Problemas de Valores de Contorno para Fronteiras com dois pontos. Autovalores e autovetores.

- Vamos tentar resolver o problema de contorno homogêneo

parâmetro

$$y''(x) + \lambda y(x) = \boxed{0}$$

Homogêneo

$$\text{e} \quad y(0) = \boxed{0} \quad \text{e} \quad y(L) = \boxed{0}$$

- Um problema homogêneo sempre terá a solução trivial. Neste caso $y(x) = 0$. Estamos interessados em saber se existem outras soluções além da trivial
- Este problema é análogo ao estudado em Álgebra de resolver a equação matricial

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

- Sempre existe a solução trivial: $\vec{x} = 0$
- Caso existissem outras soluções os λ eram chamados de autovalores e os $\vec{x}$ de autovetores.

- No nosso problema usaremos a mesma terminologia. Caso existam outra soluções para o problema de contorno homogêneo aos valores de λ chamaremos de autovalores e aos valores de $y(x)$ de autofunções.
- O problema de contorno homogêneo anterior aparece repetidamente na solução de eq. dif. em derivadas parciais

- Vamos separar a resolução em três casos:

a) $\lambda > 0$, b) $\lambda = 0$ e c) $\lambda < 0$

Caso a) $\lambda > 0$

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

Para evitar o aparecimento frequente de raízes quadradas vamos chamar $\lambda = \mu^2$. ($\lambda > 0$ e $\mu > 0$)

$$y''(x) + \mu^2 y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

Propondo $y(x) = e^{rx}$ como solução encontramos a eq. caraterística

$$r^2 + \mu^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm i\mu \leftarrow \text{(TIPO III)} \qquad r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

$$y_{gh}(x) = e^{\alpha x}\left[C_1\cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right]$$

$\alpha = 0 \quad \beta = \mu$

$$y_{gh}(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu x)$$

Aplicando a primeira condição de contorno: $y(0) = 0$

$$y_{gh}(0) = 0 = C_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + C_2 \cancelto{0}{\operatorname{sen}(0)}$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

Aplicando a segunda condição de contorno: $y(L) = 0$

$$y_{gh}(L) = 0 = \cancelto{0}{C_1} \cos(\mu L) + C_2 \operatorname{sen}(\mu L)$$

$$C_2 \operatorname{sen}(\mu L) = 0$$

Queremos soluções NÃO TRIVIAIS $\Rightarrow C_2 \neq 0$

$$\operatorname{sen}(\mu L) = 0$$

- A função sen(x) se anula quando $x = n\pi$, $n = 0, 1, \dots$ $n \in \mathbb{N}$

- Consequentemente $\operatorname{sen}(\mu L) = 0$ se

$$\mu L = n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{N}, \; n = 0, 1, \dots$$

e $\mu = \dfrac{n\pi}{L}$. Como neste caso $\lambda = \mu^2$ teremos

$n \in \mathbb{N}$, $n = 1, 2, \dots$ (Se $n = 0 \to \lambda = 0$ próximo caso)

$$\boxed{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \leftarrow \text{Autovalores.}$$

- A solução do problema de contorno será

$$y(x) = C_2 \operatorname{sen}(\mu x)$$

$$y(x) = C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad , \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

$n = 1, 2, \dots$ $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)} \leftarrow \text{Autofunções}$$

- Resumindo. Se $\lambda > 0$, existem outras soluções além da trivial para o problema de contorno homogêneo

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad , \; y(0) = 0 \; , \; y(L) = 0$$

Elas são dadas para $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$ $n \in \mathbb{N}$

e as soluções são $y(x) = C\, y_n(x)$, $C \in \mathbb{R}$

onde $y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$. n é um número natural

Isto é: $\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ e $y_1(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L} x\right) \leftarrow$ Autovalores e Autofunções Correspondentes

$\lambda_2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ e $y_2(x) = \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{L} x\right)$

$\lambda_3 = \left(\frac{3\pi}{L}\right)^2$ e $y_3(x) = \operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{L} x\right)$

$\vdots \qquad \vdots$

- Caso b) $\lambda = 0$

$$y''(x) + \cancel{\lambda y(x)}^{0} = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad e \quad y(L) = 0$$

$$y''(x) = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \; , \; y(L) = 0$$

$$y_{gh}(x) = C_1 x + C_2 \quad , \quad C_1 \, e \, C_2 \in \mathbb{R}$$

Usando a primeira condição de contorno: $y(0) = 0$

$$y_{gh}(0) = 0 = C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$\boxed{C_2 = 0}$$

Usando a segunda condição de contorno: $y(L) = 0$

$$y(L) = 0 = C_1 \cdot L + \cancel{C_2}^{0}$$

$$C_1 \cdot L = 0$$

mas $L \neq 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$

Logo somente existe a solução trivial: $y(x) = 0$

- Caso c) $\lambda < 0 \longrightarrow \lambda = -\mu^2 \; (\mu > 0)$

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \; , \; y(L) = 0$$

$$y''(x) - \mu^2 y(x) = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \; , \; y(L) = 0$$

$$r^2 - \mu^2 = 0 \qquad \text{Eq. Característica}$$

$$r = \pm \mu \qquad \text{TIPO I} \xrightarrow{r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}} y_{gh}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{-\mu x} + C_2 e^{\mu x}$$

Usando a primeira condição de contorno $y(0) = 0$

$$y(0) = 0 = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

$$C_1 + C_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{C_1 = -C_2}$$

Usando a segunda condição de contorno: $y(L)=0$. (5)

$$y(L)=0=C_1e^{-\mu L}+C_2e^{\mu L}$$

Temos um sistema para C_1 e C_2

$$\begin{cases} C_1=-C_2 \\ C_1e^{-\mu L}+C_2e^{\mu L}=0 \end{cases}$$

$$-C_2e^{-\mu L}+C_2e^{\mu L}=0$$

$$C_2\left(e^{\mu L}-e^{-\mu L}\right)=0$$

Multiplicando e dividindo por 2

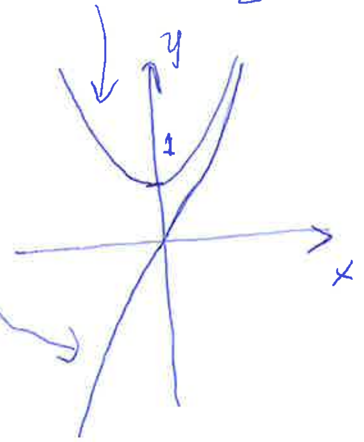
$$2C_2\left(\frac{e^{\mu L}-e^{-\mu L}}{2}\right)=0$$

$$2C_2\,\operatorname{senh}(\mu L)=0$$

função seno hiperbólico

$$\operatorname{senh}(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$



A função seno hiperbólico somente se anula quando seu argumento se anula.

Mas $\mu L\neq 0$, $\mu\neq 0$ e $L\neq 0$.

Isto significa que $C_2=0$ e consequentemente $C_1=0$

Em conjunto leva $y(x)=0$ ← Solução Trivial

No caso c) $\lambda<0$ não existem outras soluções além da trivial.

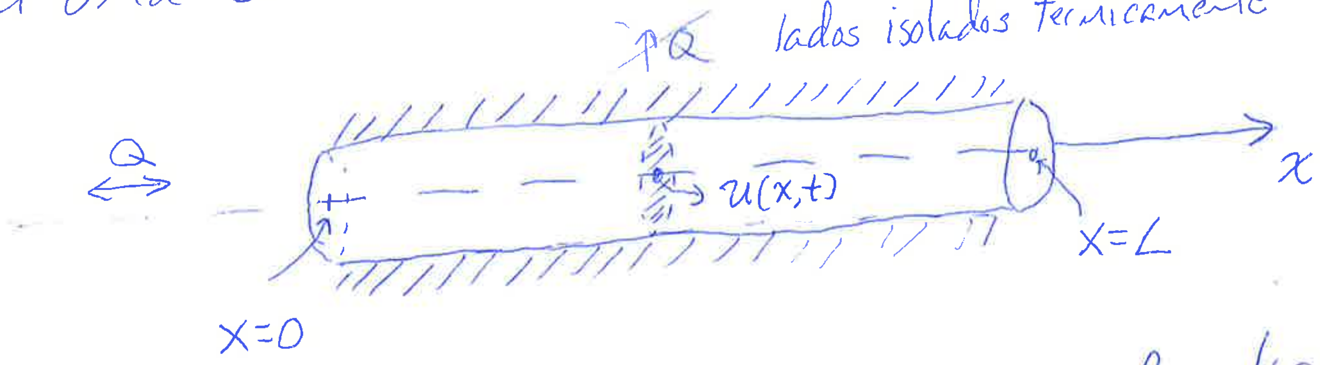
Resumo dos três casos.

O problema de contorno homogêneo

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \,, \quad y(0) = 0 \,, \quad y(L) = 0$$

somente tem outras soluções (além da trivial $y(x)=0$) quando $\underbrace{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}_{\text{Autovalores}}$ e $\underbrace{y_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{\text{Autofunções}}$ para $n = 1, 2, \ldots$ $n \in \mathbb{N}$

Separação de Variáveis. Condução de Calor em uma Barra (unidimensional espacialmente)



- Vamos considerar um problema de condução de calor em uma barra se seção reta uniforme feita com material homogêneo.
- Os lados da barra estão perfeitamente isolados, de modo que não exista condução do calor na direção perpendicular ao eixo x
- A temperatura (representada pela letra u) será considerada constante para qualquer seção transversal.
Isto é; $u(\cancel{y,z})$ somente de x { $u(x)$ }.
- A temperatura também depende do tempo (t)

$$u = u(x,t) \quad \leftarrow \text{função de 2 variáveis}$$

- A eq. dif. que governa a propagação do calor nesta configuração é

$$\alpha^2 u_{xx}(x,t) = u_t(x,t) \quad , \quad 0 < x < L \, , \; t > 0$$

unidades $[\alpha^2] = \frac{cm^2}{s}$

Prata, 1,71
Cobre, 1,14
Alumínio, 0,86

segunda derivada parcial em relação a x.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial x}$$

primeira derivada parcial em relação a t

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

- $\alpha^2 = \frac{K}{\rho s}$

K ← CONDUTIVIDADE TÉRMICA

s ← CALOR ESPECÍFICO

ρ ← DENSIDADE

α^2: DIFUSIVIDADE TÉRMICA

Todas são constante que dependem do material da barra.

- A dedução da eq. dif. do calor encontram nos livros de TERMODINÂMICA e no apêndice A do Boyce e Diprima.

- A distribuição inicial de temperaturas na barra será conhecida:

$$u(x, t=0) = \underbrace{f(x)}_{\text{conhecida}} \quad , \quad 0 \leq x \leq L$$

- Vamos começar considerando que a temperatura nos extremos da barra é constante (não depende do tempo) e é igual a zero:

$$u(0,t) = 0 \quad e \quad u(L,t) = 0 \quad , \; \forall t > 0$$

para todo $t > 0$

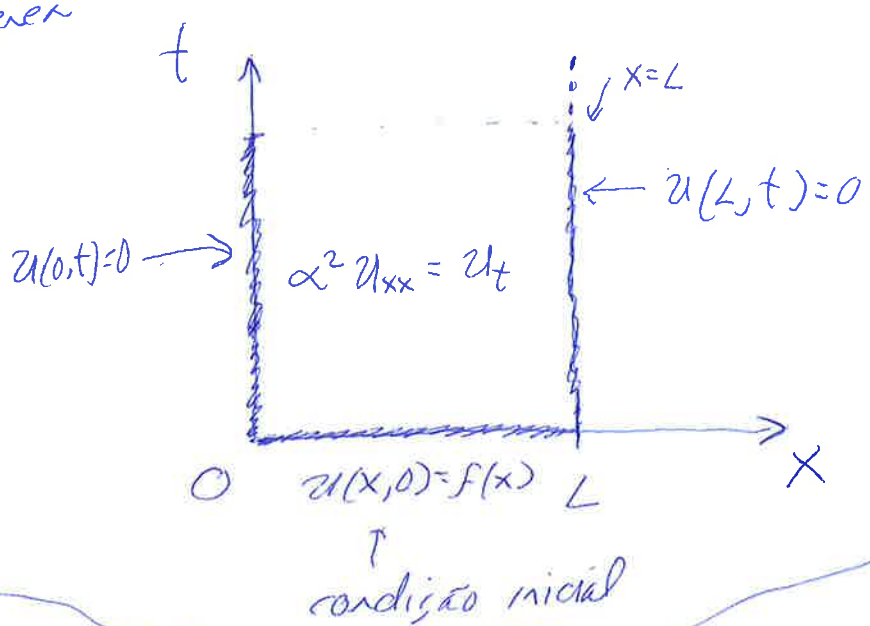
- Um problema mais realista, quando $u(0,t)=T_1$ e $u(L,t)=T_2$ será considerado posteriormente.

Resumindo, queremos resolver para $u(x,t)$

Eq. Dif. → $\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad , 0<x<L \; , t>0$

Condição Inicial → $u(x,0)=f(x) \quad , 0 \leq x \leq L \; , t=0$

Condição de Contorno Homogênea → $u(0,t)=\boxed{0} \; , u(L,t)=\boxed{0} \; , t>0$



Problema de Contorno no plano xt

- O problema é linear: u somente aparece elevado a potência um.

- A eq. dif. é homogênea: $\alpha^2 u_{xx} - u_t = \underbrace{0}_{\text{onde não aparece } u}$

- Resolveremos primeiro a eq. dif e as condições de contorno em x para depois satisfazer a condição inicial.

Método de Separação de Variáveis

$$\alpha^2 u_{xx}(x,t) = u_t(x,t)$$ ← Eq. Dif. do Calor

- A solução trivial $u(x,t)=0$ satisfaz a eq. dif. Porém não satisfaz a condição inicial $u(x,0)=f(x)$. Em geral $f(x) \neq 0$. Procuramos outras soluções, além da trivial.

- A hipótese básica do método de separação de variáveis é que

$$\boxed{u(x,t) = \underbrace{X(x)}_{\text{função que só depende de } x} \cdot \underbrace{T(t)}_{\text{função que só depende de } t}}$$

- Derivando u em relação a t

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u_t = \frac{\partial [X(x)\, T(t)]}{\partial t} = X(x)\frac{dT(t)}{dt} = X(x)T'(t)$$

ou $\boxed{u_t = XT'}$ $\qquad T' = \dfrac{dT(t)}{dt}$

- Derivando u em relação a x (Primeira Derivada)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[X(x)\,T(t)] = T(t)\frac{dX(x)}{dx}$$

- Derivando novamente em relação a x

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[T(t)\frac{dX(x)}{dx}\right] = T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

ou $\boxed{u_{xx} = T X_{xx}}$ $\qquad X_{xx} = \dfrac{d^2X(x)}{dx^2} = X''$

ou $\boxed{u_{xx} = T X''}$

Colocando as derivadas na eq. dif. do calor

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad \leftarrow \text{Eq. Dif. em Derivadas Parciais}$$

$$\alpha^2 T X'' = X T'$$

ou

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{Somente depende de } X(x)} = \underbrace{\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T}}_{\text{Somente depende de } T(t)} \quad \leftarrow \text{Variáveis Separadas.}$$

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = -\lambda \\ \dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{T'}{T} = -\lambda \end{cases}$$

Mesma constante para manter a igualdade anterior. O sinal menos é por conveniência. Ficará claro posteriormente.

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \alpha^2 \lambda T = 0 \end{cases}$$

Duas eq. dif. ordinárias para $X(x)$ e $T(t)$.

Vamos considerar agora a condição de contorno

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

Não queremos que $T(t) = 0$, $\forall t > 0$ devido a que $u(x,t) = X(x) \cdot 0 = 0 \quad \forall t$.

Consequentemente, $\boxed{X(0)=0}$ e $T(t)\neq 0$, $t>0$

- Analogamente $\boxed{X(L)=0}$ e $T(t)\neq 0$, $t>0$

- Vamos focar na solução para $X(x)$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0)=0 \quad e \quad X(L)=0 \end{cases}$$

É o problema de autovalores e autofunções que resolvemos no início da aula!!!

Somente existem soluções não triviais se

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad e \quad X_n(x) = \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$$

com $n = 1, 2, \ldots$ $n \in \mathbb{N}$

λ não é mais uma variável contínua, somente pode tomar os valores discretos

$$\{\lambda_n\} = \left\{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2, \left(\frac{3\pi}{L}\right)^2, \ldots\right\}$$

- Agora vamos focar na solução para $T(t)$

$$T'(t) + \alpha^2\lambda T(t) = 0$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\alpha^2\lambda T(t)$$

$$\frac{dT(t)}{T(t)} = -\alpha^2\lambda\, dt$$

$$\int \frac{dT(t)}{T(t)} = -\alpha^2\lambda \int dt$$

$$\ln|T(t)| = -\alpha^2\lambda t + C$$

$$e^{\ln|T(t)|} = e^{-\alpha^2\lambda t + C} = e^{-\alpha^2\lambda t}\underbrace{e^{C}}_{D}$$

$$|T(t)| = D\underbrace{e^{-\alpha^2\lambda t}}_{positiva} \qquad D \in \mathbb{R}$$

$$T(t) = D e^{-\alpha^2\lambda t} \quad \text{, sinal em } D$$

mas λ tem que ser o mesmo para as duas eq. dif.

$$\boxed{T_n(t) \approx e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}}$$

os $T_n(t)$ correspondem aos $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots$

- Lembrando que $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\boxed{u_n(x,t) \approx e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)}$$

Autofunções ou Soluções Fundamentais do Problema de Condução do Calor (contorno)

quando $\lambda = \boxed{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$, $n = 1, 2, \ldots$ ← Autovalores.

- Resta satisfazer a condição inicial

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

A solução geral da eq. dif. homogênea será uma combinação linear de todas as soluções fundamentais

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

em que os coeficientes C_n ainda estão indeterminados

- Cada uma das soluções básicas (cada somando na série) satifaz a eq. dif. ($\alpha^2 u_{xx} = u_t$) e as condições de contorno ($u(0,t)=0$ e $u(L,t)=0$, $t>0$)

- Assumimos que a série é convergente. Para satisfazer a condição inicial ($u(x,0)=f(x)$, $0 \leq x \leq L$) temos que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \overset{1}{e^{0}} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) = f(x)$$

$$u(x,0) = \boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right)}$$

Série de Fourier em Senos de $f(x)$

Neste caso, $f(x)$, está definida entre $0 \leq x \leq L$ e é feita uma extensão periódica ímpar. Os C_n são calculados por

$$\boxed{C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}$$

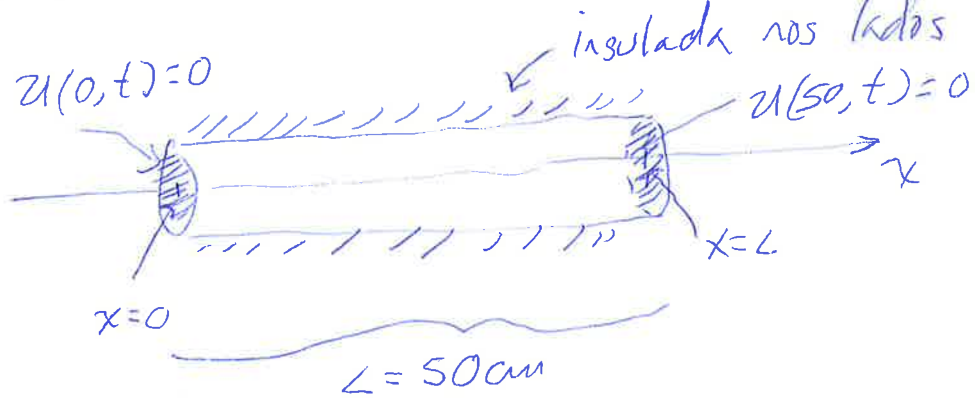
Resumindo, a solução do problema do calor de condução

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t \\ u(0,t)=0 \ \text{e} \ u(L,t)=0 \ , \ t>0 \\ u(x,0)=f(x) \ , \ 0\leq x\leq L \ , \ t=0 \end{cases}$$

é $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)$

com $c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$

Ex. Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 50 cm de comprimento, insulada nos lados, inicialmente a uma temperatura uniforme de 20°C em toda a barra e cujas extremidades são mantidas a 0°C para todo $t>0$.



Condição Inicial

Em $t=0$, $u(x,0)=f(x)=20°C = \text{cte}$ (não depende de x)

Condição de Contorno

$u(0,t)=0$ e $u(50,t)=0$, $\forall t>0$.

O problema satisfaz as restrições discutidas anteriormente (15)
e a solução será ($L=50$, $f(x)=20$)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{50}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{50}x\right)$$

com $C_n = \frac{2}{5\cancel{0}} \int_0^{50} 2\cancel{0} \cdot \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{50}x\right) dx \qquad n = 1, 2, \ldots$

$$C_n = \frac{4}{\cancel{5}} (-1) \cos\left(n\frac{\pi}{50}x\right) \frac{\overset{1}{\cancel{50}}}{n\pi} \Big|_0^{50}$$

$$C_n = \frac{-40}{n\pi} \left[\cos(n\pi) - \overset{1}{\cancel{\cos(0)}}\right]$$

$$C_n = \frac{40}{n\pi} \underbrace{\left[1 - (-1)^n\right]}$$

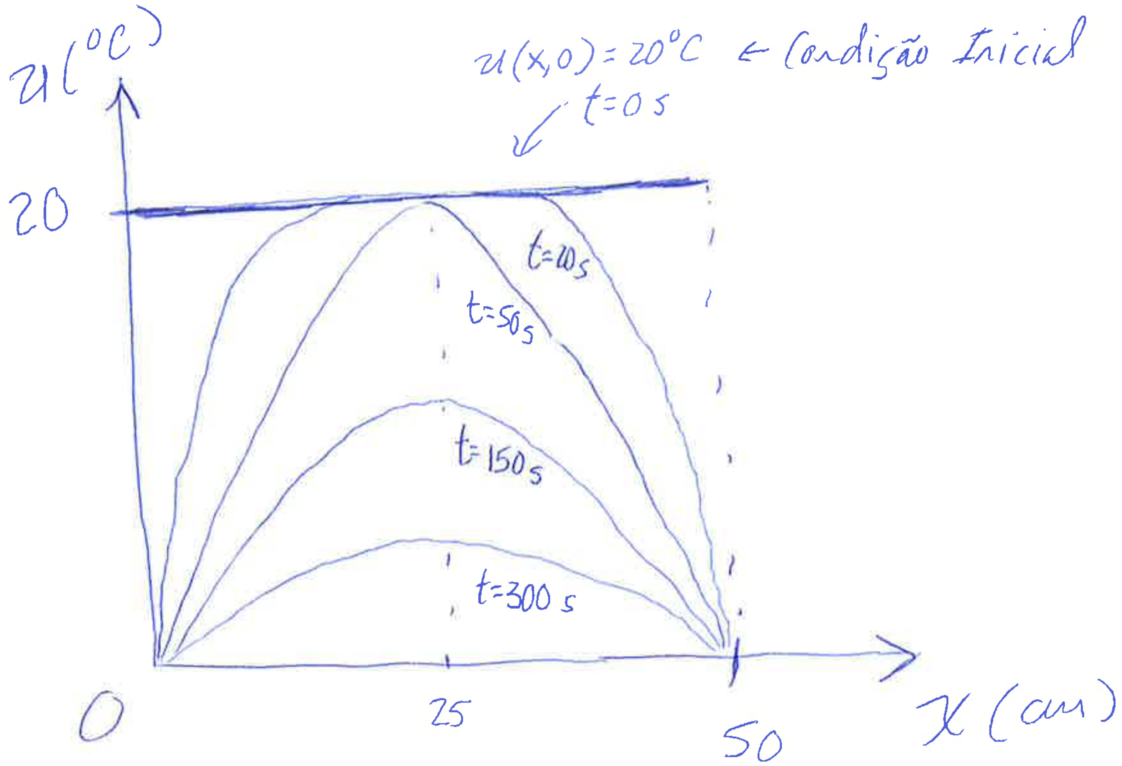
n - ímpar: $1-(-1)=2$

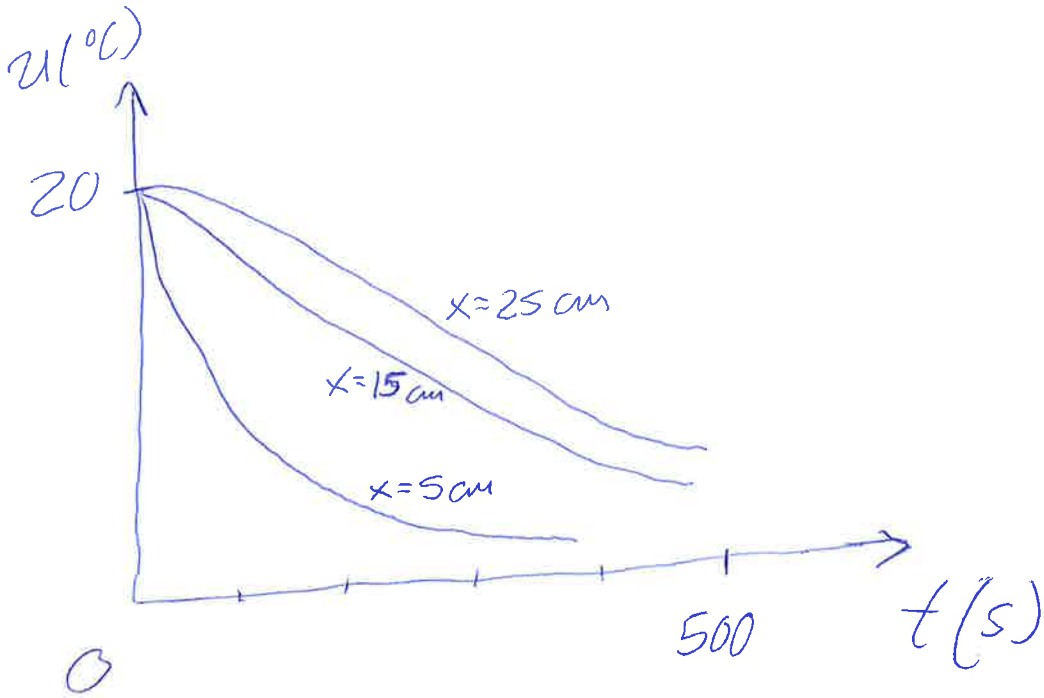
n - par: $1-1=0$

$$\boxed{C_n = \frac{80}{n\pi} \quad \text{se } n \text{ ímpar}}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{80}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n,\ \text{ímpar}}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{50}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{50}x\right)}$$

- Medindo t em segundos e $\alpha^2 = 1\,\text{cm}^2/\text{s}$ (colocando) são obtidos os gráficos a seguir.
- A presença de uma exponencial decrescente em cada termo da série faz com que ela convirja rápidamente. Isto é, podem ser usados poucos termos da somatoria para ter uma boa aproximação.


u(°C)
u(x,0) = 20°C ← Condição Inicial
t=0 s
20
t=10 s
t=50 s
t=150 s
t=300 s
0
25
50
x (cm)


u(°C)
20
x=25 cm
x=15 cm
x=5 cm
0
500
t (s)