1a) Provar a fórmula de Euler (1)

Vamos assumir que são conhecidas as expansões em série de Taylor em torno do ponto $x_0=0$ das funções e^x, $\cos(x)$ e $\text{sen}(x)$. Isto é,

convergente para todo $x \in \mathbb{R}$

$$(I)\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$(II)\quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad ''$$

$$(III)\quad \text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad ''$$

Para provar a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)$$

trocamos em (I) x por $i\theta$: $x = i\theta$ (Extensão aos números complexos)

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \dots$$

Notamos que

$$i^2 = -1,\quad i^3 = i^2 i = -i,\quad i^4 = i^2 i^2 = 1,\quad i^5 = i^4 i = i$$

$$i^6 = (i^2)^3 = -1,\quad i^7 = i^6 i = -i,\quad i^8 = i^4 i^4 = 1,\quad i^9 = i^8 i = i$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Consequentemente podemos separar em dois casos: quando aparece -1 ou 1 e quando aparece $-i$ e i como resultado da potência de i^n. O primeiro caso corresponde a uma potência de θ par e o segundo a uma impar.

(2)

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (i\theta)^n = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots\right) +$$

$$+\left(i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \frac{i\theta^9}{9!} + \cdots\right)$$

Como os números da primeira soma são pares podemos escrevê-los como $2n$ e os da segunda soma são ímpares e escrevemos como $2n+1$. As duas somas são alternadas. Deve aparecer $(-1)^n$. Na segunda soma o i pode ser colocado em evidência.

$$e^{i\theta} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}}_{(II)} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{(III)}$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Se $\theta = \pi$

$$e^{i\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}^{-1} + i\,\underbrace{\mathrm{sen}(\pi)}^{0}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Eq. mais bela da Matemática.

1

1b) Representação de uma função em série de potências em torno de $x_0 = 0$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

derivada de ordem n

onde $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

No caso $f(x) = \ln(1+x)$

$f(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$f'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1 \Longrightarrow a_1 = \dfrac{1}{1!} = 1$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$

$f''(0) = \dfrac{-1}{(1+0)^2} = -1 \Longrightarrow a_2 = \dfrac{-1}{2!} = -\dfrac{1}{2}$

$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$

$f'''(0) = 2 \Longrightarrow a_3 = \dfrac{2}{3!} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$f^{IV}(x) = \dfrac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}$

$f^{IV}(0) = -6 \Longrightarrow a_4 = \dfrac{-6}{4!} = \dfrac{-6}{24} = -\dfrac{1}{4}$

$\vdots$

$f^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ $\quad a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}$

$\left(a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n-1} x^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-n}{n+1} x$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{-nx}{n+1}\right] = -x$$

Pelo teste da razão se $|-x| < 1 \Rightarrow |x| < 1$
a série é convergente.

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{se } |x| < 1}$$

Outro caminho é usando a série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^n) = \frac{1}{1-x} \quad \text{se } |x| < 1$$

e o fato que $\frac{d[\ln(1+x)]}{dx} = \frac{1}{1+x}$

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}\,dx$$

mas $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ se $|x|<1$

$$\ln(1+x) = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)dx \qquad \text{se } |x|<1$$

Para os valores de x em que a série é convergente é válido trocar o sinal de integral com o de somatória

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \int x^n\,dx\right] \qquad \text{se } |x|<1$$

$$\text{"} \quad = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right] \qquad \text{se } |x|<1$$

$K = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right] + K \qquad \text{se } |x|<1$$

Para determinar K colocamos $x=0$ na última linha

$$0 = \ln(1+0) = \sum_{n=0}^{\infty}(0) + K \longrightarrow \boxed{K=0}$$

Logo

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{se } |x|<1$$

se $m = n+1$ e $n = m-1$

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m} \qquad \text{se } |x|<1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

2a) $1 \cdot y''(x) + K^2 x^2 y(x) = 0$ (I) $K \to$ parâmetro

Solução na forma de série de Potência centrada em $x_0 = 0$

O coeficiente que acompanha a segunda derivada não depende de x. $x_0 = 0$ (e todos os outros) são pontos ordinários para a eq. dif.

(II) $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, assumindo que teremos uma série convergente e derivando temo a termo

$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$\downarrow$ derivando novamente

(III) $y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

Colocando (II) e (III) em (I)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + K^2 x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} K^2 a_n x^{n+2} = 0$$

A potência inicial de cada somatória deve ser a mesma

na primeira somatória se $n=2 \to x^0$

" segunda " " $n=0 \to x^2$

Temos que separar os dois primeiros somandos da primeira somatória.

$$2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{\substack{k = n-2 \\ n = k+2}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} K^2 a_n x^{n+2}}_{\substack{k = n+2 \\ n = k-2}} = 0$$

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{j=2}^{\infty} (j+2)(j+1) a_{j+2} x^j + \sum_{j=2}^{\infty} k^2 a_{j-2} x^j = 0$$

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{j=2}^{\infty} \left[(j+2)(j+1) a_{j+2} + k^2 a_{j-2} \right] x^j = 0$$

igualdade de polinômios

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 0$$

$$(j+2)(j+1) a_{j+2} + k^2 a_{j-2} = 0 \qquad j = 2, 3, \ldots$$

$$\boxed{a_{j+2} = \frac{-k^2 a_{j-2}}{(j+2)(j+1)}, \quad j = 2, 3, \ldots}$$

Eq. de Recorrência de 1ra ordem

Se $j=2 \longrightarrow a_4 = \dfrac{-k^2 a_0}{4 \cdot 3}$

$j=3 \longrightarrow a_5 = \dfrac{-k^2 a_1}{5 \cdot 4}$

$j=4 \longrightarrow a_6 = \dfrac{-k^2 a_2}{6 \cdot 5} = 0 \quad (a_2 = 0)$

$j=5 \longrightarrow a_7 = \dfrac{-k^2 a_3}{7 \cdot 6} = 0 \quad (a_3 = 0)$

$j=6 \longrightarrow a_8 = \dfrac{-k^2 a_4}{8 \cdot 7} = \dfrac{-k^2}{8 \cdot 7} \dfrac{-k^2 a_0}{4 \cdot 3} = \dfrac{k^4 a_0}{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3}$

$j=7 \longrightarrow a_9 = \dfrac{-k^2 a_5}{9 \cdot 8} = \dfrac{-k^2}{9 \cdot 8} \dfrac{-k^2 a_1}{5 \cdot 4} = \dfrac{k^4 a_1}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}$

$j=8 \longrightarrow a_{10} = 0 \quad (a_6 = 0)$

$j=9 \longrightarrow a_{11} = 0 \quad (a_7 = 0)$

$$j=10 \longrightarrow a_{12} = \frac{-k^2 a_8}{12\cdot 11} = \frac{-k^2}{12\cdot 11}\,\frac{k^4 a_0}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} = \frac{-k^6 a_0}{12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3}$$

$$j=11 \longrightarrow a_{13} = \frac{-k^2 a_9}{13\cdot 12} = \frac{-k^2}{13\cdot 12}\,\frac{k^4 a_1}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} = \frac{-k^6 a_1}{13\cdot 12\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4}$$

$$j=12 \longrightarrow a_{14} = 0 \quad (a_{10}=0)$$

$$j=13 \longrightarrow a_{15} = 0 \quad (a_{11}=0)$$

$$j=14 \longrightarrow a_{16} = \frac{-k^2 a_{12}}{16\cdot 15} = \frac{-k^2}{16\cdot 15}\,\frac{-k^6 a_0}{12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} = \frac{k^8 a_0}{16\cdot 15\cdot 12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3}$$

$$j=15 \longrightarrow a_{17} = \frac{-k^2 a_{13}}{17\cdot 16} = \frac{-k^2}{17\cdot 16}\,\frac{-k^6 a_1}{13\cdot 12\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} = \frac{k^8 a_1}{17\cdot 16\cdot 13\cdot 12\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4}$$

múltiplos de 4 $(4n)$

$n=0$ $\quad a_0 = +1\cdot a_0$

$n=1$ $\quad a_4 = \dfrac{-k^2 a_0}{4\cdot 3}$

$n=2$ $\quad a_8 = \dfrac{+k^4 a_0}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3}$

$n=3$ $\quad a_{12} = \dfrac{-k^6 a_0}{12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3}$

$n=4$ $\quad a_{16} = \dfrac{+k^8 a_0}{16\cdot 15\cdot 12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3}$

$\vdots$

$$a_{4n} = \frac{(-1)^n k^{2n} a_0}{(4n)(4n-1)\cdots 4\cdot 3}$$

Resto 1 na divisão por 4 $(4n+1)$

$a_1 = 1\cdot a_1$

$a_5 = \dfrac{-k^2 a_1}{5\cdot 4}$

$a_9 = \dfrac{k^4 a_1}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4}$

$a_{13} = \dfrac{-k^6 a_1}{13\cdot 12\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4}$

$a_{17} = \dfrac{k^8 a_1}{17\cdot 16\cdot 13\cdot 12\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4}$

$\vdots$

$$a_{4n+1} = \frac{(-1)^n k^{2n} a_1}{(4n+1)(4n)\cdots 5\cdot 4}$$

$a_2 = 0$

$a_6 = 0$

$a_{10} = 0$

$a_{14} = 0$

$a_{18} = 0$

$a_3 = 0$

$a_7 = 0$

$a_{11} = 0$

$a_{15} = 0$

$a_{19} = 0$

A solução da eq. dif. se $K \neq 0$ será dividida em duas somatórias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(4)

$$y(x) = a_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n K^{2n} x^{4n}}{(4n)(4n-1)\cdots 4\cdot 3}}_{y_1(x)} + a_1 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n K^{2n} x^{4n+1}}{(4n+1)(4n)\cdots 5\cdot 4}}_{y_2(x)} \quad K \neq 0$$

$y_1(x)$ e $y_2(x)$ são as soluções fundamentais, ou da base do espaço vetorial das funções que são solução da eq. dif. Como os coeficientes a_{4n} e a_{4n+1} são diferentes as duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ serão L.I.

a_0 e a_1 são coeficientes indeterminados

$$y_{gh}(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x). \leftarrow \text{combinação linear}$$

Se $K = 0$ a eq. dif se transforma em

$$y''(x) = 0$$

que tem como solução

$$y(x) = Ax + B \quad , A \text{ e } B \in \mathbb{R}$$
$$K = 0$$

25) $1 \cdot y''(x) - (1+x)\, y(x) = 0 \quad (I)$

Série de Potência centrada em $x_0 = 0$.

$x_0 = 0$ é um ponto ordinário

$$(II) \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$(III) \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Colocando (II) e (III) em (I)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Valores iniciais das séries

1ra série, $n=2$, x^0

2da série, $n=0$, x^0 → Separar a potência x^0 da primeira e segunda série.

3ra série, $n=0$, x^1

$$2a_2 - a_0 + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{\substack{k=n-2 \\ n=k+2}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}_{k=n} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}}_{\substack{k=n+1 \\ n=k-1}} = 0$$

$$2a_2 - a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}x^k = 0$$

$$2a_2 - a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2} - a_k - a_{k-1}\right]x^k = 0$$

↑ igualdade de polinômios

$$2a_2 - a_0 = 0 \longrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}a_0}$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = a_k + a_{k-1} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$\boxed{a_{k+2} = \frac{a_k + a_{k-1}}{(k+2)(k+1)} \qquad k = 1, 2, \ldots}$$

Relação de Recorrência de 2da ordem

$$k=1 \longrightarrow a_3 = \frac{a_1 + a_0}{3 \cdot 2}$$

$$k=2 \longrightarrow a_4 = \frac{a_2 + a_1}{4 \cdot 3} = \frac{\frac{1}{2}a_0 + a_1}{4 \cdot 3}$$

$$k=3 \longrightarrow a_5 = \frac{a_3 + a_2}{5 \cdot 4} = \frac{\frac{a_1 + a_0}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2}a_0}{5 \cdot 4} = \frac{a_1/6 + \frac{2}{3}a_0}{5 \cdot 4}$$

$$\vdots$$

todos dependem de a_1 e a_0.

Procuramos a primeira solução quando

$$\underbrace{a_0 \neq 0 \text{ e } \boxed{a_1 = 0}} \longrightarrow y_1(x)$$

$$y_1(x) = a_0 + \frac{1}{2}a_0 x^2 + \frac{1}{6}a_0 x^3 + \frac{1}{24}a_0 x^4 + \frac{1}{30}a_0 x^5 + \ldots$$

$a_0 \neq 0$
$a_1 = 0$
$a_2 = \frac{1}{2}a_0$

$$k=1 \to a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2}$$

$$k=2 \to a_4 = \frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$k=3 \to a_5 = \frac{2a_0}{5 \cdot 4 \cdot 3}$$

Segunda Solução $y_2(x)$.

$\underbrace{a_0 = 0 \quad e \quad a_1 \neq 0}$

$a_0 = 0$

$a_1 \neq 0$

$a_2 = 0$

$$y_2(x) = a_1 x + \frac{a_1}{6} x^3 + \frac{a_1}{12} x^4 + \frac{a_1}{120} x^5 + \cdots$$

$k=1 \rightarrow a_3 = \frac{a_1}{6}$

$k=2 \rightarrow a_4 = \frac{a_1}{12}$

$k=3 \rightarrow a_5 = \frac{a_1}{120}$

E a solução geral da eq. homogênea é

$$y_{gh}(x) = a_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + \cdots \right\} + a_1 \left\{ x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{120} x^5 + \cdots \right\}$$

a_0 e $a_1 \in \mathbb{R}$.

3a) Problema de Valor Inicial

$$x^2 y''(x) - 5x y'(x) + 8y(x) = 0 \quad , y(2) = 32$$
$$y'(2) = 0$$

É uma eq. de Cauchy-Euler. Vamos procurar soluções na forma $y(x) = x^m$ para $x > 0$.

$$y(x) = x^m$$
$$y'(x) = m x^{m-1}$$
$$y''(x) = m(m-1) x^{m-2}$$

Colocando na eq. dif.

$$x^2 m(m-1) x^{m-2} - 5 x m x^{m-1} + 8 x^m = 0$$

$$(m(m-1) - 5m + 8) x^m = 0$$

Como $x > 0$

$$m(m-1) - 5m + 8 = 0 \leftarrow \text{Eq. Caraterística}$$

$$m^2 - 6m + 8 = 0$$
$$m = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \quad 2$$

$$m_1 = 4 \quad m_2 = 2$$

Tipo I. Soluções Reais e Diferentes

$$y_{gh}(x) = C_1 x^2 + C_2 x^4 \quad , \quad x > 0$$

Usando a primeira restrição $y(2)=32$ (2)

$$32 = C_1 \cdot 2^2 + C_2\, 2^4$$

$$32 = 4C_1 + 16C_2$$

$$(I)\quad \boxed{8 = C_1 + 4C_2}$$

$$y'_{gh}(x) = 2C_1 x + 4C_2 x^3$$

Usando a segunda restrição $y'(2)=0$

$$0 = 2C_1 \cdot 2 + 4C_2 \cdot 2^3$$

$$0 = 4C_1 + 32C_2$$

$$(II)\quad \boxed{0 = C_1 + 8C_2}$$

$$(II) - (I)$$

$$4C_2 = -8$$

$$\boxed{C_2 = -2}$$

De (II) $C_1 = -8C_2$

$$C_1 = -8\cdot(-2)$$

$$\boxed{C_1 = 16}$$

$$\boxed{y(x) = 16x^2 - 2x^4 \,, \quad x>0}$$

Solução do Problema de Valor Inicial

3b) $2xy''(x) + (1+x)y'(x) + y(x) = 0$

Série de Potências centrada em $x_0 = 0$.

$x_0 = 0$ é um ponto SINGULAR da eq. dif. dada.

$$y''(x) + \underbrace{\frac{1+x}{2x}}\, y'(x) + \underbrace{\frac{1}{2x}}\, y(x) = 0$$

Forma Padrão da Eq. Dif.

no denominador { potência de x no máximo 1 ✓

potência de x no máximo 2. ✓

$x_0 = 0$ é um ponto SINGULAR REGULAR

Pelo Teorema de Frobenius deve existir pelo menos uma solução do tipo

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

onde r é uma constante a ser determinada.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

Colocando a função e suas derivadas na eq. dif.

$$2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$x^r\Big[\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\Big]=0$$

$$x^r\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\big[2(n+r)(n+r-1)a_n+(n+r)a_n\big]x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)a_n x^n\Big]=0$$

$$x^r\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2r-1)(n+r)a_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)a_n x^n\Big]=0$$

1ra série, se $n=0 \rightarrow x^{-1} \longrightarrow$ Colocar $n=0$ fora

2da ,, , se $n=0 \rightarrow x^0$

$n=k+1$, $k=n-1$ $\qquad$ $k=n$

$$x^r\Big[(2r-1)r\,a_0\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2r-1)(n+r)a_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)a_n x^{n}\Big]=0$$

$$x^r\Big[(2r-1)r\,a_0\frac{1}{x}+\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2r+1)(k+r+1)a_{k+1}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r+1)a_k x^k\Big]=0$$

$$x^r\Big[(2r-1)r\,a_0\frac{1}{x}+\sum_{k=0}^{\infty}\big[(2k+2r+1)a_{k+1}+a_k\big](k+r+1)x^k\Big]=0$$

$\boxed{x>0}$

igualdade de polinômios

$(2r-1)r\,a_0=0$

mas $a_0\neq 0$

$\boxed{(2r-1)r=0}$ Eq. Indicial

$r_1=0$ e $r_2=\frac{1}{2}$ $\leftarrow$ raízes indiciais

$$(I)\ \boxed{\left[(2k+2r+1)a_{k+1}+a_k\right](k+r+1)=0}$$ Eq. de Recorrência Geral $k=0,1,\dots$

- Se $r=r_1=0$ substituindo em (I)

$$\left[(2k+1)a_{k+1}+a_k\right](k+1)=0$$

mas $(k+1)\neq 0$ $k=0,1,\dots$

$$(2k+1)a_{k+1}+a_k=0$$

$$\boxed{a_{k+1}=\frac{-a_k}{2k+1}\qquad k=0,1,2,\dots}$$ Eq. de Recorrência para $r=0$

$$k=0\longrightarrow a_1=\frac{-a_0}{1}$$

$$k=1\longrightarrow a_2=\frac{-a_1}{3}=\frac{+a_0}{1\cdot 3}$$

$$k=2\longrightarrow a_3=\frac{-a_2}{5}=\frac{-a_0}{1\cdot 3\cdot 5}$$

$$k=3\longrightarrow a_4=\frac{-a_3}{7}=\frac{+a_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{(-1)^n a_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$

$$\boxed{y_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}}$$ Primeira Solução

(4)

$-$ Se $r = r_2 = \frac{1}{2}$ substituindo em (I)

$$\left[(2k+2)a_{k+1} + a_k\right]\left(k+\frac{3}{2}\right) = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots$$

mas $k + \frac{3}{2} \neq 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots$

$$2(k+1)a_{k+1} + a_k = 0$$

$$\boxed{a_{k+1} = \frac{-a_k}{2(k+1)} \qquad k = 0, 1, \ldots}$$

Eq. de Recorrência para $r = 1/2$

$$k=0 \rightarrow a_1 = \frac{-a_0}{2}$$

$$k=1 \rightarrow a_2 = \frac{-a_1}{2 \cdot 2} = \frac{a_0}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{a_0}{2^3} = \frac{a_0}{2^2 \cdot 2!}$$

$$k=2 \rightarrow a_3 = \frac{-a_2}{2 \cdot 3} = -\frac{a_0}{2^4 \cdot 3} = \frac{-a_0}{2^3 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{-a_0}{2^3 \cdot 3!}$$

$$k=3 \rightarrow a_4 = -\frac{a_3}{2 \cdot 4} = \frac{a_0}{2^5 \cdot \cancel{3} \cdot 4} = \frac{a_0}{2^4 \cdot \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 4!}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{2^n \cdot n!}$$

$$\boxed{y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n \cdot n!}}$$

Segunda Solução

$$y_{g.h.}(x) = C_1 y_1(x) x^0 + C_2 \underbrace{y_2(x) x^{1/2}}$$

C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$

4a) Transformada de Laplace

$$y'(t) - y(t) = te^t \operatorname{sen}(t) \ , \ y(0) = 0.$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

$$sY(s) - \cancelto{0}{y(0)} - Y(s) = \mathcal{L}\{te^t \operatorname{sen}(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$ ← Usando a Definição ou uma tabela

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad \text{se } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Teorema da Derivada da Transformada

No nosso problema

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen}(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \quad \text{se } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

Primeiro Teorema da Translação

No nosso problema

$$\mathcal{L}\{e^t \cdot \underbrace{t\operatorname{sen}(t)}\} = \frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}$$

$$sY(s) - Y(s) = \frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}$$

$$Y(s)\cancel{(s-1)} = \frac{2\cancel{(s-1)}}{((s-1)^2+1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{2}{[(s-1)^2+1]^2} = 2\cdot\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)$$ 2

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{e^t\text{sen}(t)\} = \frac{1}{(s-1)^2+1}$$ ← Primeiro Teorema da Translação

Teorema da Convolução

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

No nosso problema temos que calcular la convolução de $f(t) = g(t) = e^t\text{sen}(t)$

$$y(t) = 2e^t\text{sen}(t) * e^t\text{sen}(t) = 2\int_0^t e^{\tau}\text{sen}(\tau)e^{t-\tau}\text{sen}(t-\tau)\,d\tau$$

$$= 2\int_0^t e^t\,\text{sen}(\tau)\,\text{sen}(t-\tau)\,d\tau$$

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a)$$

$$\text{sen}(t-\tau) = \text{sen}(t)\cos(-\tau) + \text{sen}(-\tau)\cos(t)$$

$$\text{sen}(t-\tau) = \text{sen}(t)\cos(\tau) - \text{sen}(\tau)\cos(t)$$

$$y(t)=2\int_0^t e^{t}\,sen(\tau)\left[sen(t)\cos(\tau)-sen(\tau)\cos(t)\right]d\tau$$

$$y(t)=2e^t sen(t)\boxed{\int_0^t sen(\tau)\cos(\tau)\,d\tau}-2e^t\cos(t)\boxed{\int_0^t sen^2(\tau)\,d\tau}$$

$$u(\tau)=sen(\tau)$$
$$du=\cos(\tau)\,d\tau$$
$$\tau=0\rightarrow u(0)=0$$
$$\tau=t\rightarrow u(t)=sen(t)$$

$$\int_0^t sen(\tau)\cos(\tau)\,d\tau=\int_0^{sen(t)}u\,du=\left.\frac{u^2}{2}\right|_0^{sen(t)}=\frac{sen^2(t)}{2}$$

$$\cos(2\tau)=\cos^2(\tau)-sen^2(\tau)$$
$$\cos^2(\tau)=1-sen^2(\tau)$$
$$\cos(2\tau)=1-2sen^2(\tau)$$
$$sen^2(\tau)=\frac{1-\cos(2\tau)}{2}=\frac{1}{2}\left[1-\cos(2\tau)\right]$$

$$\int_0^t sen^2(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\left[\int_0^t d\tau-\int_0^t\cos(2\tau)\,d\tau\right]=\frac{1}{2}\left[t-\left.\frac{sen(2\tau)}{2}\right|_0^t\right]$$

$$\int_0^t sen^2(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\left[t-\frac{sen(2t)}{2}\right]$$

$$y(t)=2e^t sen(t)\frac{sen^2(t)}{2}-2e^t\cos(t)\frac{1}{2}\left[t-\frac{sen(2t)}{2}\right]$$

$$y(t)=e^t\left[sen^3(t)-t\cos(t)+\frac{1}{2}\cos(t)\underbrace{sen(2t)}_{2sen(t)\cos(t)}\right]$$

4

$$y(t) = e^t \left[sen^3(t) - t\cos(t) + sen(t)\cos^2(t) \right]$$

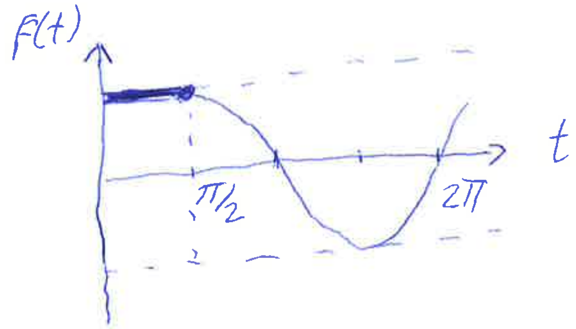
$$y(t) = e^t \left[sen(t) \underbrace{\left[sen^2(t) + \cos^2(t) \right]}_{1} - t\cos(t) \right]$$

$$\boxed{y(t) = e^t \left[sen(t) - t\cos(t) \right]}$$

4b) Transformada de Laplace

$$y''(t) + y'(t) = f(t) \quad , \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 \ , & \text{se } 0 \leq t \leq \pi/2 \\ \text{sen}(t) \ , & \text{se } t \geq \pi/2 \end{cases}$$



Das notas de aula

Para uma função do tipo $f(t) = \begin{cases} g(t) \ , & t < a \\ h(t) \ , & t \geq a \end{cases}$

$$f(t) = g(t) - g(t)\,u(t-a) + h(t)\,u(t-a)$$

$u(t-a)$ é a função degrau unitário ou de Heaviside

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 \ , & \text{se } t < a \\ 1 \ , & \text{se } t \geq a \end{cases}$$

$$f(t) = 1 - u(t-\pi/2) + \text{sen}(t)\,u(t-\pi/2)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE DA FUNÇÃO DE HEAVISIDE

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \underbrace{\mathcal{L}\{1\}}_{\frac{1}{s}} - \underbrace{\mathcal{L}\{u(t-\pi/2)\}}_{-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s}} + \mathcal{L}\{\text{sen}(t)\,u(t-\pi/2)\}$$

Forma Alternativa do Segundo teorema da Translação

$$\mathcal{L}\{f(t)\,u(t-a)\} = e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(t+a)\}$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(t)\,u(t-\pi/2)\} = e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\mathcal{L}\{\text{sen}(t+\pi/2)\}$$

$$\text{sen}(t+\pi/2) = \cos(t)$$

2

$$\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} + e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}$$

Voltando a eq. dif.

$$y''(t) + y'(t) = f(t) \quad , \quad y(0)=1 \quad , y'(0)=0$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\overbrace{s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{1} - \cancel{y'(0)}^{0}} + \overbrace{sY(s) - \underbrace{y(0)}_{1}} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$s^2Y(s) - s + sY(s) - 1 = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$(s^2+s)Y(s) - s - 1 = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$s(s+1)\,Y(s) = s+1 + \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$Y(s) = \frac{\cancel{(s+1)}}{s\cancel{(s+1)}} + \frac{1}{s^2(s+1)} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2(s+1)} + \frac{e^{-\pi/2\, s}}{(s+1)(s^2+1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \underbrace{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}} - e^{-\frac{\pi}{2}s}\cdot\underbrace{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}} + e^{-\pi/2\, s}\underbrace{\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}}$$

Convolução

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$$f*g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}\right\} = t * e^{-t}$$

③

$$\boxed{t * e^{-t} = \int_0^t \tau e^{-(t-\tau)}\,d\tau} = \int_0^t e^{\tau}(t-\tau)\,d\tau = e^{-t} * t$$

$$t * e^{-t} = e^{-t}\int_0^t \tau e^{\tau}\,d\tau$$

por partes $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$u = \tau \longrightarrow du = d\tau$$
$$dv = e^{\tau}d\tau \qquad v = e^{\tau}$$

$$t * e^{-t} = e^{-t}\left[\tau e^{\tau}\Big|_0^t - \int_0^t e^{\tau}d\tau\right]$$

$$t * e^{-t} = e^{-t}\left[t e^{t} - (e^{t} - 1)\right]$$

$$t * e^{-t} = t - 1 + e^{-t}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\,\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t} + t - 1}$$

Para calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}s}\underbrace{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}}_{F(s)}\right\}$ lembramos

o Segundo Teorema da Translação

Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $a > 0$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\,u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

4

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\overset{a}{\frac{\pi}{2}}s}\,\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-(t-\pi/2)}u(t-\pi/2)+(t-\tfrac{\pi}{2}-1)u(t-\pi/2)}$$

Para calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}$$ primeiro vamos calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}$$ usando o Teorema da Convolução.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t} \quad e \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = sen(t)$$

$$sen(t) * e^{-t} = \int_0^t sen(\tau)\,e^{-(t-\tau)}\,d\tau$$

$$sen(t) * e^{-t} = e^{-t}\int_0^t sen(\tau)e^{\tau}\,d\tau$$

Integrando por partes $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$I = \int_0^t sen(\tau)e^{\tau}d\tau = e^{\tau}sen(\tau)\Big|_0^t - \int_0^t e^{\tau}\cos(\tau)d\tau$$

$$u = sen(\tau) \rightarrow du = \cos(\tau)d\tau$$
$$dv = e^{\tau}d\tau \rightarrow v = e^{\tau}$$

$$I = e^t sen(t) - \int_0^t e^{\tau}\cos(\tau)d\tau \leftarrow$$ Integrando por partes novamente

$$u = \cos(\tau) \rightarrow du = -sen(\tau)d\tau$$
$$dv = e^{\tau}d\tau \rightarrow v = e^{\tau}$$

(5)

$$I = e^t \operatorname{sen}(t) - \left[\cos(\tau) e^\tau \Big|_0^t + \underbrace{\int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(\tau) d\tau}_{I} \right]$$

$$I = e^t \operatorname{sen}(t) - \left[\cos(t) e^t - 1 + I \right]$$

$$2I = e^t \operatorname{sen}(t) - e^t \cos(t)$$

$$I = \frac{1}{2} e^t \left[\operatorname{sen}(t) - \cos(t) \right]$$

Voltando ao calculo da convolução $\operatorname{sen}(t) * e^{-t}$

$$\operatorname{sen}(t) * e^{-t} = e^{-t} \frac{1}{2} e^t \left[\operatorname{sen}(t) - \cos(t) \right]$$

$$\operatorname{sen}(t) * e^{-t} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen}(t) - \cos(t) \right]$$

Com isso

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} \right\} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen}(t) - \cos(t) \right]$$

e usando mais uma vez o segundo teorema da translação

$$\mathcal{L} \{ f(t-a) u(t-a) \} = e^{-as} F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-\frac{\pi}{2} s} \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} \right\} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen}(t - \pi/2) - \cos(t - \pi/2) \right] u(t - \pi/2)$$

Consequentemente

$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ Y(s) \}$ é

$$y(t) = \underbrace{1}_{} + \underbrace{e^{-t} + t - 1}_{} + \underbrace{e^{-(t-\pi/2)} u(t-\pi/2) + (t-\pi/2-1)\, u(t-\pi/2)}_{} + 6$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(t-\pi/2) - \cos(t-\pi/2)\right] u(t-\pi/2)}_{}.$$

$$y(t) = e^{-t} + t\cancel{-1} + e^{-(t-\pi/2)} u(t-\pi/2) + (t-\pi/2-1)\, u(t-\pi/2) + \frac{1}{2}\left[-\cos(t) - \operatorname{sen}(t)\right] u(t-\pi/2)$$

- Se $t < \pi/2 \rightarrow y(t) = e^{-t} + t$

- Se $t > \pi/2 \rightarrow y(t) = e^{-t} + t + e^{-t} e^{\pi/2} + (t - \pi/2 - 1) - \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(t) + \cos(t)\right]$

Voltando na eq. dif. (Como verificação)

$y''(t) + y'(t) = f(t) \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

podemos resolver a eq. homogênea correspondente

$y''(t) + y'(t) = 0$

$r^2 + r = 0 \rightarrow$ Eq. característica

$r(r+1) = 0$

$r_1 = 0 \quad r_2 = -1$ tipo 1

$y_{sh}(t) = C_1 \cdot 1 \cdot C_2 e^{-t}$

Vamos propor uma solução particular para a eq. não homogênea

$$y''(t) + y'(t) = 1$$

$$y_p = A_1 t + A_0$$

$$y_p' = A_1$$

$$y'' = 0$$

Colocando de volta na eq. dif.

$$A_1 = 1$$

$$y_p(t) = t$$

$$y_{g.n.h.}(x) = C_1 + C_2 e^{-t} + t$$

Usando a primeira condição inicial $y(0) = 1$

$$1 = C_1 + C_2 \cdot e^0 + 0$$

$$\boxed{C_1 + C_2 = 1}$$

$$y'_{g.n.h.}(t) = -C_2 e^{-t} + 1$$

Usando a segunda condição inicial $y'(0) = 0$

$$0 = -C_2 \cdot 1 + 1$$

$$\boxed{C_2 = 1}$$

$$C_1 = 0$$

$$y(t) = e^{-t} + t$$

Vamos propor agora uma solução particular para a eq.

$$y''(t) + y'(t) = \operatorname{sen}(t)$$

$$y_p(t) = A\operatorname{sen}(t) + B\cos(t)$$

$$y'_p(t) = A\cos(t) - B\operatorname{sen}(t)$$

$$y''_p(t) = -A\operatorname{sen}(t) - B\cos(t)$$

$$-A\operatorname{sen}(t) - B\cos(t) + A\cos(t) - B\operatorname{sen}(t) = \operatorname{sen}(t)$$

$$(-A-B)\operatorname{sen}(t) + (-B+A)\cos(t) = 1\operatorname{sen}(t) + 0\cos(t)$$

$$+\begin{cases} -A-B = 1 \\ +A-B = 0 \end{cases}$$

$$-2B = 1$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

$$A = B = -\frac{1}{2}$$

$$y_p(t) = \frac{-1}{2}(\operatorname{sen}(t) + \cos(t))$$

$$y_{g.n.h.}(t) = C_1 + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(t) + \cos(t)]$$

5a) $y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 1$, $y(0) = 0$ ①

Integral de Convolução de $f(t)$ e $g(t)$

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

e $\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\} = F(s)\cdot G(s)$

onde $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e

$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$.

Se $g(t) = 1$

$$y(t) * 1 = \int_0^t y(\tau)\,d\tau$$

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ e $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{Y(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + 6\mathcal{L}\{y(t)\} + 9\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau)\,d\tau\right\} = \mathcal{L}\{1\}$$

$$\overbrace{sY(s) - \cancel{y(0)}^{0}} + 6Y(s) + 9\frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s}$$

$$Y(s)\left(s + 6 + \frac{9}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s)\left(\frac{s^2+6s+9}{\cancel{s}}\right) = \frac{1}{\cancel{s}}$$

$$Y(s)(s+3)^2 = 1$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s+3}\cdot\frac{1}{s+3}}_{\text{convolução}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$$

2

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\cdot\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t} * e^{-3t}$$

$$f*g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

$$e^{-3t} * e^{-3t} = \int_0^t e^{-3\tau}e^{-3(t-\tau)}\,d\tau$$

$$'' \quad = e^{-3t}\int_0^t e^{-3\tau}e^{+3\tau}\,d\tau$$

$$'' \quad = e^{-3t}\int_0^t d\tau = e^{-3t}\,\cancel{\tau}\Big|_0^t$$

$$'' \quad = te^{-3t}$$

$$\boxed{y(t) = te^{-3t}}$$

5b) $y''(t) - 2y'(t) = 1 + \delta(t-2)$, $y(0)=0$
$y'(0)=1$ (1)

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$$

$\delta(t-t_0) \rightarrow$ Delta de Dirac

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t=t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \qquad \int_0^\infty \delta(t-t_0)\,dt = 1$$

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 2\mathcal{L}\{y'(t)\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\delta(t-2)\}$$

$$s^2Y(s) - s\cancel{y(0)}^{0} - \underbrace{y'(0)}_{1} - 2(sY(s) - \cancel{y(0)}^{0}) =$$

$$= \frac{1}{s} + e^{-2s}$$

$$s^2Y(s) - 1 - 2sY(s) = \frac{1}{s} + e^{-2s}$$

$$(s^2-2s)Y(s) = 1 + \frac{1}{s} + e^{-2s}$$

$$s(s-2)Y(s) = 1 + \frac{1}{s} + e^{-2s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-2)} + \frac{1}{s^2(s-2)} + \frac{e^{-2s}}{s(s-2)}$$

Decompondo em frações parciais

$$\frac{1}{s(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2}$$

$$A = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{1}{s(s-2)} = \frac{-1/2}{s} + \frac{1/2}{s-2}}$$

$$\frac{1}{s^2(s-2)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s-2} \qquad C = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{s^2(s-2)} \quad \frac{1/4}{s-2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}$$

$$\frac{1 - \frac{1}{4}s^2}{\cancel{s^2}(s-2)} = \frac{As+B}{\cancel{s^2}}$$

$$1 - \frac{1}{4}s^2 = (As+B)(s-2) = As^2 - 2As + Bs - 2B$$

$$A = -\frac{1}{4} \qquad -2B = 1$$

$$B = -1/2$$

$$\frac{1}{s^2(s-2)} = \frac{-\frac{1}{4}s + \frac{1}{2}}{s^2} + \frac{1/4}{s-2}$$

$$\boxed{\frac{1}{s^2(s-2)} = \frac{-1/4}{s} \quad \frac{1/2}{s^2} + \frac{1/4}{s-2}} = \frac{-\frac{1}{4}s(s-2) \quad \frac{1}{2}(s-2) + \frac{1}{4}s^2}{s^2(s-2)}$$

$$Y(s) = \frac{-1/2}{s} + \frac{1/2}{s-2} - \frac{1/4}{s} - \frac{1/2}{s^2} + \frac{1/4}{s-2} - e^{-2s}\frac{1/2}{s} + e^{-2s}\frac{1/2}{s-2}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t} + \mathcal{L}^{-1}\{\downarrow\}.$$

Forma Inversa do Segundo Teorema da Translação

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,u(t-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\overset{a}{2}s}\,\overset{\nearrow 1}{\frac{1}{s}}\} = 1 \cdot u(t-2)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}\,\frac{1}{s-2}\} = e^{2(t-2)}u(t-2)$$

$\downarrow e^{2t}$

$$y(t) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}u(t-2) + \frac{1}{2}e^{2(t-2)}u(t-2)$$

Se $t < 2 \rightarrow y(t) = -\frac{3}{4}(1-e^{2t}) - \frac{1}{2}t$

Se $t \geq 2 \rightarrow y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e^{2(t-2)}$