11.5 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3}{n+4}$. $b_n = \frac{3}{n+4} > 0$ e $b_{n+1} < b_n$ para todo n; $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, então a série converge pelo Teste da Série Alternada.

2. $-5+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5}{3n+2}$. $b_n = \frac{5}{3n+2}$ é decrescente e positivo para todo n, e $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{3n+2} = 0$, então a série converge pelo Teste da Série Alternada.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$, logo $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ não existe, de modo que a série diverge pelo Teste para Divergência.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$. $b_n = \frac{1}{n^2} > 0$ e $b_{n+1} < b_n$ para todo n, e $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$, então a série converge pelo Teste da Série Alternada.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$. $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ é positiva e decrescente e $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}} = 0$, logo a série converge pelo Teste da Série Alternada.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5n+1}$. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n+1} = \frac{1}{5}$, logo $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5n+1}$ não existe, de modo que a série diverge pelo Teste para Divergência.

7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$. $b_n = \frac{1}{n\ln n}$ é positiva e decrescente para $n \geq 2$, e $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n} = 0$, logo a série converge pelo Teste de Série Alternada.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2+1}$. $b_n = \frac{n}{n^2+1} > 0$ para todo n.

$b_{n+1} < b_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow$

$(n+1)\left(n^2+1\right) < \left[(n+1)^2+1\right]n \Leftrightarrow$

$n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \Leftrightarrow$

$0 < n^2+n-1$, que é verdadeiro para $n \geq 1$. Também $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+1/n^2} = 0$. Sendo assim, a série converge pelo Teste da Série Alternada.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2}{n^2+1}$. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1$, logo $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^2+1}$ não existe. Desse modo, a série diverge pelo Teste para Divergência.

10. $a_n = (-1)^n\frac{2n}{4n+1}$, logo $|a_n| = \frac{2n}{4n+1} \to \frac{1}{2}$ quando $n\to\infty$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (de fato, o limite não existe) e a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{4n+1}$ diverge pelo Teste para Divergência.

11. $a_n = (-1)^{n-1}\frac{2n^2}{4n^2+1}$, logo $|a_n| = \frac{2n^2}{4n^2+1} \to \frac{1}{2}$ quando $n\to\infty$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (de fato, o limite não existe) e a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n^2}{4n^2+1}$ diverge pelo Teste para Divergência.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+4}$. $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n+4} > 0$ para todo n. Seja $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$. Portanto $f'(x) = \frac{4-x}{2\sqrt{x}\,(x+4)^2} < 0$ se $x > 4$, logo $\{b_n\}$ é decrescente após $n = 4$. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+4/\sqrt{n}} = 0$. Então a série converge pelo Teste da Série Alternada.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$. $b_n = \frac{n}{2^n} > 0$ e $b_n \geq b_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{2^n} \geq \frac{n+1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1$, que certamente é verdadeiro. $\lim_{n\to\infty}(n/2^n) = 0$ pela Regra de l'Hôspital, logo a série converge pelo Teste da Série Alternada.

14. $\frac{1}{\sqrt[3]{\ln n}}$ decresce e $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\ln n}} = 0$, logo, pelo Teste da Série Alternada, a série converge.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$. $b_5 = \frac{1}{(2\cdot 5-1)!} = \frac{1}{362\,880} < 0{,}00001$, então $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \approx \sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \approx 0{,}8415$.

16. $b_4 = \frac{1}{(2\cdot 4)!} = \frac{1}{40\,320} \approx 0{,}000025$ e $s_3 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{720} \approx 0{,}54028$, logo, correta até a quarta casa decimal, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!} \approx 0{,}5403$.

17. $b_6 = \dfrac{1}{2^6\,6!} = \dfrac{1}{46\,080} \approx 0{,}000022 < 0{,}0001$, logo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \approx \sum_{n=0}^{5} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \approx 0{,}6065.$$

18. $b_8 = 1/8^6 \approx 0{,}0000038 < 0{,}00001$ e

$$s_7 = 1 - \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{729} - \tfrac{1}{4096} + \tfrac{1}{15\,625} - \tfrac{1}{46\,656} + \tfrac{1}{117\,649}$$

$\approx 0{,}9855537$ logo,

correta até a quarta casa decimal, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^6} \approx 0{,}98555.$