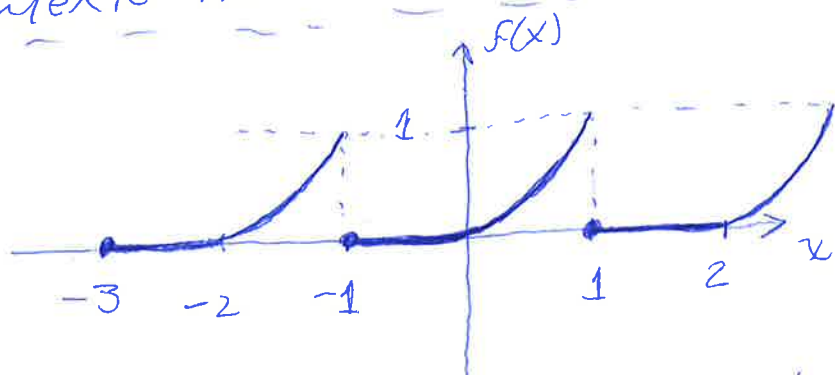


1) Encontre a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad \text{e } f(x+2) = f(x)$$

Esboce os gráficos das três primeiras aproximações para $f(x)$ seguindo a série de Fourier encontrada anteriormente no intervalo $-1 \leq x \leq 1$.



Neste problema o período é 2. Para usar as fórmulas de Fourier colocamos $2L = 2$ e

período das fórmulas período neste problema

$L = 1$.

Fórmulas de Euler-Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

onde $a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx, \quad m=0, 1, \dots$

e $b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx, \quad m=1, 2, \dots$

- Vamos calcular primeiro a_0

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 0 \cdot dx + \int_0^1 x^2 dx$$

$$a_0 = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{a_0 = 1/3}$$

- Agora a_m , $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(m \frac{\pi}{L} x\right) dx$$

$$a_m = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{1} x\right) dx = \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^1 x^2 \cos(m\pi x) dx$$

$$a_m = \int_0^1 x^2 \cos(m\pi x) dx$$

Usando integração por partes: $\int u dv = uv - \int v du$

$$u = x^2 \quad dv = \cos(m\pi x) dx$$

$$du = 2x dx \quad v = \frac{1}{m\pi} \sin(m\pi x)$$

$$a_m = \frac{x^2}{m\pi} \sin(m\pi x) \Big|_0^1 - \frac{2}{m\pi} \int_0^1 x \sin(m\pi x) dx$$

zero para todo m
 $\sin(m\pi) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$a_m = -\frac{2}{m\pi} \int_0^1 x \sin(m\pi x) dx$$

Usando integração por partes mais uma vez

(3)

$$u = x \quad dv = \sin(m\pi x) dx$$

$$du = dx \quad v = -\frac{1}{m\pi} \cos(m\pi x)$$

$$a_m = \frac{-2}{m\pi} \left[-\frac{x}{m\pi} \cos(m\pi x) \Big|_0^1 - \frac{(-1)}{m\pi} \int_0^1 \cos(m\pi x) dx \right]$$

$$a_m = \frac{-2}{m\pi} \left[-\frac{1}{m\pi} \cos(m\pi) + 0 \right] - \frac{2}{(m\pi)^2} \int_0^1 \cos(m\pi x) dx$$

$$a_m = \frac{2}{(m\pi)^2} \left[(-1)^m - \int_0^1 \cos(m\pi x) dx \right]$$

$$a_m = \frac{2}{(m\pi)^2} \left[(-1)^m - \frac{1}{m\pi} \sin(m\pi x) \Big|_0^1 \right]$$

$$a_m = \frac{2}{(m\pi)^2} (-1)^m$$

- Vamos encontrar agora b_m , $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(m\frac{\pi}{L}x\right) dx$$

$$b_m = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin\left(m\frac{\pi}{1}x\right) dx = \int_{-1}^0 0 \cdot \sin(m\pi x) dx + \int_0^1 x^2 \sin(m\pi x) dx$$

$$b_m = \int_0^1 x^2 \sin(m\pi x) dx$$

Integrando duas vezes por partes

$$u = x^2 \quad dv = \sin(m\pi x) dx$$

$$du = 2x dx \quad v = -\frac{1}{m\pi} \cos(m\pi x)$$

$$b_m = \frac{-x^2}{m\pi} \cos(m\pi x) \Big|_0^1 + \frac{2}{m\pi} \int_0^1 x \cos(m\pi x) dx \quad (4)$$

$$b_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m\pi} + \frac{2}{m\pi} \int_0^1 x \cos(m\pi x) dx$$

$$u = x \quad dv = \cos(m\pi x) dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{1}{m\pi} \sin(m\pi x)$$

$$b_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m\pi} + \frac{2}{m\pi} \left[\frac{x}{m\pi} \sin(m\pi x) \Big|_0^1 - \frac{1}{m\pi} \int_0^1 \sin(m\pi x) dx \right]$$

$$b_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m\pi} - \frac{2}{(m\pi)^2} \frac{(-1) \cos(m\pi x)}{m\pi} \Big|_0^1$$

$$b_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m\pi} + \frac{2}{(m\pi)^3} \cos(m\pi x) \Big|_0^1$$

$$b_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m\pi} + \frac{2}{(m\pi)^3} \left[(-1)^m - 1 \right]$$

- Se m é ímpar

$$b_m = \frac{1}{m\pi} + \frac{2}{(m\pi)^3} \left[\overbrace{-1-1}^{-2} \right]$$

$$b_m = \frac{1}{m\pi} - \frac{4}{(m\pi)^3} = \frac{1}{m\pi} \left[1 - \frac{4}{m^2\pi^2} \right] = \frac{m^2\pi^2 - 4}{m^3\pi^3}$$

- Se m é par

$$b_m = \frac{-1}{m\pi}$$

Regresando as fórmulas de Euler-Fourier

(5)

$$f(x) = \frac{1/3}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{m^2\pi^2} \cos(m\pi x) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{m+1}}{m\pi} + \frac{2}{m^3\pi^3} ((-1)^m - 1) \right] \sin(m\pi x)$$

Solução

Pode ser separada em duas somatórias

Se m par $\Rightarrow m=2n$ e

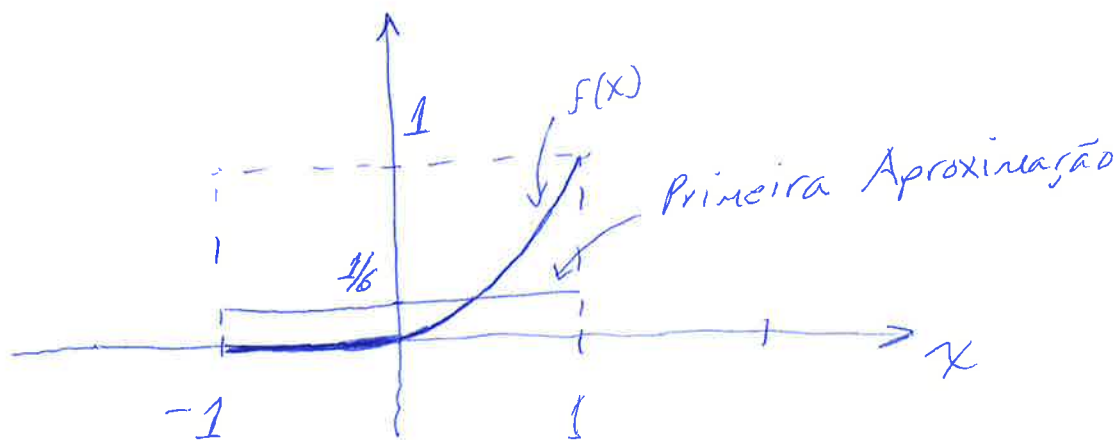
Se m ímpar $\Rightarrow m=2n-1$

$$f(x) = \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cos(m\pi x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)\pi} - \frac{4}{(2n-1)^3\pi^3} \right] \sin((2n-1)\pi x)$$

Primeira Aproximação

$$f(x) \approx \frac{1}{6}$$

Descarto todas as somatórias. Considero somente o termo correspondente a $[a_0]$



Segunda Aproximação

Levo as somatórias até $m=1$

$$f(x) \approx \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2} (-1) \cos(\pi x) + \left[\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi^3} (-2) \right] \sin(\pi x)$$

$$f(x) \approx \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi x) + \left(\frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \right) \sin(\pi x)$$

6

Terceira Aproximação

Levo as Soma-tó-rias até $m=2$

$$f(x) \approx \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi x) + \left(\frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \right) \sin(\pi x) + \frac{2}{4\pi^2} \cos(2\pi x) +$$
$$+ \left[\frac{(-1)}{2\pi} + \frac{2}{8\pi^3} [0] \right] \sin(2\pi x)$$

$$f(x) \approx \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \cos(\pi x) + \left(\frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \right) \sin(\pi x) + \frac{1}{2\pi^2} \cos(2\pi x) - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x)$$

Na próxima página aparecem os gráficos
feitos com o software Mathematica

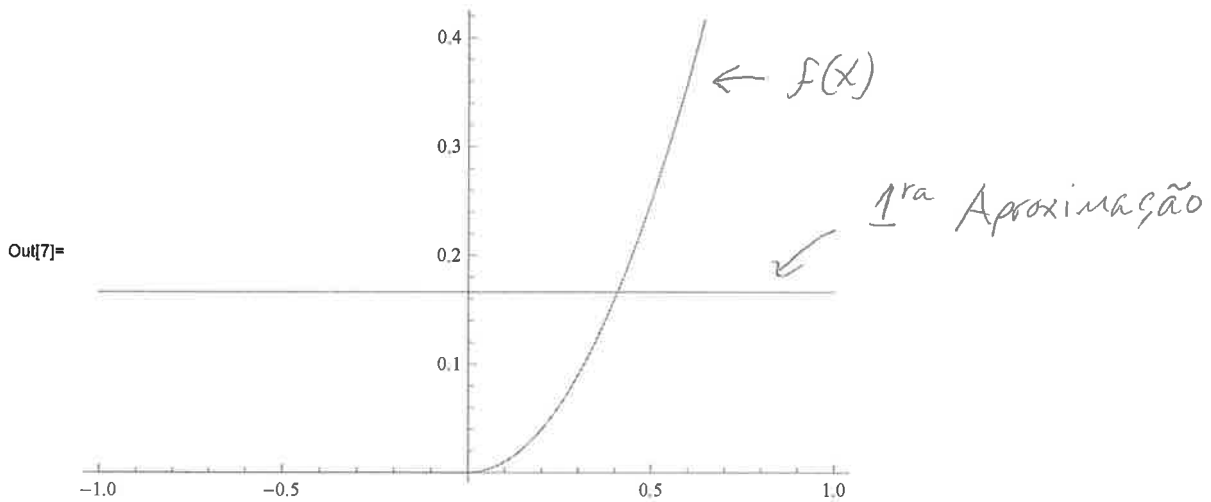
$$\text{In}[1]:= \int_0^1 x^2 \cos[m \pi x] dx$$

$$\text{Out}[1]= \frac{2 m \pi \cos[m \pi] + (-2 + m^2 \pi^2) \sin[m \pi]}{m^3 \pi^3}$$

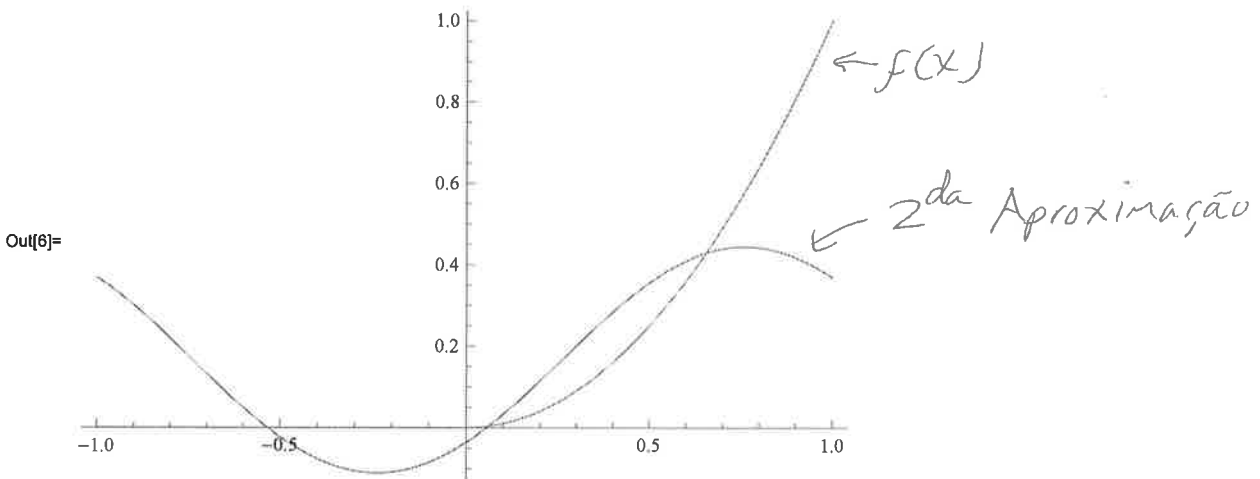
$$\text{In}[3]:= \int_0^1 x^2 \sin[m \pi x] dx$$

$$\text{Out}[3]= \frac{-2 + (2 - m^2 \pi^2) \cos[m \pi] + 2 m \pi \sin[m \pi]}{m^3 \pi^3}$$

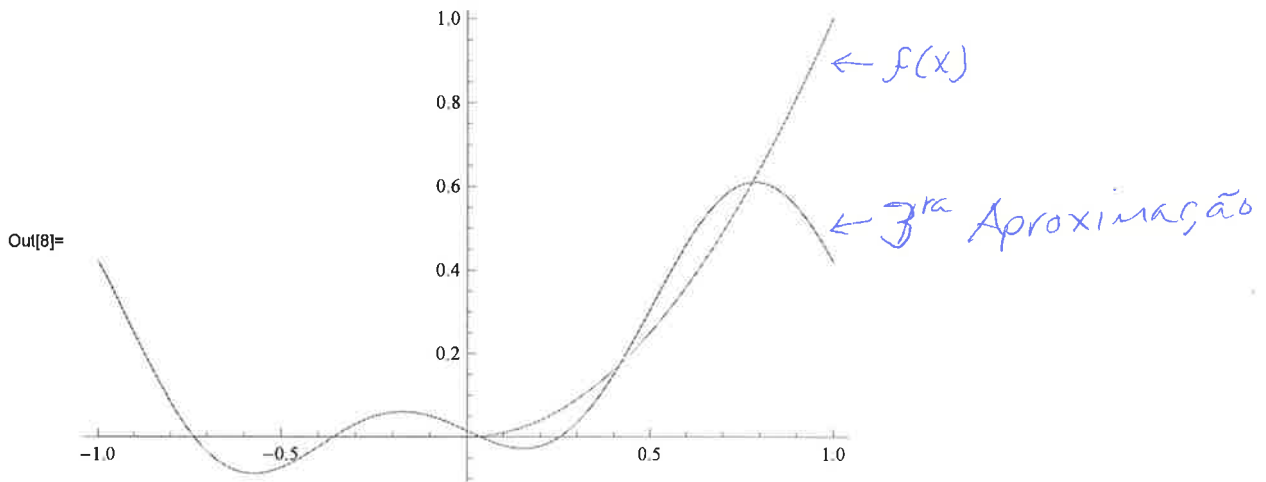
$$\text{In}[7]:= \text{Plot}\left[\left\{\frac{1}{6}, \text{If}[-1 < x < 0, 0, x^2]\right\}, \{x, -1, 1\}\right]$$



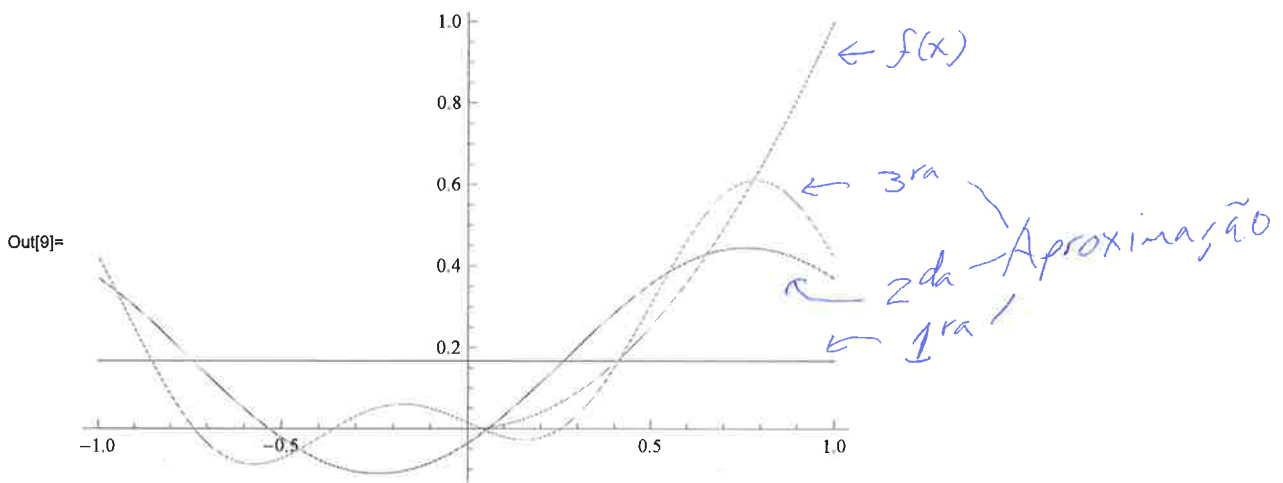
$$\text{In}[6]:= \text{Plot}\left[\left\{\frac{1}{6} - \left(\frac{2}{\pi^2}\right) \cos[\pi x] + \left(\frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}\right) \sin[\pi x], \text{If}[-1 < x < 0, 0, x^2]\right\}, \{x, -1, 1\}\right]$$



```
In[8]:= Plot[{(1/6) - (2/π²) Cos[π x] + ((π² - 4)/π³) Sin[π x] +
  (1/(2 π²)) Cos[2 π x] - (1/(2 π)) Sin[2 π x], If[-1 < x < 0, 0, x²]}, {x, -1, 1}]
```



```
In[9]:= Plot[{1/6, (1/6) - (2/π²) Cos[π x] + ((π² - 4)/π³) Sin[π x],
  (1/6) - (2/π²) Cos[π x] + ((π² - 4)/π³) Sin[π x] + (1/(2 π²)) Cos[2 π x] -
  (1/(2 π)) Sin[2 π x], If[-1 < x < 0, 0, x²]}, {x, -1, 1}]
```

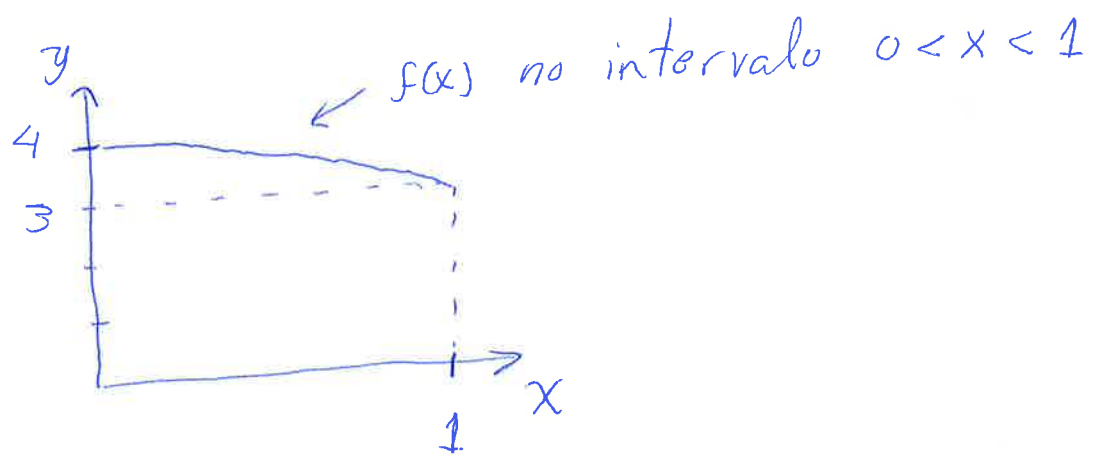
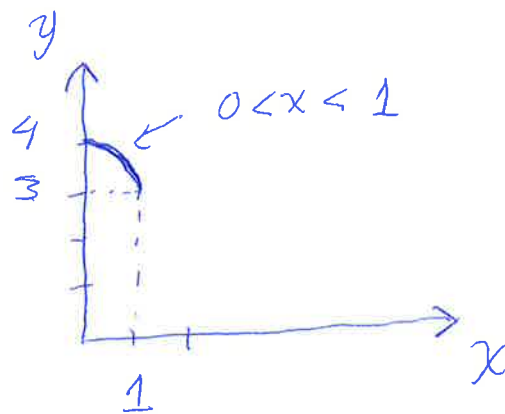
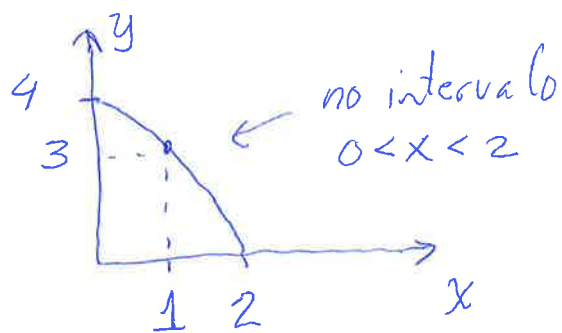


2) Faça uma extensão periódica ímpar da função $f(x) = 4 - x^2$ se $0 < x < 1$. Encontre a série de Fourier da extensão anterior. Esboce os gráficos das três primeiras aproximações no intervalo $-2 \leq x \leq 2$. (4)

Solução: $f(x) = 4 - x^2$ é uma parábola

Se $x=0 \rightarrow y=f(x)=4$ Se $x=1 \rightarrow y=3$

Se $x=-2$ e $x=2 \rightarrow y=0$



Se $f(x)$ é dada no intervalo $(0, L)$ sua extensão periódica ímpar é

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x < L \\ 0 & \text{se } x=0 \text{ e } x=L \\ -f(-x) & \text{se } -L < x < 0 \end{cases}$$

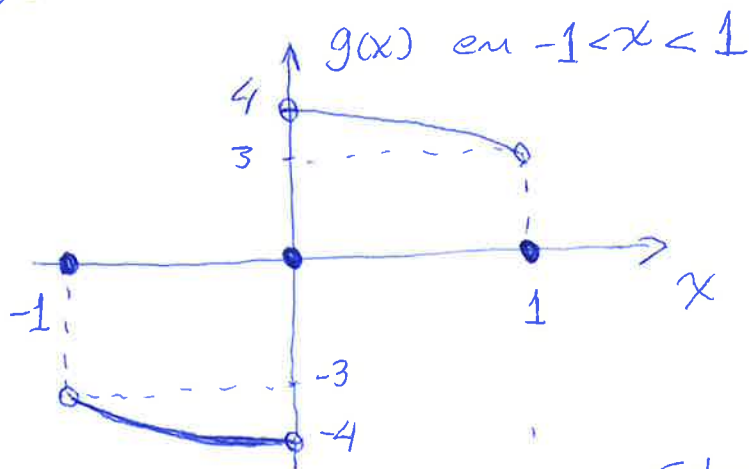
$g(x+2L) = g(x)$

Teoria

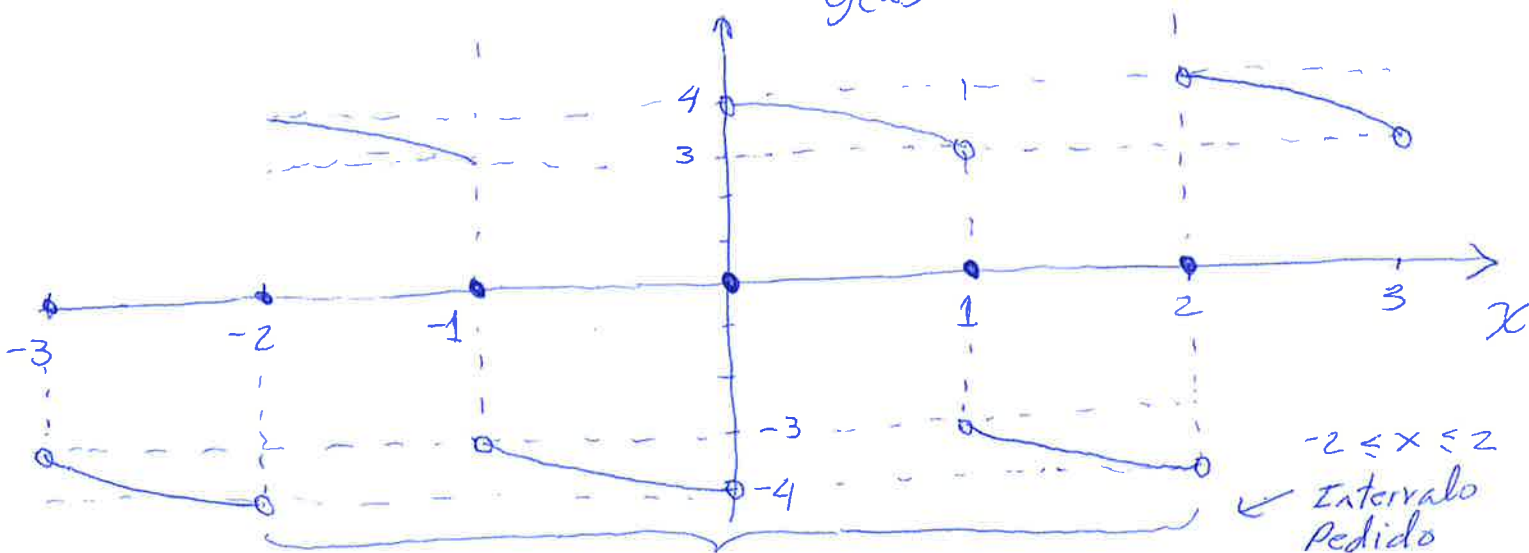
No nosso caso $L=1$ e

$$g(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x=0 \text{ e } x=1 \\ -4+x^2 & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

e $g(x+2) = g(x)$



$g(x) \leftarrow$ Extensão Periódica Ímpar



A série de Fourier de uma extensão periódica ímpar é (3)

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \text{ e}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx$$

Teoria
Somente
Aparecem os
coeficientes das
funções senos (ímpares)

No nosso caso $L=1$ e $g(x)=f(x)$
quando $0 < x < 1$.

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 (4-x^2) \sin(n\pi x) dx$$

$$b_n = 2 \int_0^1 4 \sin(n\pi x) dx - 2 \int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx$$

$$b_n = \frac{-8}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx$$

mesma integral do problema 1

$$b_n = \frac{-8}{n\pi} [(-1)^n - 1] - \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{4}{(n\pi)^3} [(-1)^n - 1]$$

Se n é par

$$b_n = \frac{-2(-1)^{n+1}}{n\pi} = \frac{-2}{n\pi}$$

Se n é ímpar

$$b_n = \frac{16}{n\pi} - \frac{2}{n\pi} + \frac{8}{(n\pi)^3} = \frac{14}{n\pi} + \frac{8}{(n\pi)^3}$$

$$b_n = \frac{14n^2\pi^2 + 8}{n^3\pi^3}$$

Podemos separar em duas séries

(4)

Se n é par $\rightarrow n = 2i$, $n=2, \dots \rightarrow i=1, \dots$

Se n é ímpar $\rightarrow n = 2i-1$, $n=1, \dots \rightarrow i=1, \dots$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{14(2i-1)^2 \pi^2 + 8}{(2i-1)^3 \pi^3} \sin((2i-1)\pi x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-2}{2i\pi} \sin(2i\pi x) - \frac{1}{i\pi}$$

← Solução

i [não] é o símbolo de número imaginário

Até
Primeira Aproximação ($n=1$)

$$b_1 = \frac{14\pi^2 + 8}{\pi^3}$$

$$g(x) \approx \left(\frac{14\pi^2 + 8}{\pi^3} \right) \sin(\pi x)$$

Até
Segunda Aproximação ($n=2$)

$$b_2 = \frac{-2}{2\pi} = -\frac{1}{\pi}$$

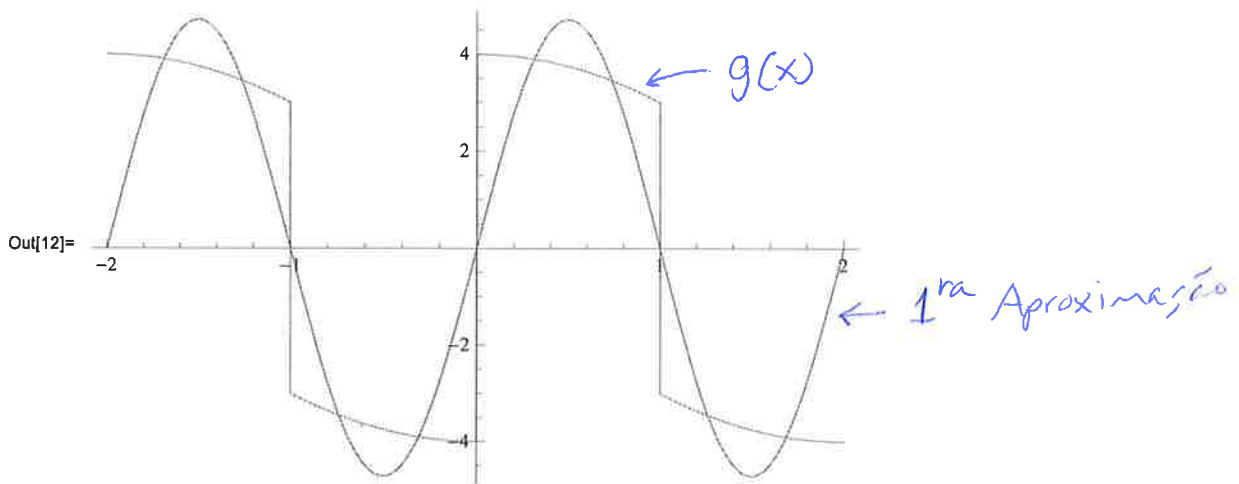
$$g(x) \approx \left(\frac{14\pi^2 + 8}{\pi^3} \right) \sin(\pi x) - \frac{1}{\pi} \sin(2\pi x)$$

Até
Terceira Aproximação ($n=3$)

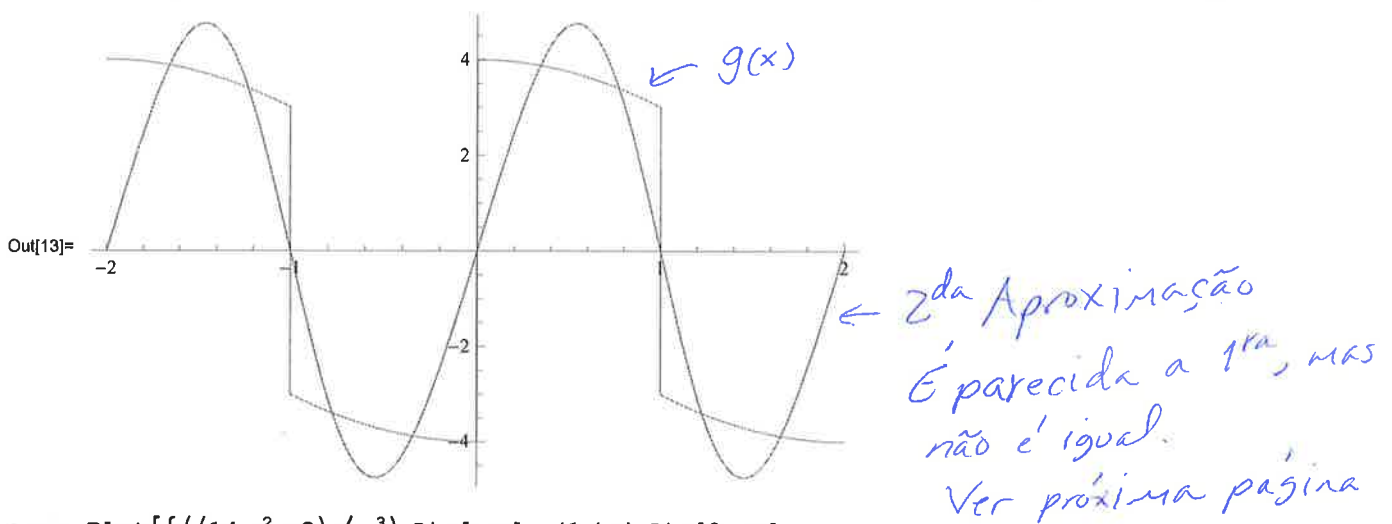
$$b_3 = \frac{14 \cdot 9 \cdot \pi^2 + 8}{27\pi^3} = \frac{126\pi^2 + 8}{27\pi^3}$$

$$g(x) \approx \left(\frac{14\pi^2 + 8}{\pi^3} \right) \sin(\pi x) - \frac{1}{\pi} \sin(2\pi x) + \left(\frac{126\pi^2 + 8}{27\pi^3} \right) \sin(3\pi x)$$

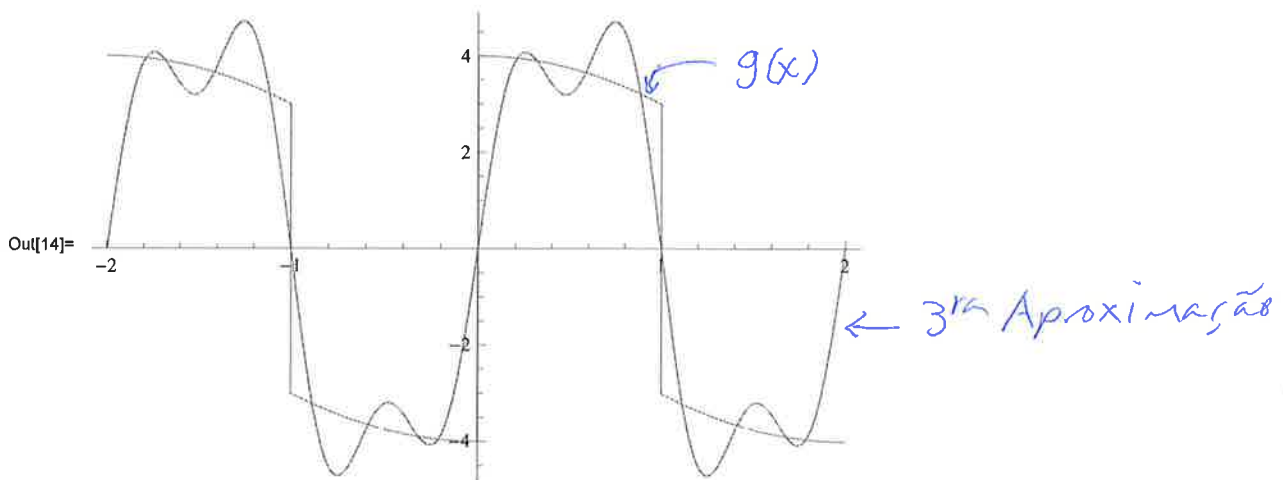
In[12]:= Plot[{{((14 π^2 + 8) / π^3) Sin[πx], If[0 < x < 1, 4 - x²,
If[-1 < x < 0, -4 + x², If[-2 < x < -1, 4 - (x + 2)², -4 + (x - 2)²]]]}], {x, -2, 2}]



In[13]:= Plot[{{((14 π^2 + 8) / π^3) Sin[πx] - (1 / π) Sin[2 πx], If[0 < x < 1, 4 - x²,
If[-1 < x < 0, -4 + x², If[-2 < x < -1, 4 - (x + 2)², -4 + (x - 2)²]]]}], {x, -2, 2}]



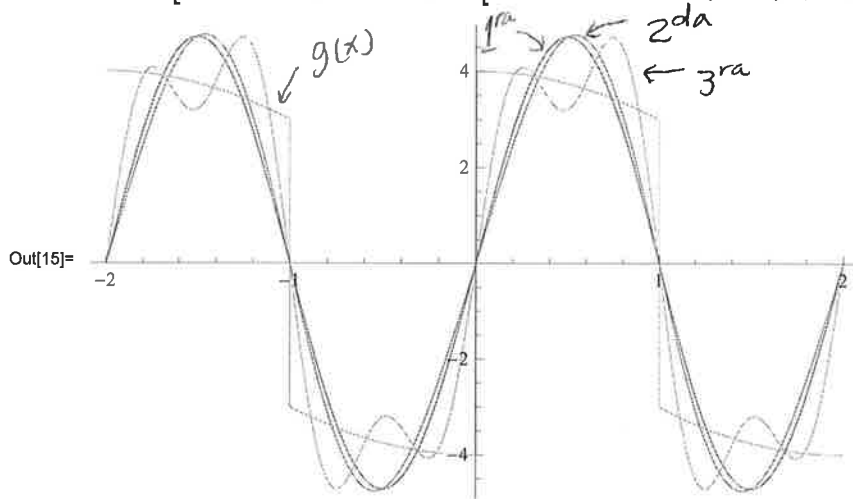
In[14]:= Plot[{{((14 π^2 + 8) / π^3) Sin[πx] - (1 / π) Sin[2 πx] +
((126 π^2 + 8) / (27 π^3)) Sin[3 πx], If[0 < x < 1, 4 - x²,
If[-1 < x < 0, -4 + x², If[-2 < x < -1, 4 - (x + 2)², -4 + (x - 2)²]]]}], {x, -2, 2}]



```

In[15]:= Plot[{((14 π^2 + 8) / π^3) Sin[π x],
  ((14 π^2 + 8) / π^3) Sin[π x] - (1 / π) Sin[2 π x], ((14 π^2 + 8) / π^3) Sin[π x] -
  (1 / π) Sin[2 π x] + ((126 π^2 + 8) / (27 π^3)) Sin[3 π x], If[0 < x < 1, 4 - x^2,
  If[-1 < x < 0, -4 + x^2, If[-2 < x < -1, 4 - (x + 2)^2, -4 + (x - 2)^2]]]}, {x, -2, 2}]

```



3) Encontre os autovalores e autofunções do problema de valores de contorno: ①

$$x^2 y'' - x y' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(L) = 0, \quad L > 1.$$

Solução: A equação diferencial dada é do tipo Cauchy-Euler.

$$x^2 \widehat{y^{(2)}}(x) - x \widehat{y^{(1)}}(x) + \lambda y(x) = 0$$

Ordem da Potência = Ordem da Derivada
em cada somando.

Propomos uma solução do tipo $y(x) = x^m$, onde m é um coeficiente a ser determinado.

$$y(x) = x^m$$

$$y'(x) = m x^{m-1}$$

$$y''(x) = m(m-1) x^{m-2}$$

Colocando a função e suas derivadas na eq. dif.

$$x^2 m(m-1) x^{m-2} - x m x^{m-1} + \lambda x^m = 0$$

$$x^m [m(m-1) - m + \lambda] = 0$$

Vamos supor que $x > 0$.

$$m(m-1) - m + \lambda = 0 \quad \text{Eq. Característica}$$

$$m^2 - 2m + \lambda = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\lambda}}{2}$$

$$m_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{4(1-\lambda)}}{2}$$

$$m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-\lambda}$$

(2)

Teremos três casos dependendo do valor de λ .

① $\lambda < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (Tipo I)

Neste caso $\sqrt{1-\lambda}$ é um número real não nulo e a solução geral da eq. dif. será

$$y_{gh}(x) = C_1 x^{1+\sqrt{1-\lambda}} + C_2 x^{1-\sqrt{1-\lambda}}$$

Para usar a primeira condição de contorno avaliamos a solução encontrada em $x=1$: $y(1)=0$.

$$y(1)=0 = C_1 1^{1+\sqrt{1-\lambda}} + C_2 1^{1-\sqrt{1-\lambda}}$$

$$0 = C_1 + C_2$$

Segunda condição de contorno: $y(L)=0$

$$y(L)=0 = C_1 L^{1+\sqrt{1-\lambda}} + C_2 L^{1-\sqrt{1-\lambda}}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 L^{1+\sqrt{1-\lambda}} + C_2 L^{1-\sqrt{1-\lambda}} = 0 \end{cases} \rightarrow C_1 = -C_2$$

$$-C_2 L^{1+\sqrt{1-\lambda}} + C_2 L^{1-\sqrt{1-\lambda}} = 0$$

$$C_2 [-L^{1+\sqrt{1-\lambda}} + L^{1-\sqrt{1-\lambda}}] = 0$$

$$C_2 L [-L^{\sqrt{1-\lambda}} + L^{-\sqrt{1-\lambda}}] = 0$$

$L \neq 0$ por definição

(3)

$$\text{Se } -L^{\sqrt{1-\lambda}} + L^{-\sqrt{1-\lambda}} = 0$$

$$L^{-\sqrt{1-\lambda}} = L^{\sqrt{1-\lambda}}$$

$$\frac{1}{L^{\sqrt{1-\lambda}}} = L^{\sqrt{1-\lambda}}$$

$$1 = L^{2\sqrt{1-\lambda}}$$

verdadeiro somente se $L=1$

mas $L > 1$ (por definição)

Então, $-L^{\sqrt{1-\lambda}} + L^{-\sqrt{1-\lambda}} \neq 0$ e a única possibilidade restante é que $C_2 = 0$.

Se $C_2 = 0$ então $C_1 = 0$. Isso leva a solução trivial $y(x) = 0 \forall x > 0$.
Neste caso não existem autovalores e autofunções.

② $\lambda = 1$

Neste caso $m_1 = m_2 = 1$. (Tipo II)

$$y_{g.h.}(x) = C_1 x^1 + C_2 x^1 \ln(x)$$

Primeira Condição de Contorno: $y(1) = 0$

$$y(1) = 0 = C_1 \cdot 1^1 + C_2 \cdot 1^1 \cdot \ln(1)$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

Segunda Condição de Contorno: $y(L) = 0$

$$y(L) = 0 = C_2 \cdot L \ln(L)$$

$$L \neq 0, \ln(L) \neq 0 \quad (L > 1)$$

Somente resta considerar $\boxed{C_2 = 0}$

Não teremos autovalores e autofunções neste caso.

Solução Trivial
 $y(x) = 0$
 $\forall x > 0$

③ $\lambda > 1$

Neste caso, $\sqrt{1-\lambda} = \sqrt{-1(\lambda-1)} = \sqrt{i^2(\lambda-1)} = i\sqrt{\lambda-1}$ (Tipo III)
 i é o símbolo de número imaginário. $m_{1,2} = \underset{\alpha}{1} \pm i \underset{\beta}{\sqrt{\lambda-1}}$ $m_{1,2} \in \mathbb{C}$

$$y_{g.h.}(x) = x^{\alpha} \left[C_1 \cos(\beta \ln(x)) + C_2 \sin(\beta \ln(x)) \right]$$

$$y_{g.h.}(x) = x \left[C_1 \cos(\sqrt{\lambda-1} \ln(x)) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda-1} \ln(x)) \right]$$

Primeira condição de contorno: $y(1) = 0$

$$y(1) = 0 = 1 \left[\underbrace{C_1 \cos(\underbrace{\sqrt{\lambda-1} \ln(1)}_0)}_1 + C_2 \underbrace{\sin(\underbrace{\sqrt{\lambda-1} \ln(1)}_0)}_0 \right]$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

Segunda condição de contorno: $y(L) = 0$

$$y(L) = 0 = L \left[C_2 \sin(\sqrt{\lambda-1} \ln(L)) \right]$$

Para que $C_2 \neq 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda-1} \ln(L)) = 0$

$$\sqrt{\lambda-1} \ln(L) = n\pi, \quad n = \overset{\text{ex}}{\cancel{0}}, 1, \dots$$

$n \in \mathbb{N}$

Se $n=0 \Rightarrow \lambda=1$ (neste caso)
 $\lambda > 1$

$$\sqrt{\lambda-1} = \frac{n\pi}{\ln(L)}$$

$$\lambda-1 = \left[\frac{n\pi}{\ln(L)} \right]^2$$

Autovalores

$$\boxed{\lambda_n = \left[\frac{n\pi}{\ln(L)} \right]^2 + 1, \quad n=1, 2, \dots, \infty}$$

$n \in \mathbb{N}$

As autofunções associadas são aquelas que acompanham o coeficiente c_2 ($c_2 \neq 0$).

(5)

$$y_n(x) = x \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n - 1} \ln(x))$$

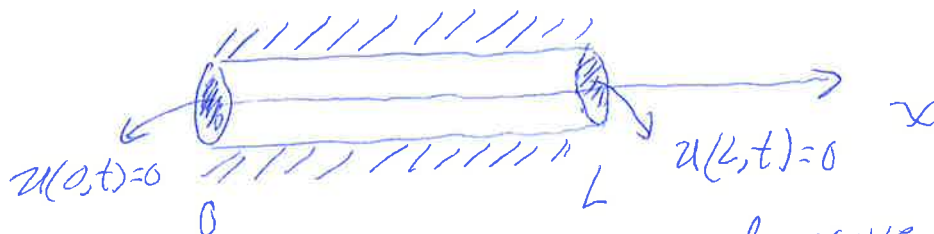
$$y_n(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln(L)} \ln(x)\right) \quad \begin{array}{l} n=1, 2, \dots \\ n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Autofunções

4) Considere a condução do calor em uma barra com 40cm de comprimento cujas extremidades são mantidas à temperatura de 0°C para todo $t > 0$. A superfície lateral da barra está completamente isolada termicamente. Encontre uma expressão para a temperatura $u(x,t)$ quando a distribuição inicial de temperaturas for:

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq 20 \\ 40-x, & \text{se } 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

Solução: $L = 40$ cm comprimento da barra
 $u(0,t) = u(L,t) = 0$ para todo $t > 0$.
 (Condições de contorno em x)
~~Isolada Termicamente~~



O conjunto de equações que descreve este problema é:

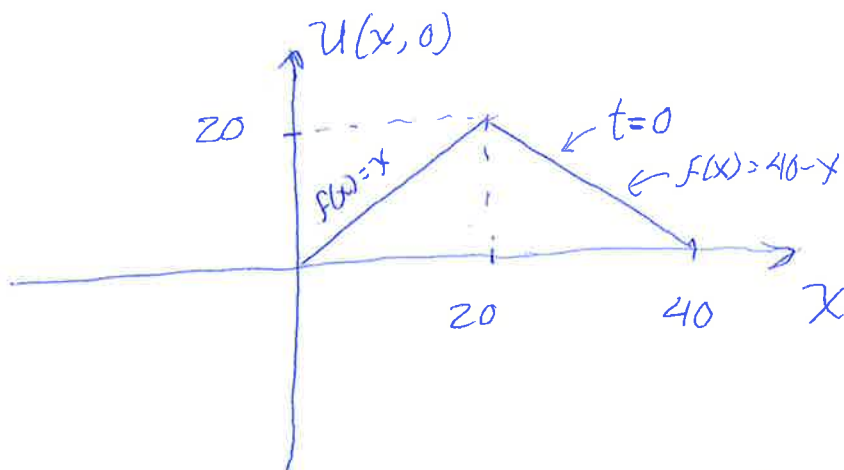
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad t = 0, 0 \leq x \leq L \\ f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 20 \\ 40-x, & 20 \leq x \leq 40 \end{cases} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Eq. Dif. Parcial} \\ \text{de Condução} \\ \text{do Calor} \\ \text{Condições} \\ \text{de Contorno} \\ \text{(em } x\text{)} \\ \text{Condição} \\ \text{Inicial} \\ \text{(em } t\text{)} \end{array}$$

A solução para esse problema foi estudada nas aulas e e (2)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

onde $C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$ $n=1, 2, \dots$
 $n \in \mathbb{N}$

Se $t=0 \Rightarrow u(x,0) = f(x)$



$$C_n = \frac{2}{40} \left[\int_0^{20} x \sin\left(\frac{n\pi}{40} x\right) dx + \int_{20}^{40} (40-x) \sin\left(\frac{n\pi}{40} x\right) dx \right]$$

$$C_n = \frac{1}{20} \left[\int_0^{20} x \sin\left(\frac{n\pi}{40} x\right) dx + 40 \int_{20}^{40} \sin\left(\frac{n\pi}{40} x\right) dx - \int_{20}^{40} x \sin\left(\frac{n\pi}{40} x\right) dx \right]$$

$$\int x \sin\left(\frac{n\pi}{40} x\right) dx = -\frac{40x}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{40} x\right) + \frac{40}{n\pi} \int \cos\left(\frac{n\pi}{40} x\right) dx$$

$$u = x \quad dv = \sin\left(\frac{n\pi}{40} x\right) dx$$

$$du = dx \quad v = -\frac{40}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{40} x\right)$$

$$\int x \sin\left(\frac{n\pi}{40} x\right) dx = -\frac{40x}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{40} x\right) + \left(\frac{40}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{40} x\right) + C$$

$$C_n = \frac{1}{20} \left[\frac{-40 \cdot 20}{n\pi} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{40}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \frac{40^2}{n\pi} \cos\left(n \frac{\pi}{20} x\right) \right]_{20}^{40} +$$

$$+ (-1) \frac{40^2}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{40 \cdot 20}{n\pi} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{40}{n\pi}\right)^2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \Big]$$

Usando a Identidade Trigonométrica

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

$$\text{trocamos } 2\theta \rightarrow \frac{n\pi}{2}$$

$$\theta \rightarrow \frac{n\pi}{4}$$

$$\text{Encontramos que } \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right]$$

E podemos escrever C_n como

$$C_n = \frac{320}{n^2 \pi^2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

e a solução é

$$u(x,t) = \frac{320}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{40}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{40} x\right)$$

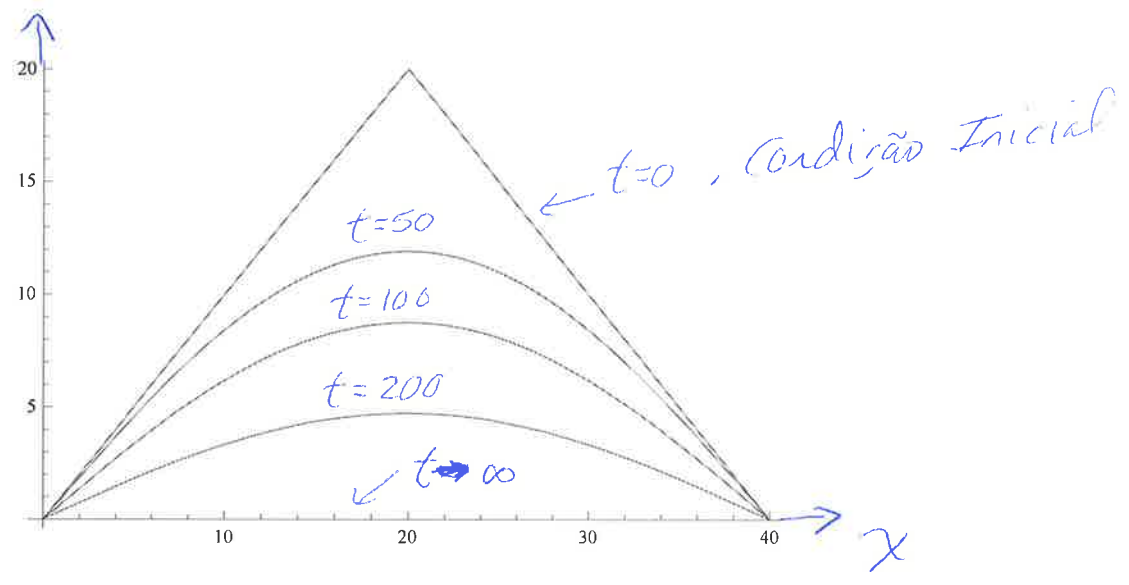
Primeira Aproximação (Somente $n=1$)

$$u(x,t) \approx \frac{320}{\pi^2} \underbrace{\left[\frac{1}{1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 1 \right]}_{1/2} \sin\left(\frac{\pi}{40} x\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{\pi}{40}\right)^2 t}$$

$$u(x,t) \approx \frac{160}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{40} x\right) e^{-\alpha^2 \left(\frac{\pi}{40}\right)^2 t}$$

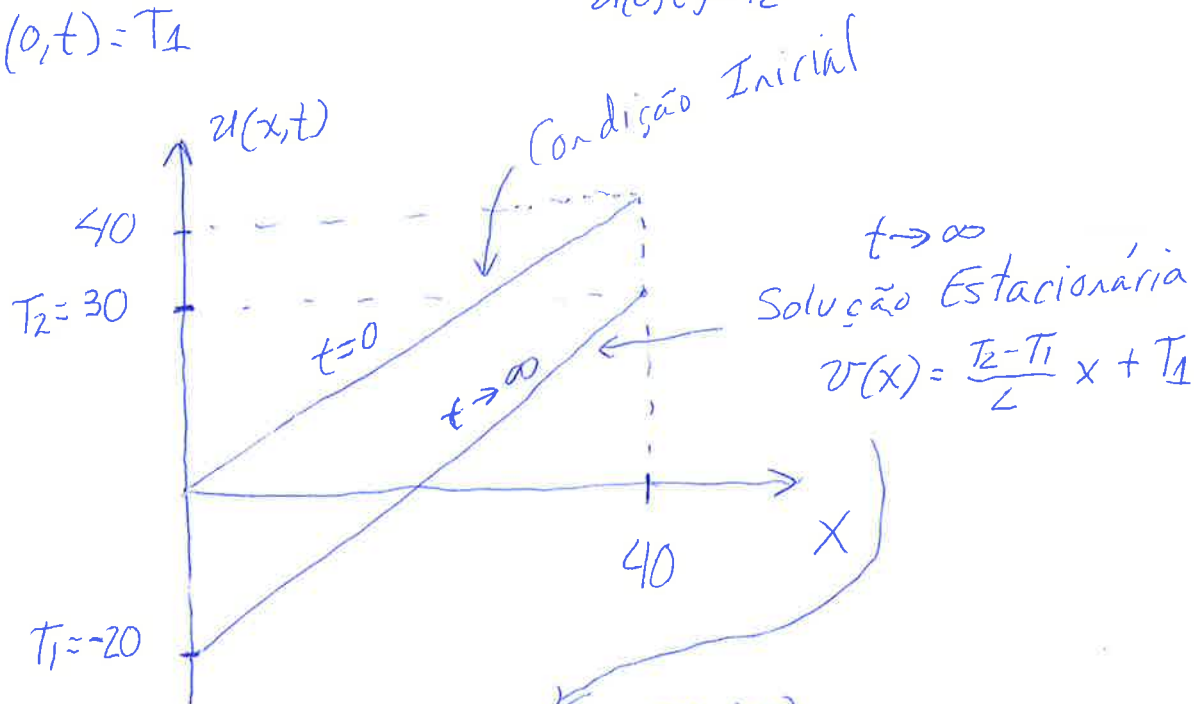
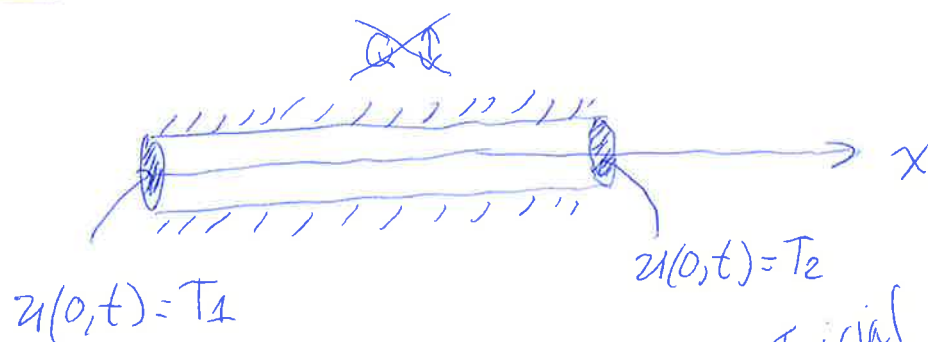
Se colocamos $\alpha=1$ e $t=50, 100, 200$

$u(x,t)$



5) Considere a condução do calor em uma barra com 40 cm de comprimento cujas extremidades são mantidas à temperatura de -20°C e 30°C para todo $t > 0$. A superfície lateral da barra está completamente isolada termicamente. Encontre uma expressão para a temperatura $u(x,t)$ quando a distribuição inicial de temperaturas for $u(x,0) = x$, se $0 \leq x \leq 40$. (1)

Solução: $L = 40$, $T_1 = -20$, $T_2 = 30$



$$v(x) = \frac{30 - (-20)}{40} x + (-20)$$

$$\boxed{v(x) = \frac{5}{4} x - 20} \quad \text{Solução Estacionária}$$

$$u(x,t) = v(x) + \underbrace{w(x,t)}_{\text{Solução Transiente}}$$

Para a função transiente teremos o sistema: (2)

$$\begin{cases} \alpha^2 w_{xx} = w_t & \leftarrow \text{Eq. Dif. de Condução do Calor} \\ w(0,t) = 0 = w(L,t) & \leftarrow \text{Condições de Contorno Homogêneas (em } x) \\ \forall t > 0 \\ w(x,0) = u(x,0) - v(x) & \leftarrow \text{Condição Inicial (em } t) \\ t=0, 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Cuja solução é (veja notas de aula):

$$u(x,t) = v(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$\text{onde } C_n = \frac{2}{L} \int_0^L [u(x,0) - v(x)] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$C_n = \frac{2}{40} \int_0^{40} \left[x - \frac{5}{4}x + 20 \right] \sin\left(\frac{n\pi}{40} x\right) dx$$

$$C_n = \frac{1}{20} \int_0^{40} \left[-\frac{1}{4}x + 20 \right] \sin\left(\frac{n\pi}{40} x\right) dx$$

$$C_n = - \frac{20(-2n\pi + n\pi(-1)^n)}{n^2\pi^2} = \frac{40}{n\pi} + \frac{20(-1)^n}{n\pi} = \frac{20}{n\pi} [2 - (-1)^n]$$

Se n é ímpar ($n = 2k-1$) $k=1 \rightarrow n=1$

$$C_n = \frac{60n\pi}{n^2\pi^2} = \frac{60}{n\pi} \cdot \boxed{\frac{60}{(2k-1)\pi} = C_k}$$

Se n é par ($n = 2k$) $k=1 \rightarrow n=2$

$$C_n = \frac{20n\pi}{n^2\pi^2} = \frac{20}{n\pi} \cdot \boxed{\frac{20}{k\pi} = C_k}$$

A solução é

$$u(x,t) = \frac{5}{4}x - 20 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{60}{(2k-1)\pi} e^{-\alpha^2 \left(\frac{(2k-1)\pi}{40}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{40} x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{2k\pi} e^{-\alpha^2 \left(\frac{2k\pi}{40}\right)^2 t} \sin\left(\frac{2k\pi}{40} x\right)$$

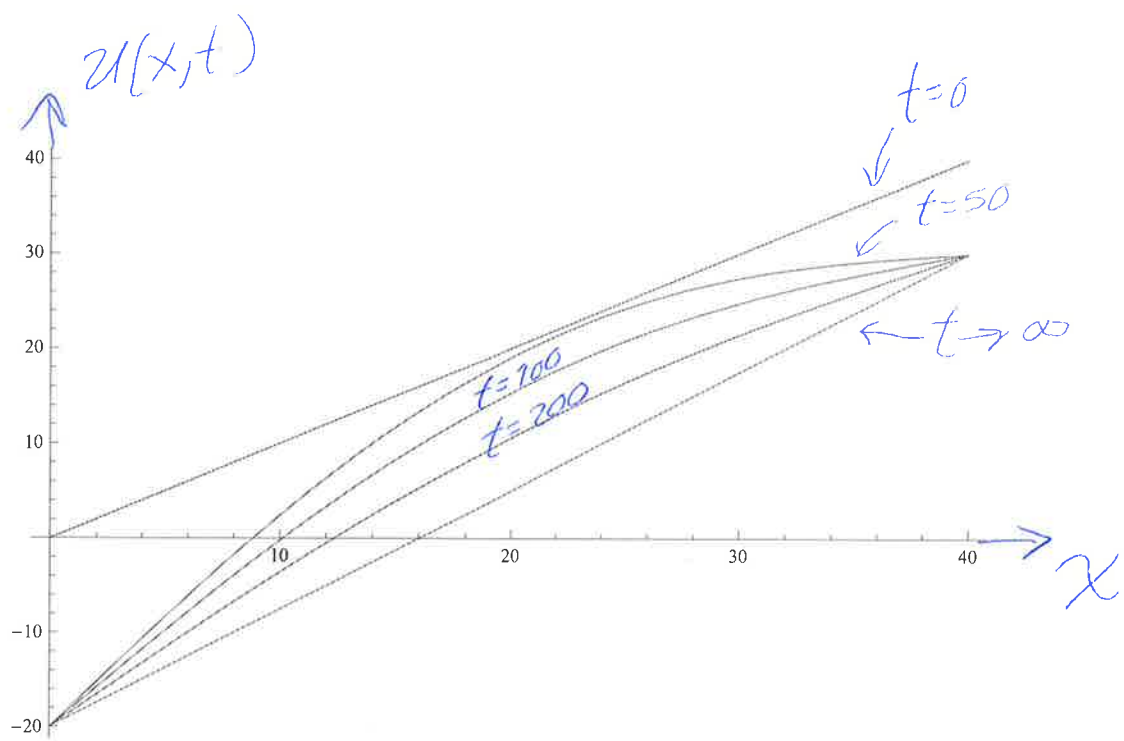
Primeira Aproximação ($n=1$).

$$u(x,t) \approx \frac{5}{4}x - 20 + \frac{60}{\pi} e^{-\alpha^2 \left(\frac{\pi}{40}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi}{40} x\right)$$

$$\alpha = 1.$$

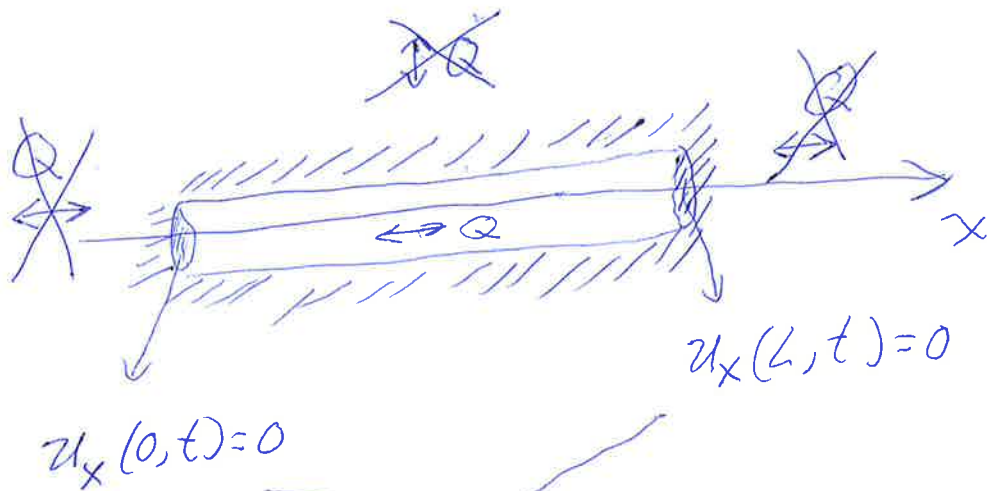
Ver gráfico na próxima página

4

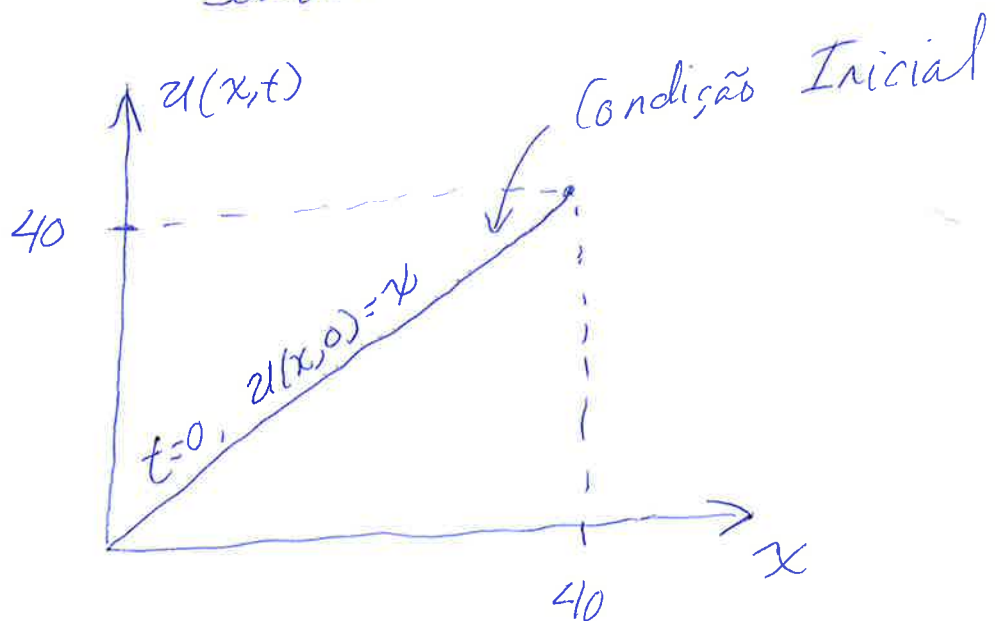


6) Considere a condução do calor em uma barra ① com 40 cm de comprimento cujas extremidades e a superfície lateral da barra estão completamente isoladas termicamente. Encontre uma expressão para a temperatura $u(x,t)$ quando a distribuição inicial de temperaturas for $u(x,0) = x$ se $0 \leq x \leq 40$.

Solução: Problema da Barra com Extremidades Isoladas



Não circula calor pelas extremidades
somente dentro da barra.



$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx}(x,t) = u_t(x,t), & 0 \leq x < 40, \quad t > 0 \leftarrow \text{Eq. Dif.} \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(40,t), & t > 0 \leftarrow \text{Condições de Contorno} \\ & \text{Extremidades Isoladas} \\ u(x,0) = x = f(x), & 0 \leq x \leq 40, \quad t=0 \leftarrow \text{Condição Inicial} \end{cases} \quad (2)$$

A solução para esse problema encontram nas notas de aula e é:

$$u(x,t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

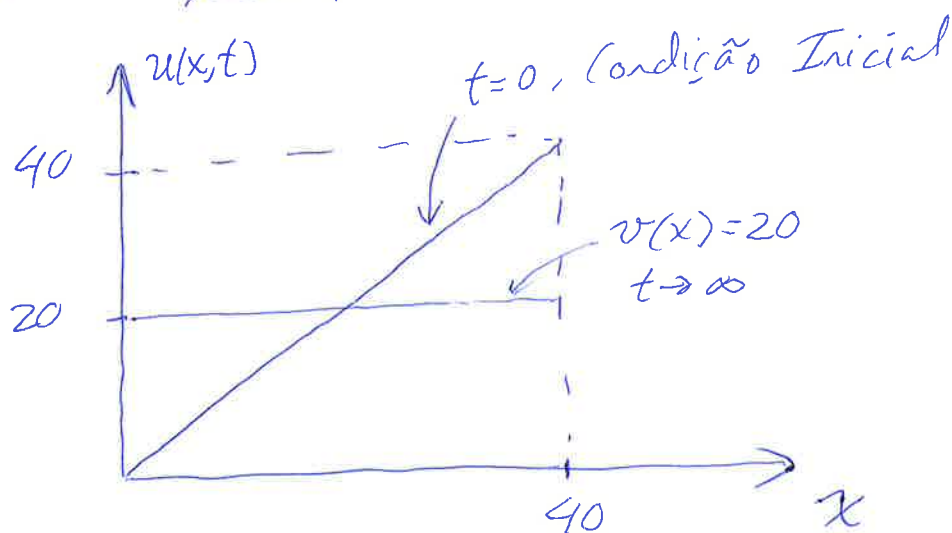
onde $C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx, \quad n=0,1,\dots \quad n \in \mathbb{N}$

O somando $\frac{C_0}{2}$ não depende de t e pode ser lido como o termo estacionário (quando $t \rightarrow \infty$).

$$C_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$C_0 = \frac{2}{40} \int_0^{40} x dx = \frac{1}{20} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{40} = \frac{1}{40} 40^2 = 40$$

$\frac{C_0}{2} = 20 = v(x) \leftarrow \text{Solução Estacionária}$
 Não depende de x neste caso



$$n = 1, 2, \dots \quad n \in \mathbb{N}$$

3

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx$$

$$C_n = \frac{2}{40} \int_0^{40} x \cos\left(n \frac{\pi}{40} x\right) dx$$

Integração por partes

$$\begin{cases} u = x & dv = \cos\left(n \frac{\pi}{40} x\right) dx \\ du = dx & v = \frac{40}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{40} x\right) \end{cases}$$

$$C_n = \frac{1}{20} \left[\frac{40x}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{40} x\right) \Big|_0^{40} - \frac{40}{n\pi} \int_0^{40} \sin\left(n \frac{\pi}{40} x\right) dx \right]$$

$$C_n = -\frac{2}{n\pi} (-1) \frac{40}{n\pi} \cos\left(n \frac{\pi}{40} x\right) \Big|_0^{40}$$

$$C_n = \frac{80}{n^2 \pi^2} [\cos(n\pi) - 1]$$

$$C_n = \frac{80}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1]$$

- Se n é par $\Rightarrow C_n = 0$

- Se n é ímpar $\Rightarrow C_n = -\frac{160}{n^2 \pi^2}$

$$n = 2s-1, \quad n = 1, \dots \quad n \in \mathbb{N} \\ s = 1, \dots$$

$$C_s = -\frac{160}{(2s-1)^2 \pi^2}$$

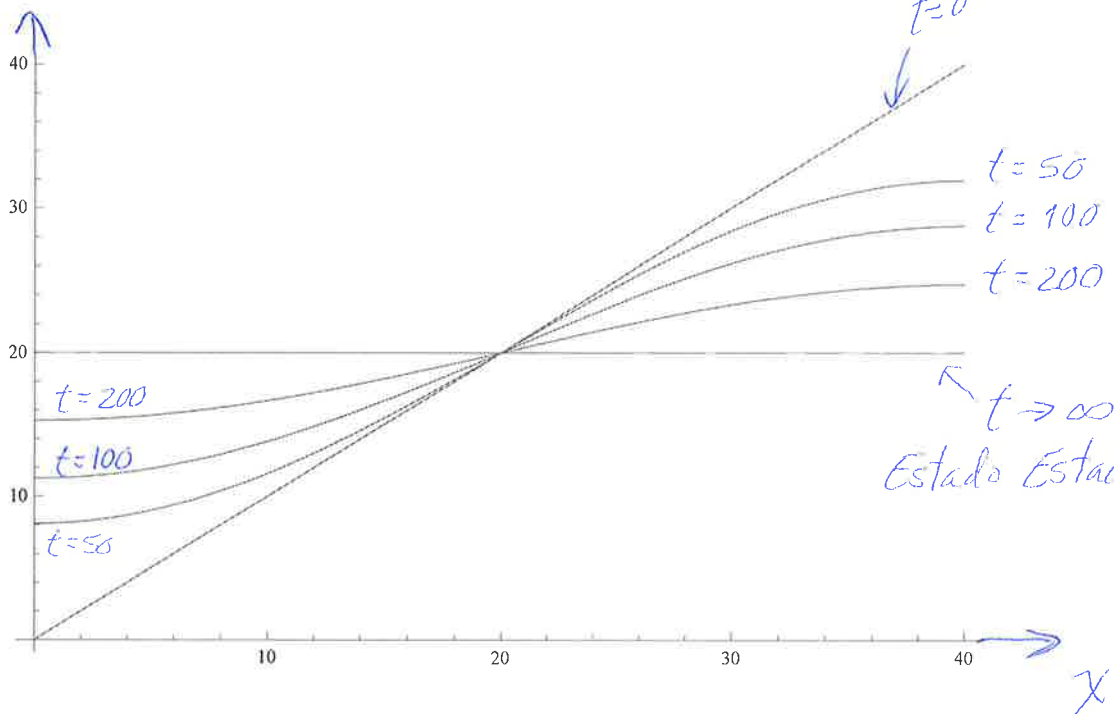
$$u(x, t) = 20 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{-160}{(2s-1)^2 \pi^2} e^{-\alpha^2 \left(\frac{(2s-1)\pi}{40}\right)^2 t} \cos\left((2s-1) \frac{\pi}{40} x\right)$$

Primeira Aproximação (Até $n=1$), $\alpha=1$.

$$u(x, t) \approx 20 - \frac{160}{\pi^2} e^{-\left(\frac{\pi}{40}\right)^2 t} \cos\left(\frac{\pi x}{40}\right)$$

continua...

$u(x,t)$



Condição Inicial
 $t=0$

(4)

$t=50$

$t=100$

$t=200$

$t=200$

$t=100$

$t=50$

$t \rightarrow \infty$
Estado Estacionário

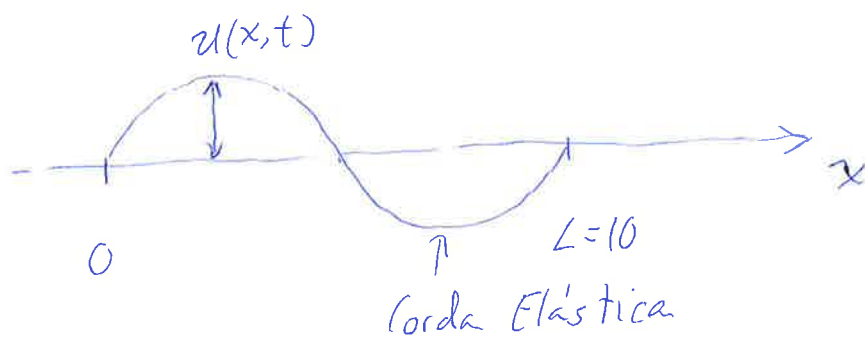
7) Considere uma corda elástica com 10 cm de comprimento cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento, sem velocidade inicial, de uma posição inicial: $u(x,0) = \frac{8}{1000} x(10-x)^2$. Encontre uma expressão para o deslocamento vertical de cada ponto da corda: $u(x,t)$. (1)

Solução: - Eq. de Ondas

- Deslocamento Inicial conhecido

- Velocidade Inicial em ZERO.

- $L=10$



$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 10 \quad \leftarrow \text{Eq. de Ondas} \\ u(0,t) = 0 = u(10,t), \quad t > 0 \quad \leftarrow \text{Condições de Contorno Homogêneas.} \end{array} \right.$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$f(x) = \frac{8}{1000} x(10-x)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x,0) = 0, \quad t = 0 \quad \leftarrow \text{Condições Iniciais (IVAS).} \\ \text{Velocidade Inicial em } y \text{ ZERO} \end{array} \right.$$

A solução para este tipo de problema aparece discontida nas notas de aulas e e'.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(an\frac{\pi}{L}t\right) \quad \text{onde}$$

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) dx, \quad n=1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$$

$$C_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} \frac{8}{1000} x(10-x)^2 \sin\left(n\frac{\pi}{10}x\right) dx$$

$$C_n = \frac{16}{10^4} \int_0^{10} x(100 - 20x + x^2) \sin\left(n\frac{\pi}{10}x\right) dx$$

$$C_n = \frac{16}{10^4} \left[\int_0^{10} 100x \sin\left(n\frac{\pi}{10}x\right) dx - \int_0^{10} 20x^2 \sin\left(n\frac{\pi}{10}x\right) dx + \int_0^{10} x^3 \sin\left(n\frac{\pi}{10}x\right) dx \right]$$

$$C_n = \frac{32}{(n\pi)^4} (2n\pi + n\pi(-1)^n)$$

$$C_n = \frac{32}{(n\pi)^3} (2 + (-1)^n)$$

Solução

$$u(x,t) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (2 + (-1)^n) \sin\left(n\frac{\pi}{10}x\right) \cos\left(an\frac{\pi}{10}t\right)$$

Primeira Aproximação (Até $n=1$), $a=1$

$$u(x,t) \approx \frac{32}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)$$

O período em t é $\frac{2L}{a} = \frac{2 \cdot 10}{1} = 20$

Segunda Aproximação (Até $n=2$), $a=1$

$$u(x,t) \approx \frac{32}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) + \frac{3}{8} \cdot \frac{32}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$$

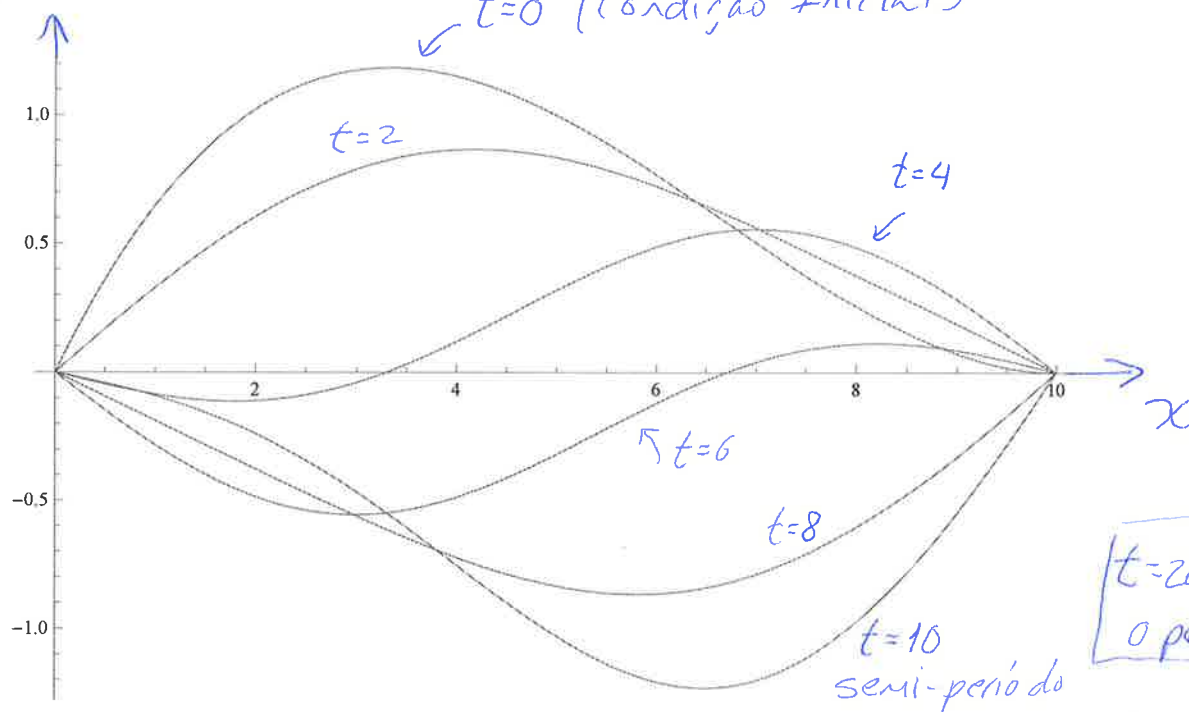
continua...

3

$u(x, t)$

$$u(x, 0) = \frac{8}{1000} x(10-x)^2$$

$t=0$ (condição Inicial)



$t=20$ é o período

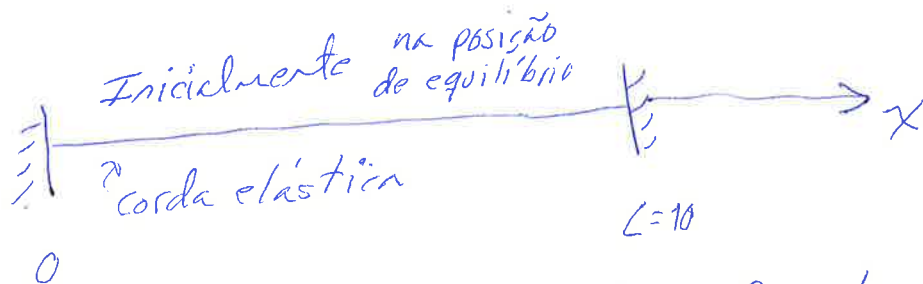
Deslocamento no primeiro semi-período

8) Considere uma corda elástica com 10cm de comprimento. ①
 cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em
 movimento a partir da sua posição de equilíbrio, com veloci-
 dade inicial: $u_t(x,0) = \frac{8}{1000} x(10-x)^2$. Encontre uma expressão
 para o deslocamento vertical de cada ponto da corda: $u(x,t)$.

Solução: - Eq. de Ondas

- Posição Inicial ZERO: $u(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq L$.
- Velocidade Inicial em y diferente de zero

$$u_t(x,0) = \frac{8}{1000} x(10-x)^2$$



A solução é discutida nas notas de aula:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \leftarrow \text{Eq. Dif} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0 \leftarrow \text{Condição de Contorno Homogênea} \\ \underbrace{u(x,0) = 0}_{\text{posição inicial ZERO}}, \quad \underbrace{u_t(x,0) = g(x)}_{\text{velocidade inicial em } y \neq \text{ZERO}} \leftarrow \text{Condições Iniciais} \end{array} \right.$$

$$g(x) = \frac{8}{1000} x(10-x)^2$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \sin\left(a n \frac{\pi}{L} t\right) \quad \text{onde}$$

$$a n \frac{\pi}{L} c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx \quad \begin{array}{l} n=1, \dots \\ n \in \mathbb{N} \end{array}$$

(2)

$$a \cdot n \cdot \frac{\pi}{10} \cdot C_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} \frac{8}{1000} x(10-x)^2 \sin\left(n \frac{\pi}{10} x\right) dx$$

$$C_n = \frac{2}{a \cdot n \cdot \pi} \cdot \frac{8}{1000} \int_0^{10} x(10-x)^2 \sin\left(n \frac{\pi}{10} x\right) dx$$

$$C_n = \frac{320}{a \cdot n^4 \pi^4} (2 + (-1)^n)$$

$$u(x, t) = \frac{320}{a \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n^4} \sin\left(n \frac{\pi}{10} x\right) \sin\left(a n \frac{\pi}{10} t\right)$$

$$a = 1$$

Primeira Aproximação (Até $n=1$)

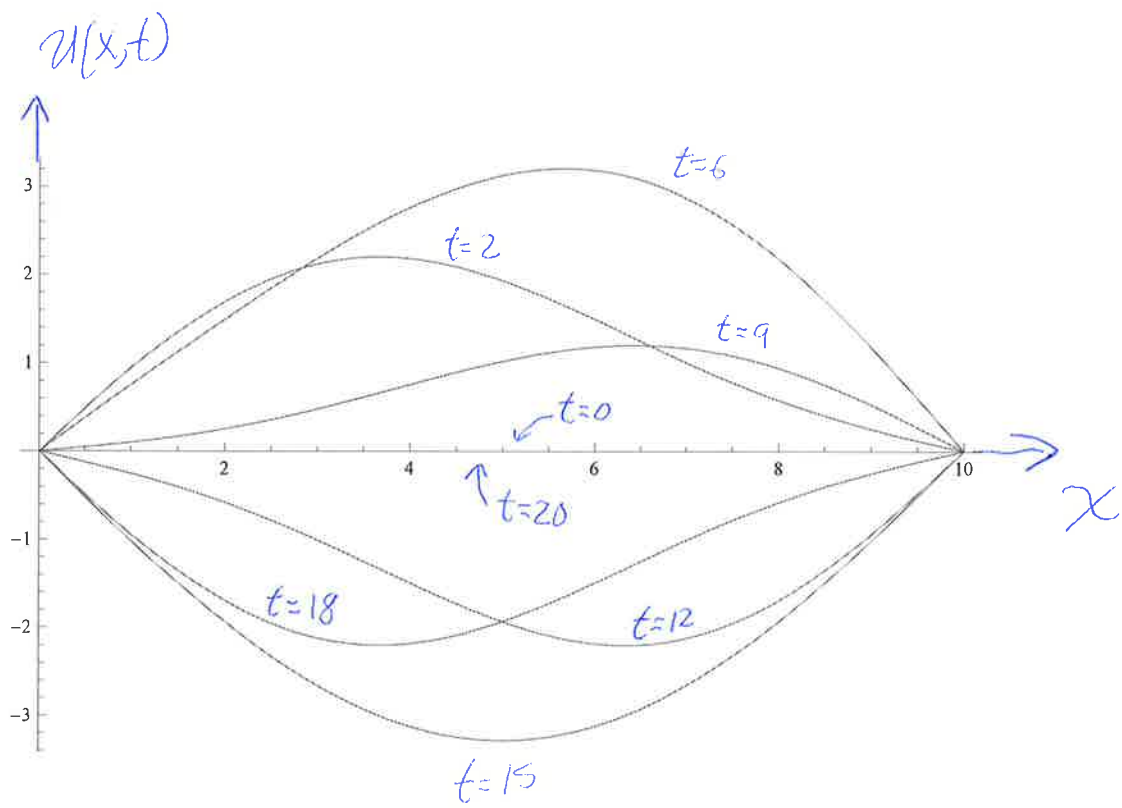
$$u(x, t) \approx \frac{320}{\pi^4} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right)$$

Segunda Aproximação (Até $n=2$)

$$u(x, t) \approx \frac{320}{\pi^4} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) + \frac{3}{16} \cdot \frac{320}{\pi^4} \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)$$

Veja gráfico na próxima página

(3)



$t=20$ é o período em t .