MA22 - Unidade 9 - Resumo

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

21 de Abril de 2013

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Derivadas

Defincão (Derivada) A derivada de uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo aberto I em um ponto $x_0 \in I$ é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ ,$$

caso este limite exista.
Se o limite existir a função f é dita derivável em x_0.

Exemplo Seja f a função definida por $f(x) = x^2$. Vamos calcular a derivada de f no ponto $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4. \end{aligned}$$

Derivadas

Definção (Função derivada] Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Se f é derivável em cada ponto de seu domínio, dizemos que a função é derivável e que a função $f'\colon I \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in I$ o valor $f'(x)$ é a função derivada de f.

Exemplo Vamos calcular a derivada de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2a + h) \ = \ 2a. \end{aligned}$$

A função $f(x) = x^2$ é derivável e sua função derivada $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f'(x) = 2x$.

Notação

Usa-se também a notação $\frac{dy}{dx}$ para representar a derivada $f'(x)$.
Tanto $f'(x_0)$ quanto $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ representam a derivada da função f no ponto x_0 de seu domínio.

Exemplo A velocidade $v(t)$ de um objeto em movimento é a função derivada da posição $s(t)$ do objeto: $v(t) = s'(t)$.
A velocidade é a taxa de variação instantânea da posição $s(t)$.
A aceleração é a taxa de variação da velocidade.
Se a velocidade é dada por $v(t)$, definimos:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

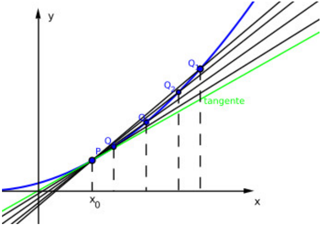
O problema da tangente

O problema da tangente consiste em encontrar a equação da reta tangente a uma curva que é gráfico de uma função $y = f(x)$ em um certo ponto.

O *coeficiente angular* da reta secante à curva passando pelos pontos $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_1, f(x_1))$ é dado por

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Tomando h cada vez mais próximo de zero, obtemos retas secantes que cortam a curva em dois pontos P e Q_i cada vez mais próximos.



O problema da tangente

Quando h se aproxima de zero, se o quociente

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

que representa o coeficiente angular da reta secante que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$, se aproxima de um determinado valor, esse, intuitivamente, deverá ser o coeficiente angular da reta tangente.

Na verdade, o que fazemos é definir reta tangente da curva em $P=(x_0, f(x_0)$ como a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Caso o limite não exista, não há reta tangente no ponto.

O problema da tangente - Exemplo

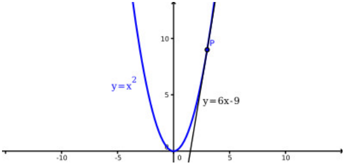
Exemplo Calculo da equação da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto $x = 3$.

Como $\frac{dy}{dx} = 2x$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6$ e a reta tangente tem coeficiente angular $a = 6$. A equação da reta é dada por $y = 6x + b$.

O ponto de tangência $(3, 9)$ pertence à reta e deve satisfazer a equação:

$$9 = 6.3 + b \implies b = 9 - 18 = -9$$

A equação da reta é $y = 6x - 9$.



Exemplo

Exemplo Calculo da derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$ no domínio $x > 0$ e calculo da equação da reta tangente no ponto $P = (1, 1)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \end{aligned}$$

Não podemos substituir $h = 0$ diretamente, pois resultaria na expressão $\frac{0}{0}$. Se multiplicarmos numerador e denominador por $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$, resulta:

Exemplo

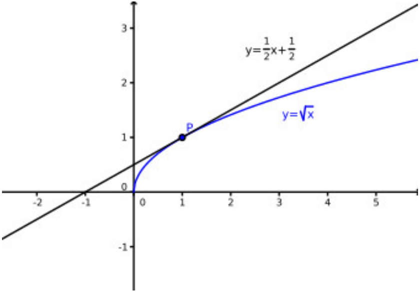
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Basta fazer $h = 0$ na última expressão, pois, como $f(x) = \sqrt{x}$ é uma função contínua, $\lim_{h\to 0} \sqrt{x+h} = \sqrt{x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Exemplo

Para $x = 1$, temos $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$. Assim, a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(1, 1)$ tem coeficiente angular $a = \frac{1}{2}$. É, portanto, uma reta de equação $y = ax + b = \frac{1}{2}x + b$.
Substituindo as coordenadas do ponto $P = (1, 1)$ na equação da reta, calculamos $b = \frac{1}{2}$.



Exemplo

Exemplo Calculo da equação da reta normal ao gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no ponto $P = (2, 1/2)$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\
&= -\lim_{h \to 0} \frac{1}{x^2 + xh} = -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{x} \implies f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Exemplo

A reta tangente contendo $P = (2, 1/2)$ tem coeficiente angular $a = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.
Se duas retas não-verticais são ortogonais e têm coeficientes angulares iguais a m e m' então $m \cdot m' = -1$.

$$m \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \implies m = 4$$

Assim, a reta normal ao gráfico da função no ponto $(2, 1/2)$ é uma reta de equação $y = 4x + b$. Substituido as coordenadas do ponto $P = (2, 1/2)$, obtemos o valor do coeficiente linear $b = -\frac{15}{2}$.
A equação da reta normal é $y = 4x - \frac{15}{2}$.

Continuidade e derivabilidade

Todos os exemplos apresentados até o momento de funções deriváveis em todo seu domínio são de funções contínuas. Mostraremos que este é sempre o caso: toda função derivável é contínua. No entato, mesmo funções contínuas em todo seu domínio podem não ser deriváveis em alguns dos pontos de seu domínio. Há mesmo casos de funções contínuas em toda a reta real e que não são deriváveis em nenhum ponto do seu domínio.
A função $f(x) = |x|$ é contínua, mas não é derivável em $x = 0$.

Teorema Seja f um função definida em um intervalo aberto I. Se f é derivável em $x_0 \in I$ então f é contínua em x_0.