

Seção 20: Equação de Laplace em coordenadas polares

Laplaciano em coordenadas polares. Seja $u = u(x, y)$ uma função de duas variáveis. Dependendo da região em que a função esteja definida, pode ser mais fácil trabalhar com coordenadas polares. Para lidar com a equação de Laplace nesta situação, vamos precisar da expressão do laplaciano em coordenadas polares. Vamos usar que

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

e também

$$\begin{cases} r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad (2)$$

Vamos pensar na situação em que a temperatura u de um ponto se expressa em termos das coordenadas polares (r, θ) desse ponto e que as coordenadas polares, por sua vez, se expressam em termos das coordenadas cartesianas através das equações (2). Temos, então, a função composta $(x, y) \mapsto (r, \theta) \mapsto u$. Aplicando a regra da cadeia, temos

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x.$$

Derivando novamente, temos, pela regra da derivada do produto,

$$u_{xx} = (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx}.$$

Usando a regra da cadeia, obtemos

$$u_{xx} = (u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x) r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x) \theta_x + u_\theta \theta_{xx}.$$

Levando em conta que $u_{r\theta} = u_{\theta r}$, pois a ordem de derivação não influi no resultado, e agrupando os termos, temos

$$u_{xx} = u_{rr} \cdot (r_x)^2 + 2u_{r\theta} \cdot r_x \theta_x + u_{\theta\theta} \cdot (\theta_x)^2 + u_r r_{xx} + u_\theta \theta_{xx}. \quad (3)$$

Analogamente, derivando em relação a y , obtemos

$$u_{yy} = u_{rr} \cdot (r_y)^2 + 2u_{r\theta} \cdot r_y \theta_y + u_{\theta\theta} \cdot (\theta_y)^2 + u_r r_{yy} + u_\theta \theta_{yy}. \quad (4)$$

Somando (3) e (4), segue que o laplaciano vale

$$\begin{aligned} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = & ((r_x)^2 + (r_y)^2) u_{rr} + 2(r_x \theta_x + r_y \theta_y) u_{r\theta} + ((\theta_x)^2 + (\theta_y)^2) u_{\theta\theta} \\ & + (r_{xx} + r_{yy}) u_r + (\theta_{xx} + \theta_{yy}) u_\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Utilizando as expressões (2) para calcular as derivadas parciais indicadas em (5), obtemos

$$(r_x)^2 + (r_y)^2 = 1$$

$$r_x \theta_x + r_y \theta_y = 0$$

$$(\theta_x)^2 + (\theta_y)^2 = \frac{1}{r^2}$$

$$r_{xx} + r_{yy} = \frac{1}{r}$$

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$$

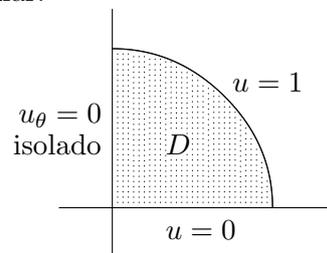
Substituindo em (5), obtemos, finalmente,

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}, \quad (6)$$

que é a expressão do laplaciano em coordenadas polares.

Exemplo 1. Resolva o problema de Dirichlet para o setor circular:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & \text{em } D : 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(r, 0) = 0, \\ u_{\theta}(r, \frac{\pi}{2}) = 0, & \text{no lado } \theta = \frac{\pi}{2} \\ u(1, \theta) = 1 \end{cases}$$



Solução: Começamos procurando uma função da forma $u(r, \theta) = \varphi(r)\psi(\theta)$. Substituindo na equação de Laplace, obtemos

$$\varphi''(r)\psi(\theta) + \frac{1}{r}\varphi'(r)\psi(\theta) + \frac{1}{r^2}\varphi(r)\psi''(\theta) = 0.$$

Dividindo pelo produto $\varphi(r)\psi(\theta)$, segue que

$$\frac{\varphi''(r)}{\varphi(r)} + \frac{\varphi'(r)}{r\varphi(r)} + \frac{\psi''(\theta)}{r^2\psi(\theta)} = 0.$$

Multiplicando por r^2 , podemos separar as variáveis,

$$\frac{r^2\varphi''(r)}{\varphi(r)} + \frac{r\varphi'(r)}{\varphi(r)} = -\frac{\psi''(\theta)}{\psi(\theta)} = \lambda.$$

Segue daí duas EDO independentes

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - \lambda\varphi(r) = 0 \quad (7)$$

$$\psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0 \quad (8)$$

Da mesma forma que nos problemas resolvidos nas seções anteriores, as condições de fronteira $u(r, 0) = 0$ e $u_{\theta}(r, \frac{\pi}{2}) = 0$ implicam que só encontraremos solução não trivial se

$$\psi(0) = \psi'(\frac{\pi}{2}) = 0. \quad (9)$$

Começamos com a equação (8) e com as condições de fronteira (9), isto é, com o problema de fronteira de encontrar uma função $\psi : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ não constante igual a 0 e um escalar λ satisfazendo

$$\begin{cases} \psi''(\theta) + \lambda\psi(\theta) = 0 \\ \psi(0) = \psi'(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Como nos inúmeros problemas já considerados, dividimos em três casos.

Caso 1. $\lambda < 0$. É trivial.

Caso 2. $\lambda = 0$. É trivial.

Caso 3. $\lambda > 0$. Neste caso, $\lambda = \mu^2$, com $\mu > 0$. A EDO fica

$$\psi''(\theta) + \mu^2\psi(\theta) = 0,$$

cuja solução é

$$\psi(\theta) = A \cos \mu\theta + B \operatorname{sen} \mu\theta.$$

Como $\psi(0) = 0$, temos que $A = 0$ e, conseqüentemente,

$$\psi(\theta) = B \operatorname{sen} \mu\theta.$$

Então,

$$0 = \psi' \left(\frac{\pi}{2} \right) = B \cos \frac{\mu\pi}{2}.$$

Segue que $B = 0$ ou $\cos \frac{\mu\pi}{2} = 0$. Se $B = 0$, então teríamos $\psi(\theta) = 0$ para todo θ , o que nos daria solução trivial. Portanto, só encontramos solução não trivial trabalhando com a condição $\cos \frac{\mu\pi}{2} = 0$. Segue que

$$\frac{\mu\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2},$$

ou seja,

$$\mu = 2n + 1.$$

Logo, as soluções não triviais do problema (10) são

$$\psi_n(\theta) = B_n \operatorname{sen} ((2n + 1)\theta), \quad \lambda_n = (2n + 1)^2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Passamos a analisar a equação (8), sabendo já que $\lambda = \lambda_n = (2n + 1)^2$. Obtemos a equação de Cauchy–Euler

$$r^2 \varphi''(r) + r \varphi'(r) - (2n + 1)^2 \varphi(r) = 0. \quad (12)$$

Sabemos que (12) admite soluções da forma $\varphi(r) = r^k$ para k raiz da equação algébrica

$$k(k - 1) + k - (2n + 1)^2 = 0,$$

cujas raízes são $k_1 = 2n + 1$ e $k_2 = -(2n + 1)$. Portanto a solução geral da EDO (12) é

$$\varphi(r) = D r^{2n+1} + E r^{-(2n+1)}, \quad (0 < r \leq 1).$$

Notemos que a origem faz parte da região D . Mas na origem, temos $r = 0$ e, portanto, a função $r^{-(2n+1)}$ se torna infinita na origem. Logo, devemos ter $E = 0$ e

$$\varphi_n(r) = D_n r^{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Multiplicando (11) e (13), obtemos

$$u_n(r, \theta) = B_n r^{2n+1} \operatorname{sen} (2n + 1)\theta, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Fazendo a superposição encontramos

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{2n+1} \operatorname{sen} (2n + 1)\theta. \quad (14)$$

Fazendo $r = 1$ e aplicando a condição de fronteira, obtemos

$$1 = u(1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{sen} (2n + 1)\theta, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (15)$$

Levando em conta que $\operatorname{sen} (2n + 1)\theta = \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\pi\theta}{\frac{\pi}{2}}$, note que (15) é a expansão em série da função constante $f(\theta) = 1$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ em relação ao sistema ortogonal já estudado

$\left\{ \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\pi\theta}{\frac{\pi}{2}} \mid n = 0, 1, 2, 3, \dots \right\}$. Segue que os coeficientes B_n de (15), que são os mesmos de (14), são dados por

$$B_n = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2n+1)\theta \, d\theta = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left[-\cos(2n+1)\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{(2n+1)\pi}.$$

Substituindo em (14), concluímos que a solução do problema é

$$u(r, \theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} r^{2n+1} \operatorname{sen}(2n+1)\theta.$$

Exemplo 2. Resolva o problema de Dirichlet para a região exterior ao disco:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & (r > 1) \\ u(1, \theta) = \begin{cases} U_1, & \text{se } 0 < \theta < \pi \\ 0, & \text{se } \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \\ |u(r, \theta)| \leq M \text{ para algum } M \text{ (isto é, } u \text{ é limitada.)} \end{cases}$$

Solução: Começamos procurando uma função da forma $u(r, \theta) = \varphi(r) \psi(\theta)$. Como no exemplo anterior, obtemos as EDO

$$r^2 \varphi''(r) + r \varphi'(r) - \lambda \varphi(r) = 0 \quad (16)$$

$$\psi''(\theta) + \lambda \psi(\theta) = 0 \quad (17)$$

Podemos fazer a coordenada polar θ variar em todo $(-\infty, +\infty)$. Note que $u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi)$, pois mantendo a coordenada polar r fixa e dando um acréscimo de 2π ao ângulo θ , voltamos ao mesmo ponto do plano. Segue daí que

$$\varphi(r) \psi(\theta + 2\pi) = \varphi(r) \psi(\theta),$$

ou seja,

$$\varphi(r) \cdot (\psi(\theta + 2\pi) - \psi(\theta)) = 0.$$

Portanto, $\varphi(r) = 0$ para todo r (que daria a solução trivial) ou $\psi(\theta + 2\pi) - \psi(\theta) = 0$ para todo θ (que nos diz que $\psi(\theta)$ é uma função 2π -periódica). Concluímos que para obter solução não trivial, devemos trabalhar com a condição

$$\psi(\theta) \text{ é uma função } 2\pi\text{-periódica.} \quad (18)$$

Tomando a equação (17) e a condição (18), formamos o problema

$$\begin{cases} \psi''(\theta) + \lambda \psi(\theta) = 0 \\ \psi(\theta) \text{ } 2\pi\text{-periódica} \end{cases} \quad (19)$$

No problema (19), procuramos uma função não identicamente nula $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e um escalar λ . A condição (18) desempenha um papel análogo ao de condições de fronteira.

Caso 1. $\lambda < 0$. Neste caso, $\lambda = -\mu^2$, com $\mu > 0$.
Neste caso a EDO do problema (19) é

$$\psi''(\theta) - \mu^2\psi(\theta) = 0,$$

cujas soluções são

$$\psi(\theta) = Ae^{\mu\theta} + Be^{-\mu\theta}. \quad (20)$$

Mas a função $\psi(\theta)$ ainda deve ser contínua e periódica e, portanto, limitada. Fazendo $\theta \rightarrow +\infty$ temos que as exponenciais

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} e^{\mu\theta} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} e^{-\mu\theta} = 0$$

Portanto, $A = 0$, pois caso contrário a função $\psi(\theta)$ não seria limitada. Da mesma forma, analisando o comportamento das funções para $\theta \rightarrow -\infty$, concluímos que $B = 0$. Portanto, $\psi(\theta) = \text{const.} = 0$ e o Caso 1 é trivial.

Caso 2. $\lambda = 0$.

Neste caso a EDO do problema (19) é $\psi''(\theta) = 0$, cuja solução é $\psi(\theta) = A\theta + B$. Utilizando que $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$, temos

$$A\theta + A2\pi + B = A\theta + B.$$

Segue que $A = 0$ e obtivemos a solução não trivial

$$\psi_0(\theta) = B_0, \quad \lambda_0 = 0. \quad (21)$$

Caso 3. $\lambda > 0$. Neste caso, $\lambda = \mu^2$, com $\mu > 0$.

A EDO do problema (19) é

$$\psi''(\theta) + \mu^2\psi(\theta) = 0,$$

cujas soluções são

$$\psi(\theta) = A \cos \mu\theta + B \sen \mu\theta. \quad (22)$$

Utilizando a condição de periodicidade $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$, com $\psi(\theta)$ dada por (22), temos

$$A \cos(\mu\theta + \mu2\pi) + B \sen(\mu\theta + \mu2\pi) = A \cos \mu\theta + B \sen \mu\theta.$$

Segue que $\mu2\pi$ é um período para a senóide $\psi(\theta) = A \cos \mu\theta + B \sen \mu\theta$. Então, $\mu2\pi = n2\pi$, para algum inteiro positivo n , ou seja,

$$\mu = nz, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Obtemos assim as soluções não triviais

$$\psi_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sen n\theta, \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

A seguir, analisamos a equação de Cauchy–Euler (16), conhecendo já os valores convenientes para λ .

Para $\lambda = \lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, obtemos a equação de Cauchy–Euler

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - n^2\varphi(r) = 0, \quad (24)$$

cuja solução geral é

$$\varphi(r) = Dr^n + Er^{-n}, \quad (1 \leq r < +\infty).$$

Para ter $\varphi(r)$ limitada no intervalo $[1, +\infty)$, devemos ter $D = 0$. Logo,

$$\varphi_n(r) = E_n r^{-n}. \quad (25)$$

Para $\lambda = \lambda_0 = 0$, a equação de Cauchy–Euler (24) fica

$$r^2 \varphi''(r) + r \varphi'(r) = 0. \quad (26)$$

Para procurar soluções da forma $\varphi(r) = r^k$, analisamos a equação algébrica $k(k-1) + k = 0$, que tem raiz dupla $k_1 = k_2 = 0$. Logo, duas soluções L.I. de (26) são $\{1, 1 \cdot \ln r\}$ e a solução geral é

$$\varphi(r) = D + E \ln r.$$

Como queremos soluções limitadas, então

$$\varphi_0(r) = D_0. \quad (27)$$

Multiplicando, para obter $u_n(r, \theta) = \varphi_n(r) \psi_n(\theta)$, temos

$$u_n(r, \theta) = (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

e

$$u_0(r, \theta) = B_0 \quad (29)$$

Finalmente, fazendo a superposição, temos

$$u(r, \theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^{-n}. \quad (30)$$

Para aplicar a condição de fronteira, fazemos $r = 1$ e obtemos que

$$u(1, \theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = u(1, \theta) = f(\theta)$$

é a expansão em série de Fourier da função 2π -periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$f(\theta) = \begin{cases} U_1, & \text{para } 0 < \theta < \pi \\ 0, & \text{para } \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Para calcular os coeficientes de Fourier é útil observar que esta função não é par nem ímpar, mas que traçando seu gráfico é fácil ver que, fazendo uma translação vertical, a função $f(\theta) - \frac{U_1}{2}$ é ímpar. Então,

$$f(\theta) - \frac{U_1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta.$$

Logo

$$f(\theta) = \frac{U_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta$$

e portanto $A_0 = U_1$ e $A_n = 0$, para $n \geq 1$. Mas,

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta = \frac{U_1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin n\theta \, d\theta = \frac{U_1}{\pi} \left[-\frac{\cos n\theta}{n} \right]_0^{\pi}$$

e, em conseqüência,

$$B_n = \frac{U_1}{\pi n} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{2U_1}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Finalmente,

$$u(r, \theta) = \frac{U_1}{2} + \frac{2U_1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{-(2n+1)} \operatorname{sen}(2n+1)n\theta}{2n+1}.$$

Exemplo 3. Resolva o problema de Dirichlet para um anel circular:

$$(\star) \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & (1 < r < 2) \\ u(1, \theta) = f(\theta), & (0 < \theta < 2\pi) \\ u(2, \theta) = g(\theta), & (0 < \theta < 2\pi) \end{cases}$$

onde $f(\theta)$ e $g(\theta)$ são duas funções dadas.

Solução: O problema, tal como está, já poderia ser resolvido por separação de variáveis, no entanto fica bem mais fácil de ser resolvido se o decomusermos em dois problemas. Consideremos os dois problemas

$$(\star\star) \begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0, & (1 < r < 2) \\ v(1, \theta) = f(\theta), & (0 < \theta < 2\pi) \\ v(2, \theta) = 0, & (0 < \theta < 2\pi) \end{cases}$$

e

$$(\star\star\star) \begin{cases} w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta} = 0, & (1 < r < 2) \\ w(1, \theta) = 0, & (0 < \theta < 2\pi) \\ w(2, \theta) = g(\theta), & (0 < \theta < 2\pi) \end{cases}$$

A idéia é resolver estes dois problemas mais simples e tomar v solução de $(\star\star)$ e w solução de $(\star\star\star)$. Então, a função $u = v + w$ será solução do problema (\star) .

Vamos resolver o problema $(\star\star)$. O outro é análogo. Começamos procurando a função $v(r, \theta)$ da forma $v(r, \theta) = \varphi(r) \psi(\theta)$. Exatamente como no Exemplo 2 acima, obtemos as EDO's

$$r^2 \varphi''(r) + r \varphi'(r) - \lambda \varphi(r) = 0 \quad \text{e} \quad \psi''(\theta) + \lambda \psi(\theta) = 0.$$

Da condição $v(2, \theta) = 0$ segue que $\varphi(2) \psi(\theta) = 0$ e, portanto, $\varphi(2) = 0$, pois caso contrário teríamos $\psi(\theta) = 0$, para todo θ , a solução trivial.

Passamos a considerar o problema

$$\begin{cases} \psi''(\theta) + \lambda \psi(\theta) = 0 \\ \psi(\theta) \text{ } 2\pi\text{-periódica} \end{cases}$$

Como no Exemplo 2, considerando os casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$, encontramos as soluções

$$\psi_0(\theta) = B_0, \quad \lambda_0 = 0$$

e

$$\psi_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta, \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

A seguir analisamos a equação de Cauchy-Euler

$$r^2\varphi''(r) + r\varphi'(r) - n^2\varphi(r) = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

com a condição $\varphi(2) = 0$.

Como vimos no Exemplo 2, se $n = 0$, a solução geral da EDO é

$$\varphi(r) = D + E \ln r.$$

Mas

$$0 = \varphi(2) = D + E \ln 2.$$

Portanto, $E = -D/\ln 2$ e

$$\varphi_0(r) = D_0 \left(1 - \frac{\ln r}{\ln 2} \right).$$

Temos $v_0(r, \theta) = \varphi_0(r) \psi_0(\theta)$. Incorporando constante D_0 em B_0 , obtemos

$$v_0(r, \theta) = B_0 \left(1 - \frac{\ln r}{\ln 2} \right).$$

Se $n \geq 1$, a solução geral da EDO é

$$\varphi(r) = Dr^n + Er^{-n}.$$

Mas,

$$0 = \varphi(2) = D2^n + E2^{-n}, \quad (1 \leq r < +\infty)$$

Portanto $E = -D2^{2n}$ e, finalmente,

$$\varphi_n(r) = D_n(r^n - 2^{2n}r^{-n}).$$

Temos $v_n(r, \theta) = \varphi_n(r) \psi_n(\theta)$. Incorporando constante D_n em A_n e B_n , obtemos

$$v_n(r, \theta) = (r^n - 2^{2n}r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sen n\theta), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Fazendo a superposição das várias v_n encontradas, temos

$$v(r, \theta) = B_0 \left(1 - \frac{\ln r}{\ln 2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n - 2^{2n}r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sen n\theta). \quad (31)$$

Aplicando a condição de fronteira,

$$v(1, \theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 2^{2n})(A_n \cos n\theta + B_n \sen n\theta) = f(\theta)$$

onde a função f pode ser considerada como $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periódica. Pelas fórmulas de Euler para os coeficientes de Fourier, temos

$$(1 - 2^{2n})A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

A integração pode ser feita entre 0 e 2π . Logo,

$$A_n = \frac{1}{(1 - 2^{2n})\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx. \quad (32)$$

Analogamente obtém-se

$$B_n = \frac{1}{(1 - 2^{2n})\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx. \quad (33)$$

O coeficiente B_0 faz o papel de $\frac{a_0}{2}$ na série de Fourier. Então,

$$2B_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx,$$

ou seja,

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx. \quad (34)$$

Em resumo, reunindo as conclusões (31), (32), (33) e (34), temos que a solução do problema (★★) é

$$v(r, \theta) = B_0 \left(1 - \frac{\ln r}{\ln 2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n - 2^{2n} r^{-n}) (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta),$$

onde

$$A_n = \frac{1}{(1 - 2^{2n})\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad , \quad B_n = \frac{1}{(1 - 2^{2n})\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

e

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx.$$

Analogamente resolve-se o problema (★★★), encontrando

$$w(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n - r^{-n}) (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta),$$

onde

$$A_n = \frac{1}{(2^n - 2^{-n})\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos nx \, dx \quad , \quad B_n = \frac{1}{(2^n - 2^{-n})\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \operatorname{sen} nx \, dx.$$

e

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \, dx.$$