) = \mathrm{sen} x^2 = (f \circ g)(x)$, em que $f(x) = \mathrm{sen} x$ e $g(x) = x^2$. então:

$$h'(x) = f'(g(x)).g'(x) = \cos(g(x)).(2x) = 2x \cos x^2$$

Exemplo

Exemplo Cálculo da derivada da função $h(x) = \left(x^2+1\right)^{100}$.
Como $h(x) = \left(x^2+1\right)^{100} = (f \circ g)(x)$, em que $f(x) = x^{100}$ e $g(x) = x^2+1$. então:

$$h'(x) = f'(g(x)).g'(x) = 100(g(x))^{99}.(2x) = 200x(x^2+1)^{99}$$

Exemplo Cálculo da derivada da função $h(x) = \sqrt{x^2+1}$.
Como $x^2+1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então a imagem de $g(x) = x^2+1$ está contida no domínio de de $f(x) = \sqrt{x}$.
$h(x) = \sqrt{x^2+1}$ é a composição de $f(x) = \sqrt{x}$ com $g(x) = x^2+1$.
Portanto:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = f'(g(x)).g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x^2+1\right)' \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \ . \end{aligned}$$