Notas de aula de MQ II

Mecânica quântica relativística

Primeiro semestre de 2019

Em mecânica quântica *não-relativística*, as partículas são descritas pela equação de Schrödinger. Em mecânica quântica *relativística*, partículas de spin 0 são descritas pela **equação de Klein-Gordon**, partículas de spin 1/2 pela **equação de Dirac** e partículas de spin 1 pela **equação de Proca**. Neste capítulo, estudaremos as equações de Klein-Gordon e Dirac.

A equação de Schrödinger pode ser "derivada" escrevendo a relação *clássica* entre a energia e o momento,

$$\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V = E, \tag{1}$$

transformando estas grandezas em operadores quânticos,

$$\boldsymbol{p} \to \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}, \quad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \tag{2}$$

e aplicando o resultado final na função de onda Ψ:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{3}$$

A equação de Klein-Gordon pode ser obtida exatamente da mesma maneira, mas começando com a relação *relativística* entre a energia e o momento: $E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2 = m^2c^4$. Ou, ainda melhor:

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0 \tag{4}$$

(De agora em diante, iremos deixar de lado a energia potencial; trataremos apenas de partículas *livres*.) A transformação para operadores quânticos descrita na equação 2 não requer nenhuma modificação relativística. Ela pode ser escrita como:

$$p_\mu \to i\hbar\partial_\mu, \tag{5}$$

onde[1]

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{6}$$

Em outras palavras:

$$\partial_0 = \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_1 = \tfrac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \tfrac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \tfrac{\partial}{\partial z} \tag{7}$$

Inserindo a equação 5 na equação 4 e fazendo as derivadas atuarem na função de onda Ψ obtemos

$$-\hbar^2\partial^\mu\partial_\mu\Psi - m^2c^2\Psi = 0 \tag{8}$$

Ou também

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \boldsymbol{\nabla}^2\Psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Psi \quad \textbf{Equação de Klein-Gordon} \tag{9}$$

[1] O gradiente com respeito ao quadri-vetor espaço-tempo *contravariante* x^μ é um quadri-vetor *covariante* e é por tal razão que o índice foi colocado embaixo. A equação 5 pode ser escrita como $(E/c, \boldsymbol{p}) \to i\hbar\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right)$. Obviamente, $\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$.

Aparentemente, Schrödinger havia descoberto esta equação mesmo antes da equação não-relativística que leva seu nome. No entanto, ela foi eventualmente rejeitada devido ao fato de que ela era incompatível com a interpretação estatística de Ψ que diz que $|\Psi|^2$ está relacionado com a probabilidade de encontrar uma partícula no ponto (x, y, z). A razão para esta dificuldade está relacionada com o fato de que a equação de Klein-Gordon é uma equação de segunda ordem em t.[2] Assim, Dirac saiu em busca de uma equação consistente com a fórmula relativística da relação energia-momento mas que fosse de primeira ordem no tempo. Ironicamente, em 1934, Pauli e Weisskopf mostraram que na verdade a interpretação estatística da função de onda, em mecânica quântica relativística, não é verdadeira. .[3] Com isso, a equação de Klein-Gordon foi restituída para o seu devido lugar deixando a equação de Dirac para partículas de spin 1/2.

A estratégia básica do Dirac foi "fatorar" a relação energia-momento (4). Isso seria trivial se tivéssemos apenas p^0 (ou seja, se $\boldsymbol{p} = 0$):

$$(p^0)^2 - m^2c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0 \tag{10}$$

Obtemos então duas equações de primeira ordem:

$$(p^0 - mc) = 0 \quad \text{ou} \quad (p^0 + mc) = 0, \tag{11}$$

e ambas garantem que $p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0$. No entanto, o assunto é outro quando as outras três componentes de p^μ são incluídas. Neste caso, estamos procurando uma relação do tipo:

$$(p^\mu p_\mu - m^2c^2) = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) \tag{12}$$

onde β^κ e γ^λ corresponde a oito coeficientes a serem determinados.[4] Expandindo o termo a direita temos

$$(\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = \beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc(\beta^\kappa - \gamma^\kappa)p_\kappa - m^2c^2$$

Obviamente, não estamos interessados em termos lineares em p_κ e portanto temos que escolher os coeficientes tal que $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$. Por fim, é necessário achar γ^κ tal que

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda,$$

[2] Note que a equação de Schrödinger (3) é uma equação de *primeira* ordem em t.

[3] O ponto chave é que a teoria relativística tem que ser capaz de descrever a criação de pares e a aniquilação e, portanto, o número de partículas não é uma quantidade conservada.

[4] Caso a notação o confunda, podemos escrever a equação 12 por extenso:

$$(p^0)^2-(p^1)^2-(p^2)^2-(p^3)^2-m^2c^2 = (\beta^0p^0-\beta^1p^1-\beta^2p^2-\beta^3p^3+mc)(\gamma^0p^0-\gamma^1p^1-\gamma^2p^2-\gamma^3p^3-mc)$$

o que, em outras palavras, significa dizer que:

$$\begin{aligned}(p^0)^2-(p^1)^2-(p^2)^2-(p^3)^2= \quad & (\gamma^0)^2(p^0)^2+(\gamma^1)^2(p^1)^2+(\gamma^2)^2(p^2)^2+(\gamma^3)^2(p^3)^2 \\ & +(\gamma^0\gamma^1+\gamma^1\gamma^0)p_0p_1+(\gamma^0\gamma^2+\gamma^2\gamma^0)p_0p_2 \\ & +(\gamma^0\gamma^3+\gamma^3\gamma^0)p_0p_3+(\gamma^1\gamma^2+\gamma^2\gamma^1)p_1p_2 \\ & +(\gamma^1\gamma^3+\gamma^3\gamma^1)p_1p_3+(\gamma^2\gamma^3+\gamma^3\gamma^2)p_2p_3\end{aligned} \tag{13}$$

Note o problema: poderíamos escolher $\gamma^0=1$ e $\gamma^1=\gamma^2=\gamma^3=i$ mas não há como se livrar dos "termos cruzados". Neste ponto, Dirac teve uma brilhante inspiração: e se os $\gamma's$ forem matrizes ao invés de simplesmente números? Como matrizes não comutam, talvez sejamos capazes de achar um conjunto tal que:

$$\begin{gathered}(\gamma^0)^2=1 \quad (\gamma^1)^2=(\gamma^2)^2=(\gamma^3)^2=-1 \\ \gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=0 \quad \text{para } \nu\neq\nu\end{gathered} \tag{14}$$

Ou, de forma mais sucinta:

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}, \tag{15}$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e as chaves denotam o *anti-comutador*:

$$\{A,B\}=AB+BA \tag{16}$$

Você pode tentar resolver este problema por conta própria. Ele de fato pode ser resolvido mas, no entanto, as menores matrizes que funcionam são matrizes 4×4. Existem uma série de conjuntos equivalentes de "matrizes gamma" que funcionam. Usaremos o conjunto padrão da "convenção de Bjorken e Drell":

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \gamma^i=\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix} \tag{17}$$

onde $\sigma^i(i=1,2,3)$ são as matrizes de Pauli. O número 1 nestas matrizes denota uma matriz 2×2 unitária ao passo que o número 0 denota uma matriz 2×2 de zeros.[5] Na forma de uma equação matricial 4×4, a relação energia-momento *de fato* se fatora:

$$(p^\mu p_\mu-m^2c^2)=(\gamma^\kappa p_\kappa+mc)(\gamma^\lambda p_\lambda-mc)=0 \tag{18}$$

Obtemos então a equação de Dirac, escolhendo um dos termos (não importa qual seja, mas convenciona-se assim):

$$\gamma^\mu p_\mu-mc=0 \tag{19}$$

[5]Quando não houver ambiguidade, usarei 1 e 0 desta maneira para denotar matrizes 2×2 *e* 4×4.

Fazendo então a substituição usual $p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$ e atuando o resultado em uma função de onda Ψ chegamos a:

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - mc\Psi = 0 \quad \textbf{Equação de Dirac} \tag{20}$$

Note que agora Ψ é uma matriz coluna com quatro elementos:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Esta função é chamada de um "bi-spinor" ou um "'spinor de Dirac". (Apesar de possuir quatro componentes, Ψ não é um quadri-vetor. Ela de fato transforma quando mudamos de um sistema inercial para o outro mas não pela transformação de Lorentz usual.)