11.3 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1. $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-1}$.

A função $f(x)=\frac{1}{4x-1}$ é contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$ e, assim, usamos o Teste da Integral.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x-1}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{4x-1}=\lim_{b\to\infty}\left[\tfrac{1}{4}\ln(4x-1)\right]_1^b$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left[\tfrac{1}{4}\ln(4b-1)-\tfrac{1}{4}\ln 3\right]=\infty$$

então a integral imprópria diverge, assim como a série.

2. $\sum_{n=5}^{\infty}\left(1/n^{1,0001}\right)$ é uma série p, $p=1,0001>1$, então converge.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-0,99}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^{0,99}\right)$ que diverge, uma vez que $p=0,99<1$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{n}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}$, que é uma série p, $p=\frac{1}{3}<1$, então diverge.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\sqrt{n}}+\frac{3}{n^3}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, ambas são séries p convergentes porque $\frac{3}{2}>1$ e $3>1$, então $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\sqrt{n}}+\frac{3}{n^3}\right)$ converge pelo Teorema 8 na Seção 11.2.

6. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-4)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ é uma série p, $p=2>1$, então converge.

7. $f(x)=\frac{1}{2x+3}$ é positiva, contínua e decrescente em $[1,\infty)$, então aplicando o Teste da Integral,

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x+3}=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(2x+3)\right]_1^t=\infty\quad\Rightarrow$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$ é divergente.

8. Uma vez que $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ é contínua, positiva e decrescente em $[0,\infty)$, podemos aplicar o Teste da Integral.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+1}dx=\lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{x}-2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right]_1^t$$

[usando a substituição $u=\sqrt{x}+1$, então $dx=2(u-1)\,du$]

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\left[2\sqrt{t}-2\ln\left(\sqrt{t}+1\right)\right]-(2-2\ln 2)\right)$$

Agora $2\sqrt{t}-2\ln\left(\sqrt{t}+1\right)=2\ln\left(\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}+1}\right)$ e então

$\lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{t}-2\ln\left(\sqrt{t}+1\right)\right]=\infty$ (utilizando a Regra de l'Hôspital), então tanto a integral quanto a série original divergem.

9. $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ é positiva, contínua e decrescente em $[2,\infty)$, então aplicando o Teste da Integral,

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\int_2^{\infty}\left(\frac{-1/2}{x+1}+\frac{1/2}{x-1}\right)dx$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2}\right]_2^t=\ln\sqrt{3}\quad\Rightarrow$$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ converge.

10. $f(x)=xe^{-x^2}$ é contínua e positiva em $[1,\infty)$, e uma vez que $f'(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)<0$ para $x>1$, f também é decrescente. Portanto, podemos usar o Teste da Integral:

$$\int_1^{\infty}xe^{-x^2}\,dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^t=0-\left(-\tfrac{1}{2}e^{-1}\right)=\frac{1}{2e}.$$

Uma vez que a integral converge, a série converge.

11. $f(x)=\frac{x}{2^x}$ é positiva e contínua em $[1,\infty)$, e uma vez que

$f'(x)=\frac{1-x\ln 2}{2^x}<0$ quando $x>\frac{1}{\ln 2}\approx 1{,}44$, f é eventualmente decrescente, então podemos aplicar o Teste da Integral. Integrando por partes, temos

$$\int_1^{\infty}\frac{x}{2^x}dx=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{x}{2^x}+\frac{1}{2^x\ln 2}\right]_1^t\right)$$
$$=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{2(\ln 2)^2}$$

uma vez que $\lim_{t\to\infty}\frac{t}{2^t}=0$ pela Regra de l'Hôspital, e então $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ converge.

12. $f(x)=\frac{1}{4x^2+1}$ é positiva, contínua e decrescente em $[1,\infty)$, então aplicando o Teste da Integral,

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x^2+1}=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{\operatorname{arctg}\,2x}{2}\right]_1^t=\frac{\pi}{4}-\frac{\operatorname{arctg}\,2}{2}<\infty,$$

então a série converge.

13. $f(x)=\frac{\operatorname{arctg}\,x}{1+x^2}$ é contínua e positiva em $[1,\infty)$.

$f'(x)=\frac{1-2x\operatorname{arctg}\,x}{(1+x^2)^2}<0$ para $x>1$ uma vez que $2x\operatorname{arctg}\,x\geq\frac{\pi}{2}>1$ para $x\geq 1$. Então f é decrescente e podemos utilizar o Teste da Integral.

$$\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx=\lim_{t\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}\,x)^2\right]_1^t$$
$$=\frac{(\pi/2)^2}{2}-\frac{(\pi/4)^2}{2}=\frac{3\pi^2}{32}$$

então a série converge.

14. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ é contínua e positiva para $x \geq 2$ e

$f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3} < 0$ para $x \geq 2$, logo f é decrescente.

$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_2^t \text{ (para partes) } \overset{\text{H}}{=} 1.$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ converge pelo

Teste da Integral.

15. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$ é contínua e positiva em $[1, \infty)$, e

$f'(x) = -\dfrac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} < 0$ para $x \geq 1$, logo f

é decrescente e podemos utilizar o Teste da Integral.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{(x+1)^2 + 1}\,dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(x+1)\right]_1^t$$
$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2$$

então a série também converge.