



Escola Politécnica da USP
Engenharia de Petróleo

DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE CONTÍNUA

Aulas 10, 11, 12 e 13 – Ministrante: Prof. Josemir C. Santos
Autora: Prof.a Regina Meyer Branski

Objetivos

- Distribuição Normal e Distribuição Normal Padrão
- Encontrando Probabilidades
- Encontrando Valores
- Distribuições Amostrais e Teorema do Limite Central
- Aproximações Normais para Distribuições Binomiais

Aula de hoje!

- Interpretar gráficos de distribuição de probabilidade normal
- Encontrar áreas sob a curva normal padrão

Variáveis Aleatórias

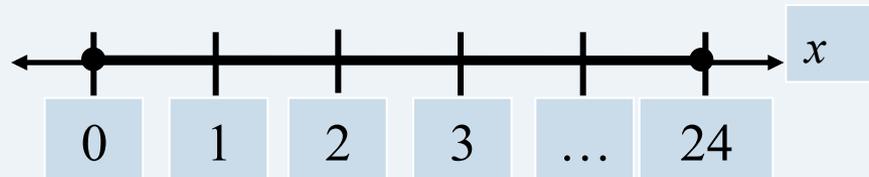
4

- Variável Aleatória Discreta
 - ▣ Tem um número finito ou contável de possíveis resultados a serem listados

- Variável Aleatória Contínua
 - ▣ Tem um número infinito de possíveis resultados representados por um intervalo na reta numérica.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Tempo diário (em horas) que um vendedor passa fazendo ligações
- $x = \{\text{qualquer número entre 0 e 24 horas}\}$

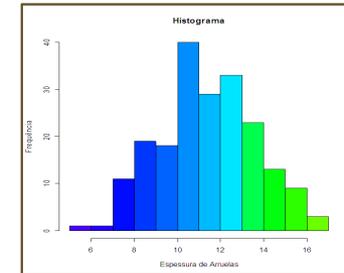


Distribuição Discreta X Distribuição Contínua

Distribuição de
Probabilidade Discreta



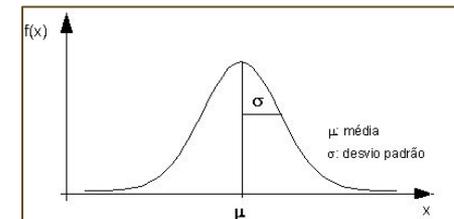
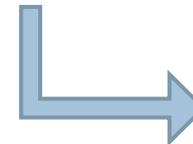
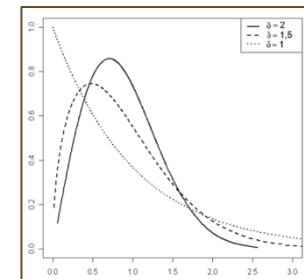
Histograma



Distribuição de
Probabilidade Contínua



Função Densidade
de Probabilidade
(fdp)



Distribuição de Probabilidade Contínua

Variáveis Contínuas

```
graph TD; A[Variáveis Contínuas] --> B[Distribuição de Probabilidade Contínua]; B --> C[Normal];
```

Distribuição de
Probabilidade
Contínua

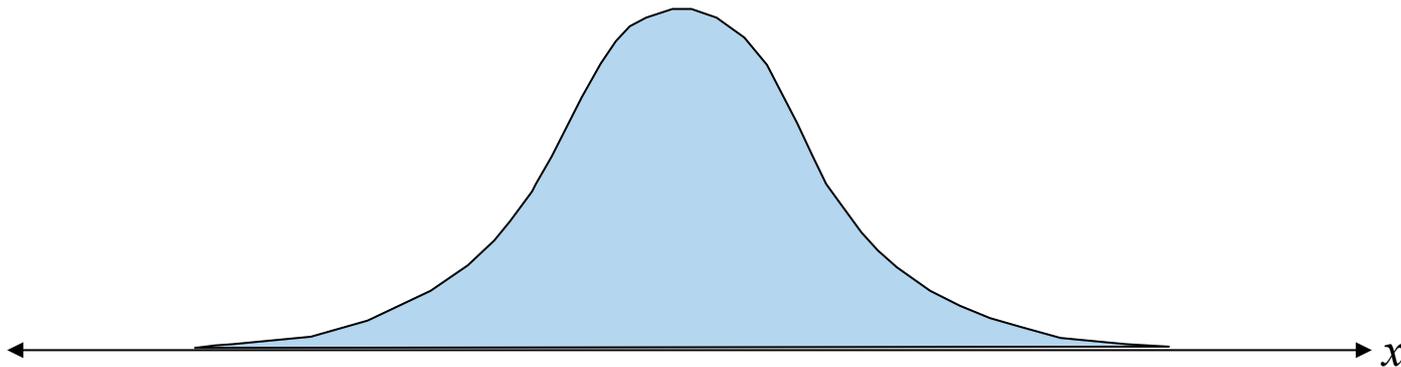
Normal

Distribuição Normal

- Modelam grande número de fenômenos
 - Pressão sanguínea dos humanos
 - Custos domésticos
 - Tempo de vida de um equipamento
 - Etc....

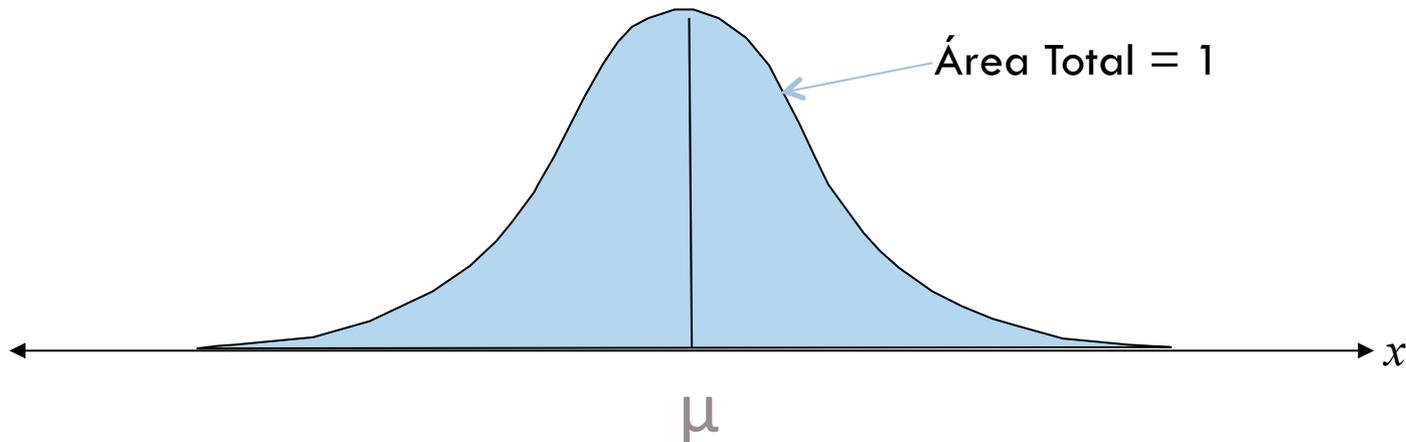
Distribuição Normal

- Probabilidade Contínua mais importante
- Gráfico de Distribuição Normal é chamado Curva Normal



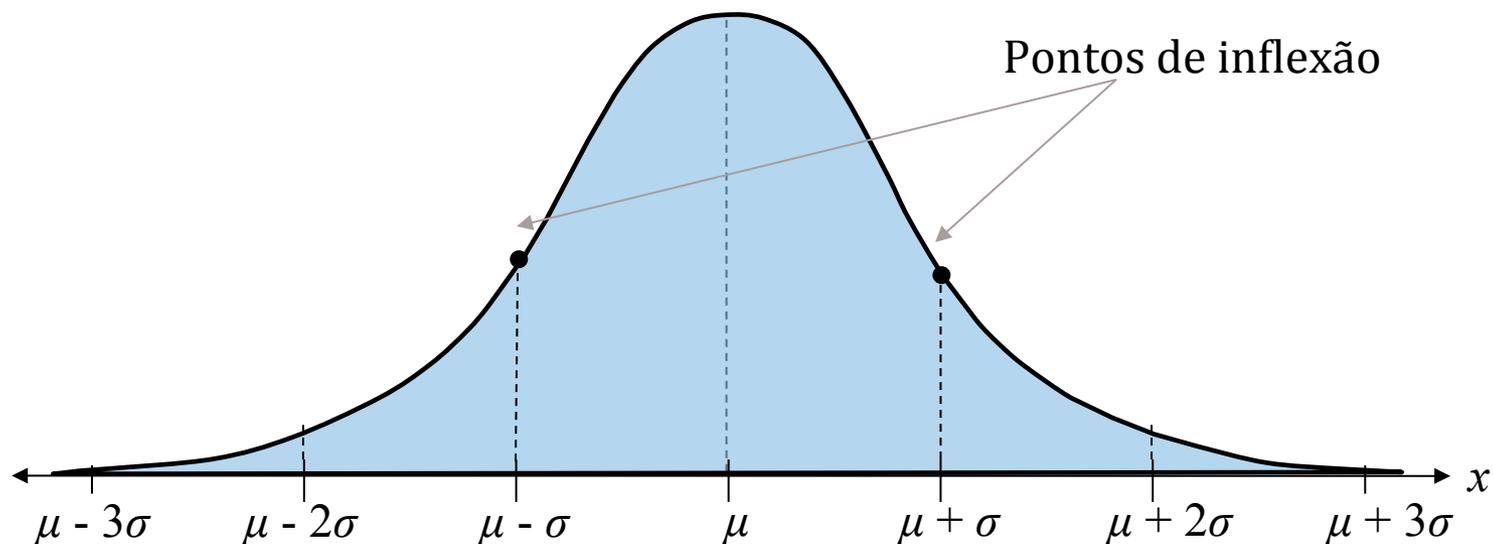
Propriedades da Distribuição Normal

- Média, Mediana e Moda são iguais
- Tem formato de sino e é simétrica em relação à média
- Área total abaixo da curva é igual a 1
- A curva se aproxima do eixo x , mas nunca toca



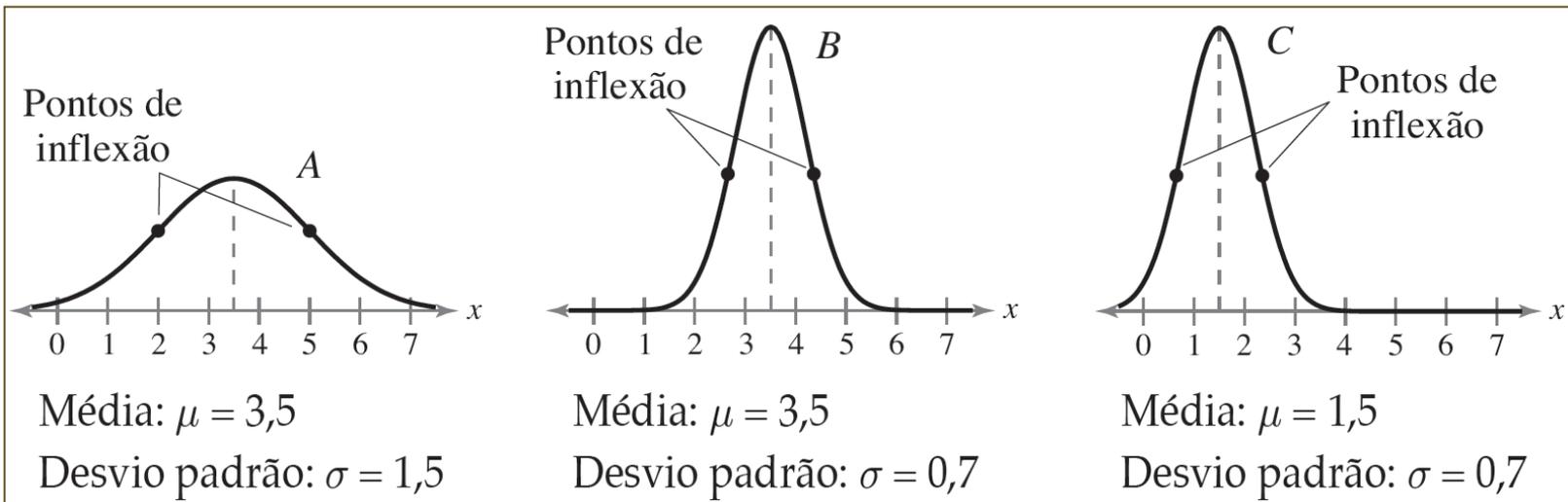
Propriedades da Distribuição Normal

- Entre $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ o gráfico curva para baixo
- À esquerda de $\mu - \sigma$ e à direita de $\mu + \sigma$ o gráfico se curva para cima
- Pontos de Inflexão: pontos onde a curva muda de trajetória



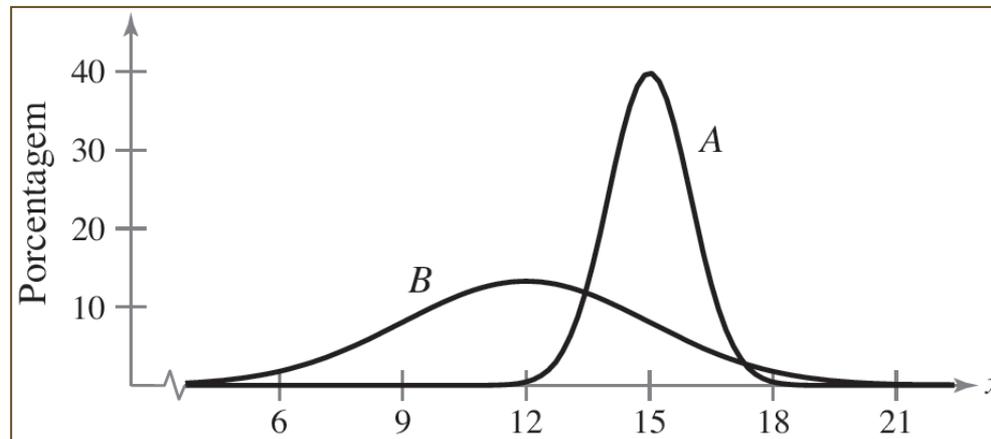
Média e Desvio Padrão

- Média = linha de simetria
- Desvio Padrão = dispersão dos dados



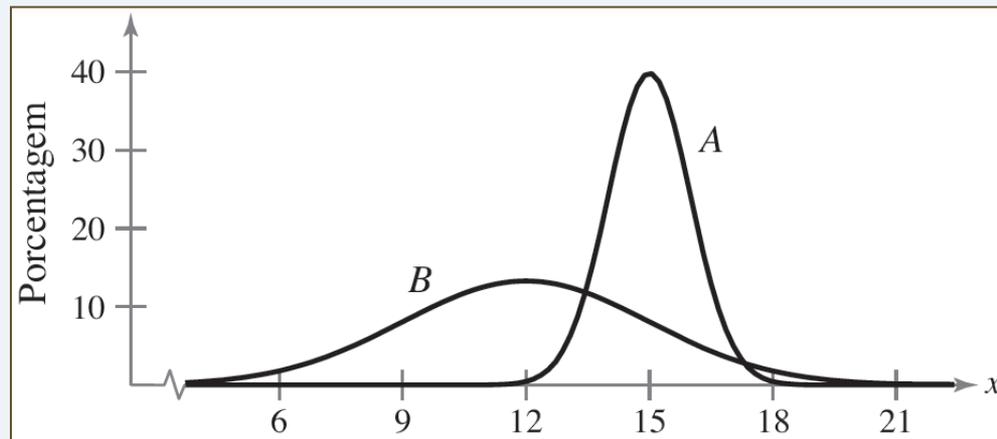
Média e Desvio Padrão

- Qual curva tem média maior?
- Qual curva tem maior desvio padrão?



Média e Desvio Padrão

- Qual curva tem maior média?
- Qual curva tem maior desvio padrão?

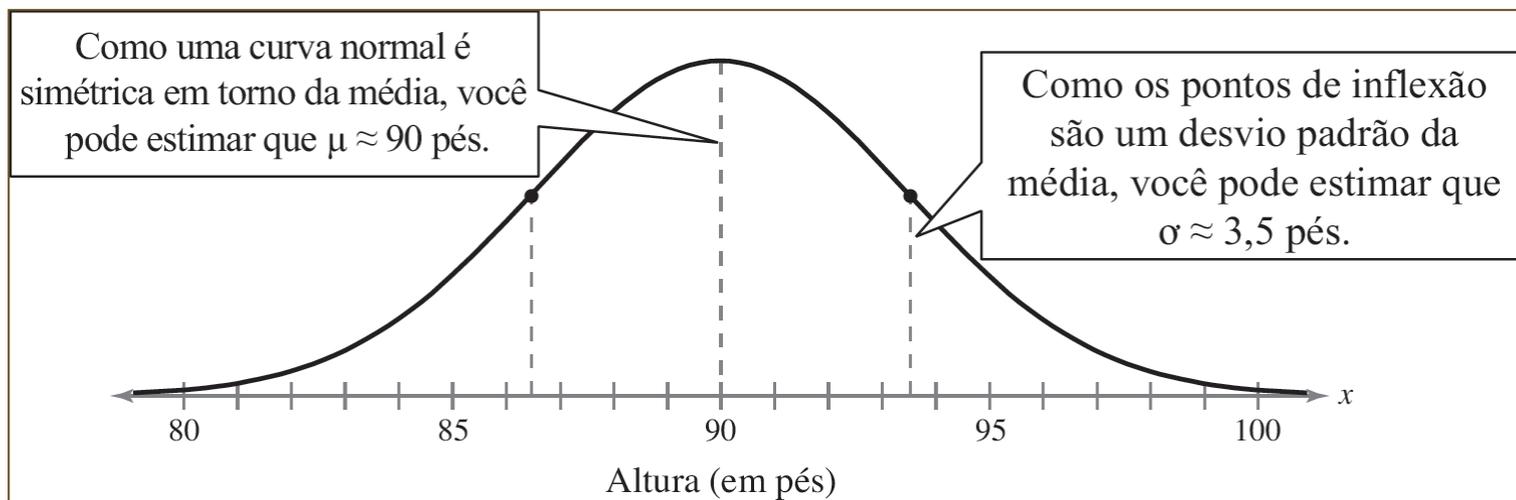


- A linha de simetria de A ocorre em $x=15$ e de B em $x=12$. Portanto A tem média maior
- B tem maior desvio padrão (é mais dispersa)

Exemplo

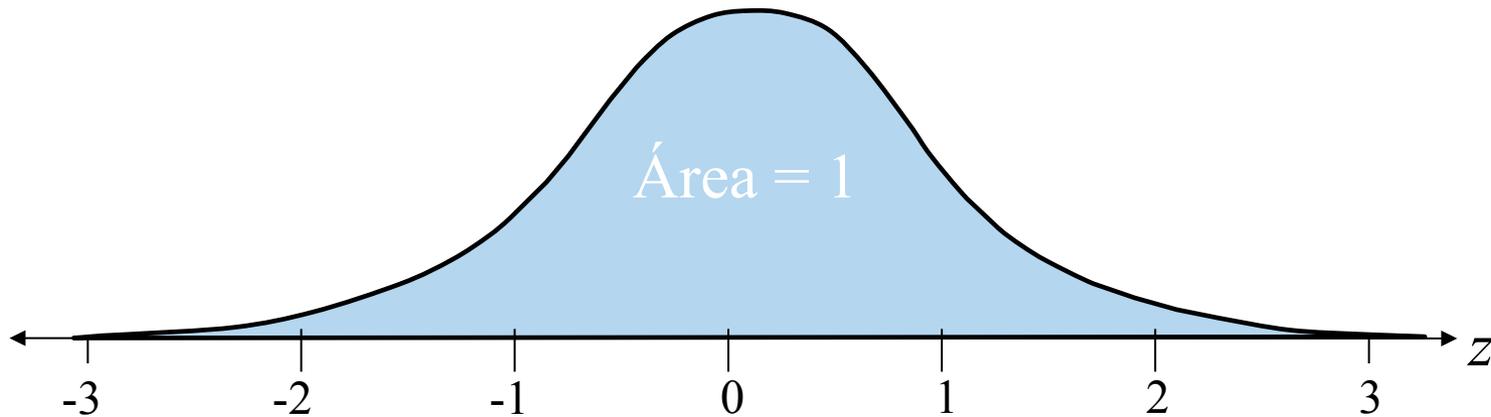
□ Interpretação de gráficos

- ▣ As alturas (em pés) de árvores de carvalho adultas são normalmente distribuídas. A curva normal apresentada mostra essa distribuição. Qual é a média de altura de uma árvore de carvalho adulta? Estime o desvio padrão



Distribuição Normal Padrão

Distribuição Normal com média 0 e desvio padrão 1

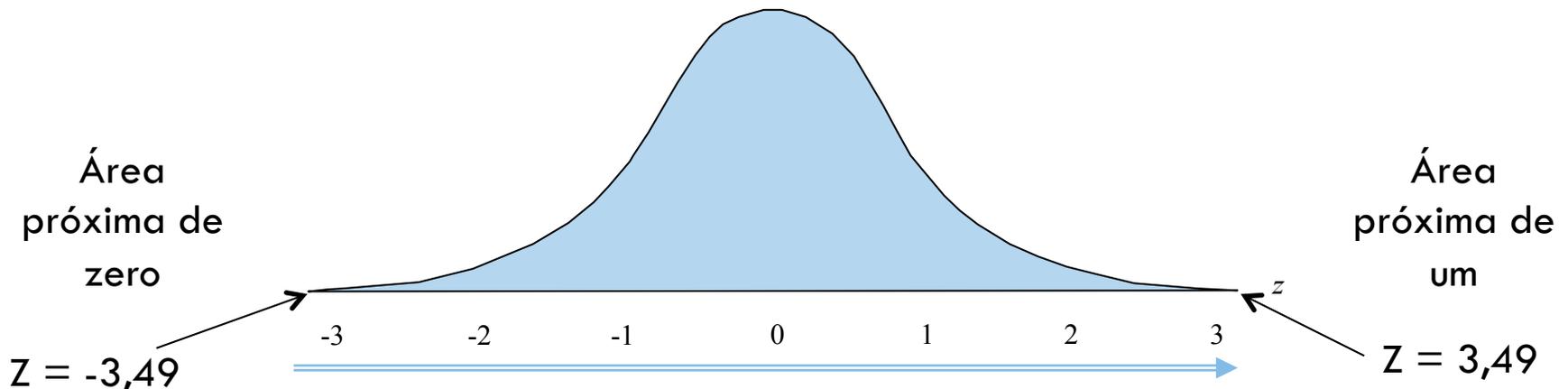


Z-escore = medida de posição que indica o número de desvio padrão de um valor a partir da média

Z-escore = escala horizontal do gráfico de Distribuição Normal

Propriedades da Distribuição Normal Padrão

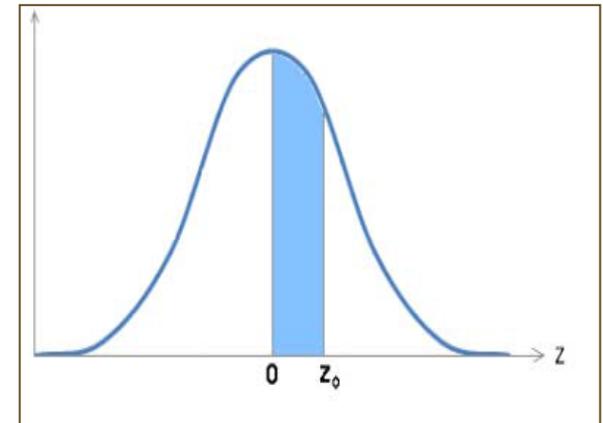
- Área acumulada é próximo de zero para z-escores próximos de -3,49
- Área acumulada aumenta conforme o z aumenta
- Quando $z=0$ a área acumulada é 0,5
- Área acumulada é próximo de 1 para z-escores próximos de 3,49



Distribuição Normal ou de Gauss

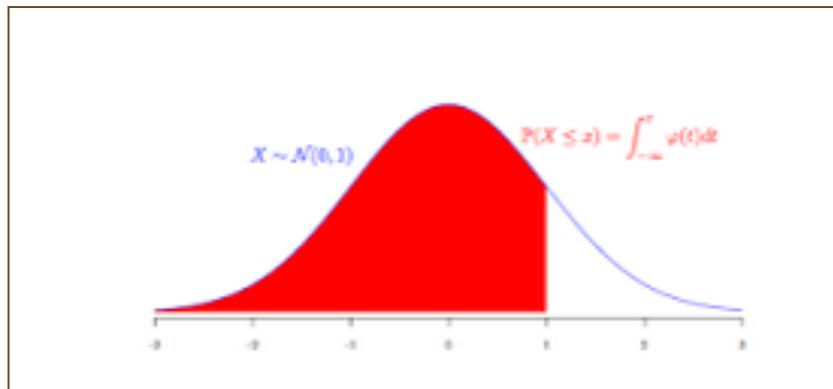
Tabela da Distribuição Normal Padronizada – Valores de $P(0 \leq Z \leq z_0)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916



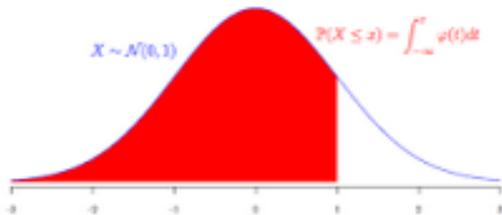
Exemplo

- Encontre a área acumulada que corresponde a z-escore de 1,15



Exemplo

- Encontre a área acumulada que corresponde a z-escore de 1,15



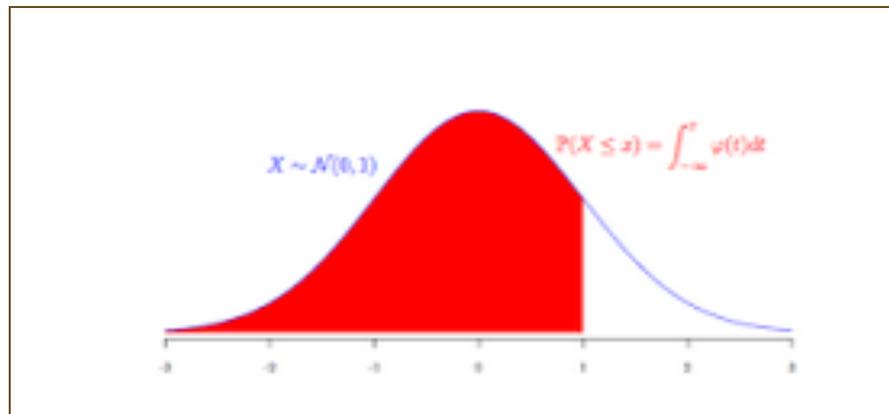
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026

0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279

Área à esquerda de $z=1,15$ é 0,8749

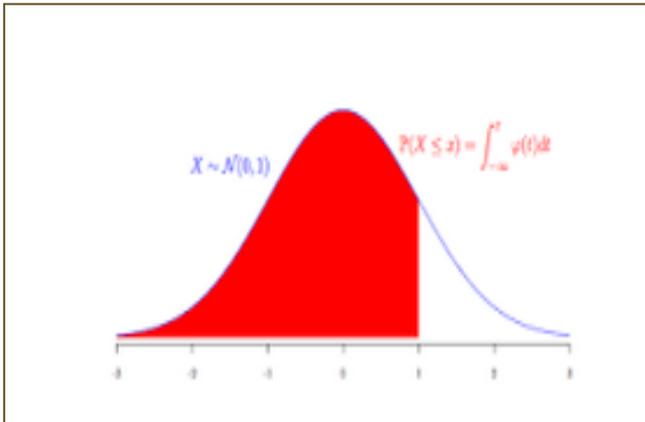
Exemplo

- Encontre a área acumulada que corresponde a z-escore de -0,24



Exemplo

- Encontre a área acumulada que corresponde a z-escore de -0,24

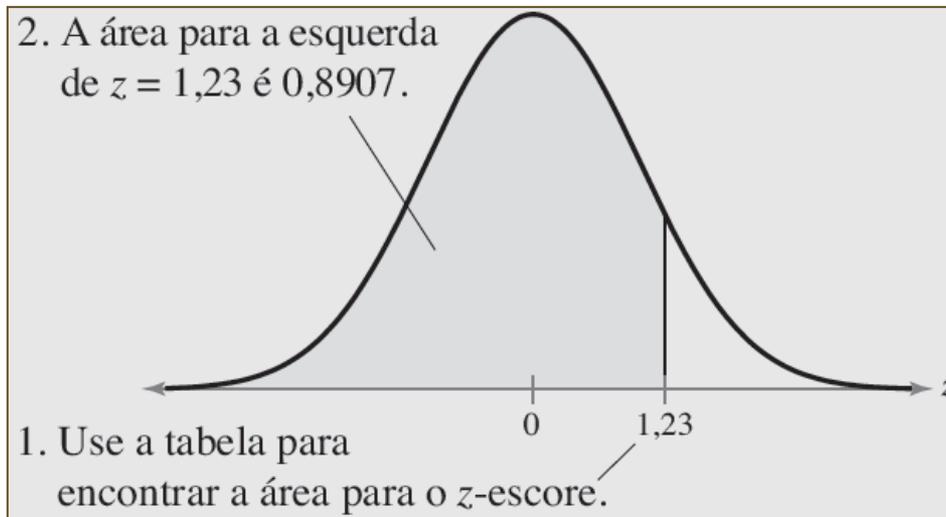


z	.09	.08	.07	.06	.05	.04	.03
-3.4	.0002	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
-3.3	.0003	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004
-3.2	.0005	.0005	.0005	.0006	.0006	.0006	.0006
-3.1	.0007	.0007	.0007	.0008	.0008	.0008	.0008
-3.0	.0010	.0010	.0010	.0011	.0011	.0011	.0011
-2.9	.0013	.0013	.0013	.0014	.0014	.0014	.0014
-2.8	.0017	.0017	.0017	.0018	.0018	.0018	.0018
-2.7	.0022	.0022	.0022	.0023	.0023	.0023	.0023
-2.6	.0027	.0027	.0027	.0028	.0028	.0028	.0028
-2.5	.0033	.0033	.0033	.0034	.0034	.0034	.0034
-2.4	.0040	.0040	.0040	.0041	.0041	.0041	.0041
-2.3	.0048	.0048	.0048	.0049	.0049	.0049	.0049
-2.2	.0057	.0057	.0057	.0058	.0058	.0058	.0058
-2.1	.0068	.0068	.0068	.0069	.0069	.0069	.0069
-2.0	.0080	.0080	.0080	.0081	.0081	.0081	.0081
-1.9	.0094	.0094	.0094	.0095	.0095	.0095	.0095
-1.8	.0110	.0110	.0110	.0111	.0111	.0111	.0111
-1.7	.0128	.0128	.0128	.0129	.0129	.0129	.0129
-1.6	.0148	.0148	.0148	.0149	.0149	.0149	.0149
-1.5	.0170	.0170	.0170	.0171	.0171	.0171	.0171
-1.4	.0194	.0194	.0194	.0195	.0195	.0195	.0195
-1.3	.0221	.0221	.0221	.0222	.0222	.0222	.0222
-1.2	.0251	.0251	.0251	.0252	.0252	.0252	.0252
-1.1	.0284	.0284	.0284	.0285	.0285	.0285	.0285
-1.0	.0320	.0320	.0320	.0321	.0321	.0321	.0321
-0.9	.0359	.0359	.0359	.0360	.0360	.0360	.0360
-0.8	.0401	.0401	.0401	.0402	.0402	.0402	.0402
-0.7	.0446	.0446	.0446	.0447	.0447	.0447	.0447
-0.6	.0494	.0494	.0494	.0495	.0495	.0495	.0495
-0.5	.0544	.0544	.0544	.0545	.0545	.0545	.0545
-0.4	.0596	.0596	.0596	.0597	.0597	.0597	.0597
-0.3	.0650	.0650	.0650	.0651	.0651	.0651	.0651
-0.2	.0706	.0706	.0706	.0707	.0707	.0707	.0707
-0.1	.0764	.0764	.0764	.0765	.0765	.0765	.0765
-0.0	.0823	.0823	.0823	.0824	.0824	.0824	.0824
0.0	.0883	.0883	.0883	.0884	.0884	.0884	.0884
0.1	.0945	.0945	.0945	.0946	.0946	.0946	.0946
0.2	.1009	.1009	.1009	.1010	.1010	.1010	.1010
0.3	.1075	.1075	.1075	.1076	.1076	.1076	.1076
0.4	.1143	.1143	.1143	.1144	.1144	.1144	.1144
0.5	.1213	.1213	.1213	.1214	.1214	.1214	.1214
0.6	.1285	.1285	.1285	.1286	.1286	.1286	.1286
0.7	.1359	.1359	.1359	.1360	.1360	.1360	.1360
0.8	.1436	.1436	.1436	.1437	.1437	.1437	.1437
0.9	.1506	.1506	.1506	.1507	.1507	.1507	.1507
1.0	.1579	.1579	.1579	.1580	.1580	.1580	.1580
1.1	.1654	.1654	.1654	.1655	.1655	.1655	.1655
1.2	.1730	.1730	.1730	.1731	.1731	.1731	.1731
1.3	.1808	.1808	.1808	.1809	.1809	.1809	.1809
1.4	.1888	.1888	.1888	.1889	.1889	.1889	.1889
1.5	.1969	.1969	.1969	.1970	.1970	.1970	.1970
1.6	.2052	.2052	.2052	.2053	.2053	.2053	.2053
1.7	.2127	.2127	.2127	.2128	.2128	.2128	.2128
1.8	.2204	.2204	.2204	.2205	.2205	.2205	.2205
1.9	.2283	.2283	.2283	.2284	.2284	.2284	.2284
2.0	.2364	.2364	.2364	.2365	.2365	.2365	.2365
2.1	.2447	.2447	.2447	.2448	.2448	.2448	.2448
2.2	.2532	.2532	.2532	.2533	.2533	.2533	.2533
2.3	.2619	.2619	.2619	.2620	.2620	.2620	.2620
2.4	.2708	.2708	.2708	.2709	.2709	.2709	.2709
2.5	.2799	.2799	.2799	.2800	.2800	.2800	.2800
2.6	.2892	.2892	.2892	.2893	.2893	.2893	.2893
2.7	.2977	.2977	.2977	.2978	.2978	.2978	.2978
2.8	.3064	.3064	.3064	.3065	.3065	.3065	.3065
2.9	.3153	.3153	.3153	.3154	.3154	.3154	.3154
3.0	.3244	.3244	.3244	.3245	.3245	.3245	.3245
3.1	.3337	.3337	.3337	.3338	.3338	.3338	.3338
3.2	.3432	.3432	.3432	.3433	.3433	.3433	.3433
3.3	.3529	.3529	.3529	.3530	.3530	.3530	.3530
3.4	.3628	.3628	.3628	.3629	.3629	.3629	.3629
3.5	.3729	.3729	.3729	.3730	.3730	.3730	.3730
3.6	.3832	.3832	.3832	.3833	.3833	.3833	.3833
3.7	.3937	.3937	.3937	.3938	.3938	.3938	.3938
3.8	.4044	.4044	.4044	.4045	.4045	.4045	.4045
3.9	.4153	.4153	.4153	.4154	.4154	.4154	.4154
4.0	.4264	.4264	.4264	.4265	.4265	.4265	.4265

Área à esquerda de $z = -0,24$ é 0,4052

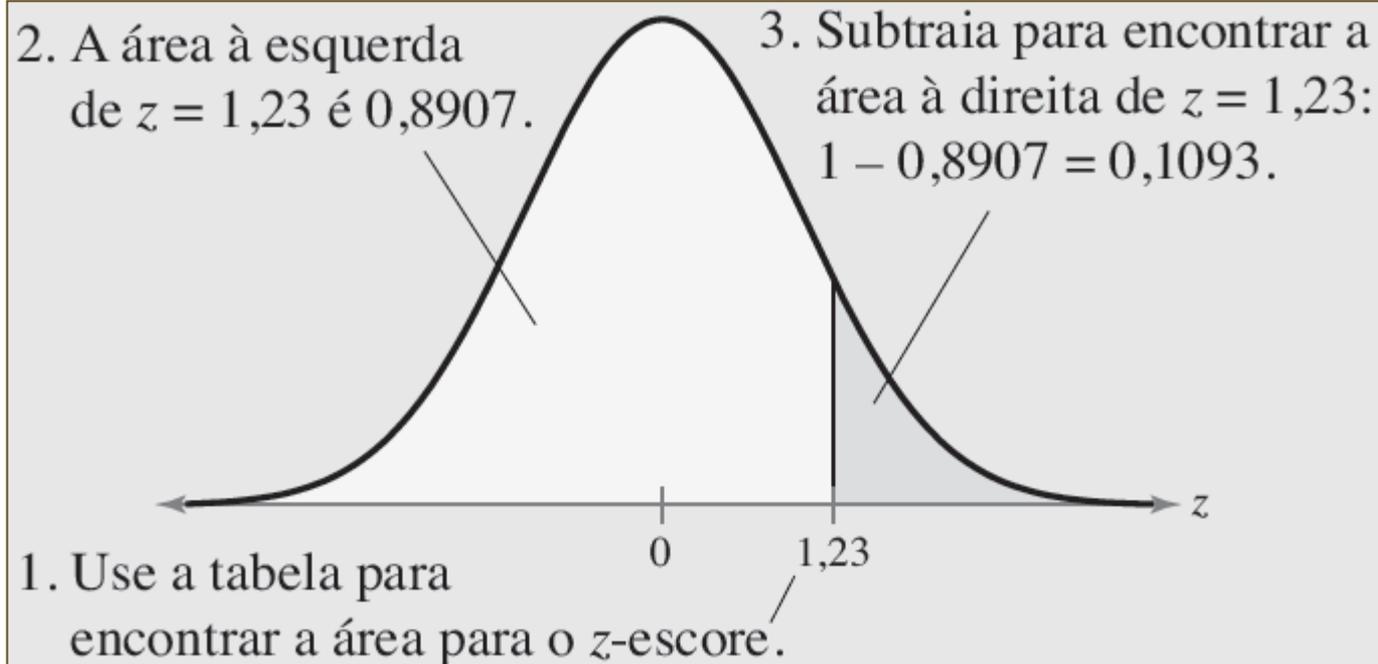
Áreas sob a Curva Normal Padrão

- Esboce a curva normal padrão e preencha a área abaixo da curva
- Encontre a área seguindo as direções em cada caso
 - ▣ Área à esquerda de z



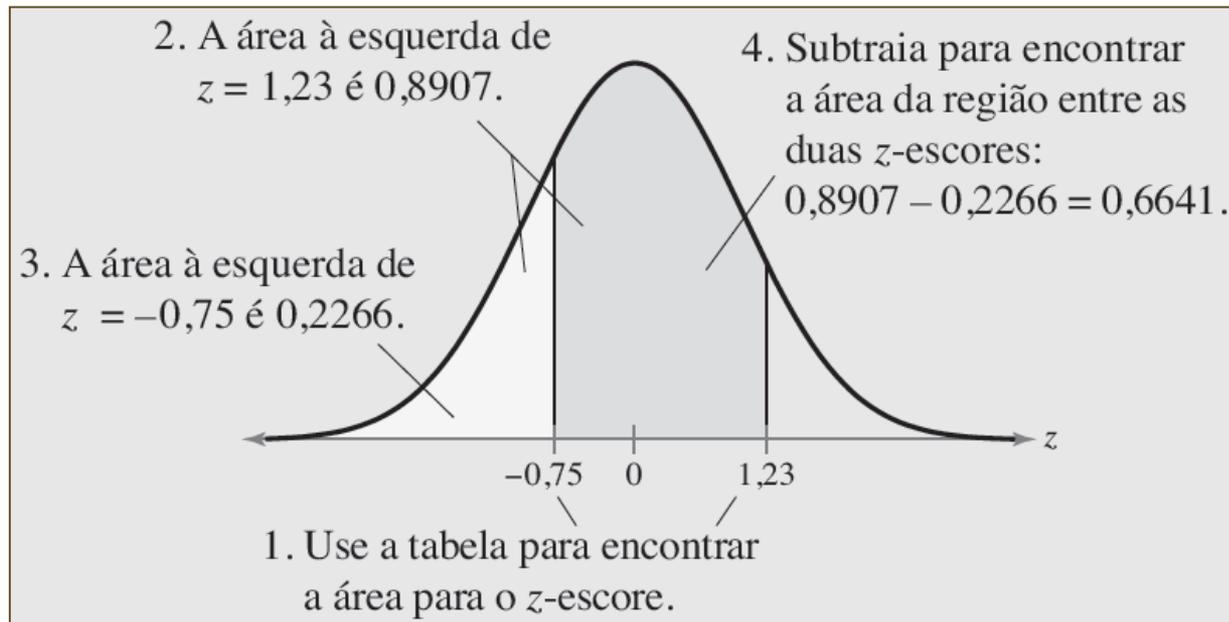
Áreas sob a Curva Normal Padrão

□ Área à direita de z



Áreas sob a Curva Normal Padrão

□ Área entre dois escores z



Exercício 10.1

- Encontre a área sob a curva normal padrão
 - À esquerda de $z = -0,99$
 - À esquerda de $z = 2,13$
 - À direita de $z = 1,06$
 - À direita de $-2,16$
 - $-1,5 < z < 1,25$
 - $-2,16 < z < -1,35$

Exercício 10.2

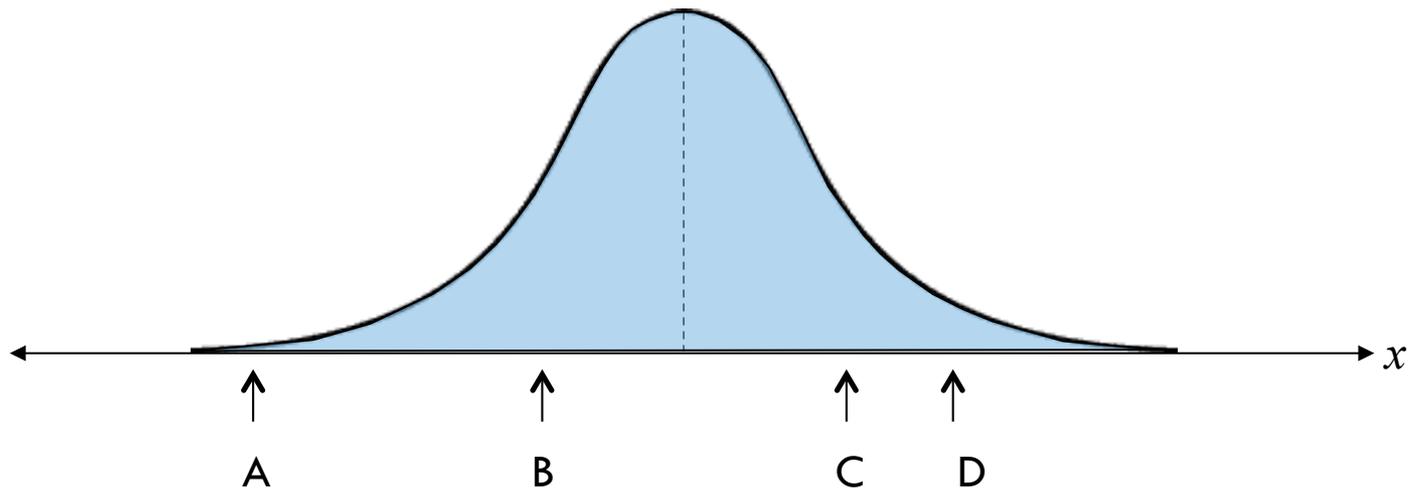
- Você trabalha em uma publicação e está testando a afirmação de um fabricante de lâmpadas. O fabricante afirma que a vida útil de uma lâmpada é normalmente distribuída, com média de 2000 horas e um desvio padrão de 250 horas. Você testa 20 lâmpadas e encontra os seguintes números para vida útil das lâmpadas:

2210	2406	1930	2267	2005	2502	1106	2140	1949	1921
2217	2121	2004	1397	1659	1577	2840	1728	1209	1639

- Desenhe um histograma de frequência para mostrar os dados. Use cinco classes. Seria razoável dizer que a vida útil é normalmente distribuída? Por quê?
- Encontre a média e o desvio padrão da sua amostra
- Compare a média e o desvio padrão da sua amostra com os da declaração do fabricante. Discuta as diferenças.

Exercício 10.3

Sua empresa fabrica anéis de pistão para carros. Os diâmetros internos dos anéis são normalmente distribuídos, com média de 93,01 mm e desvio padrão de 0,005 mm. Os diâmetros internos de quatro anéis selecionados aleatoriamente são de 93,014 mm, 93,018 mm, 93,004 mm e 92,994 mm. Indique no gráfico os valores correspondentes; encontre o z-escore que corresponde a cada valor; e determine se algum valor é incomum.

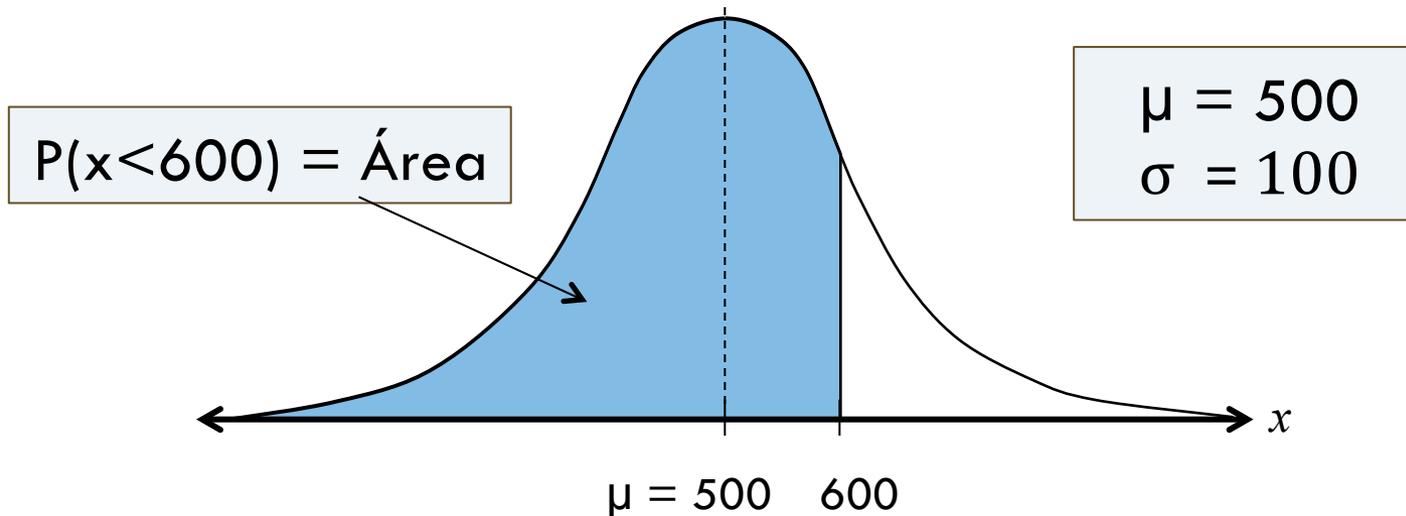


Transformar valor x em z-escore

$$z = \frac{\text{Valor} - \text{Média}}{\text{Desvio Padrão}} = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

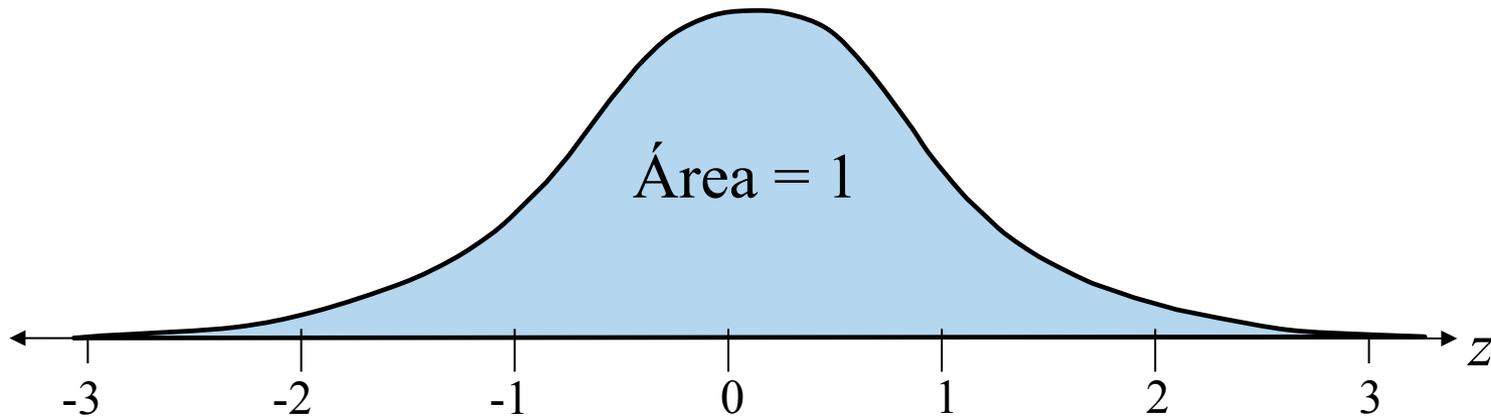
Encontrar Probabilidades

Se uma variável aleatória x é normalmente distribuída, para encontrar a probabilidade de x cair em um dado intervalo, calcular a área sob a curva normal daquele intervalo.



Distribuição Normal Padrão

Distribuição Normal com média 0 e desvio padrão 1



Transformar valor x em z-escore



$$z = \frac{\text{Valor} - \text{Média}}{\text{Desvio Padrão}} = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Distribuição Normal Padrão

Transformar valor x em
z-escore



Distribuição Normal
Padrão

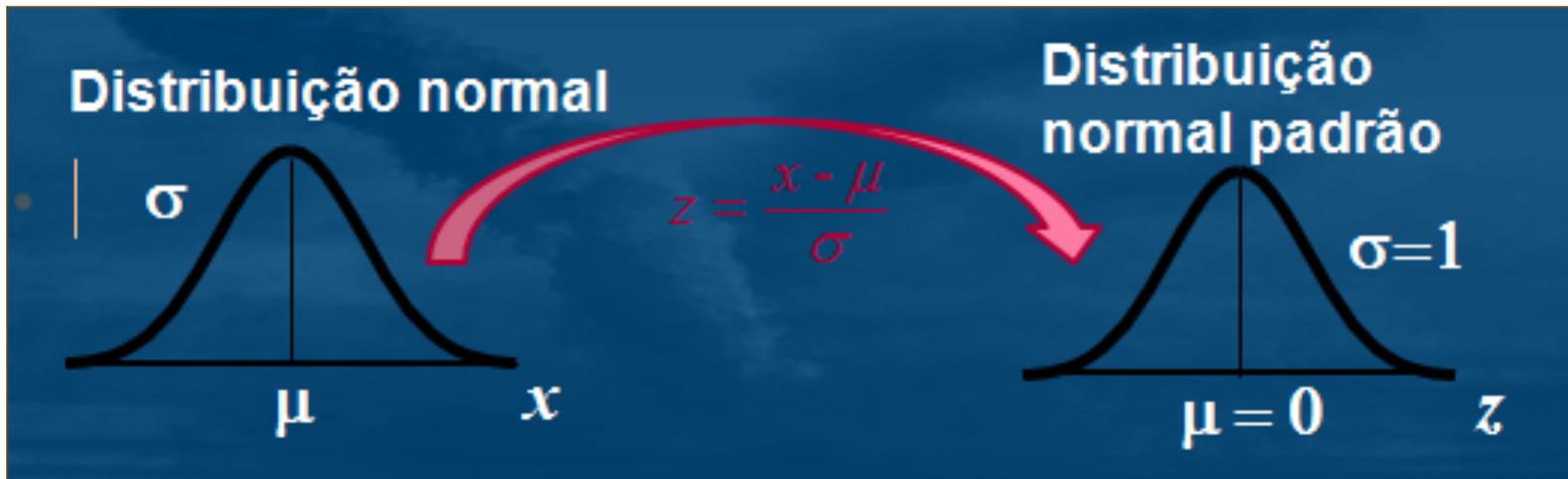


Tabela Normal Padrão fornece a área acumulada abaixo da Curva Normal Padrão

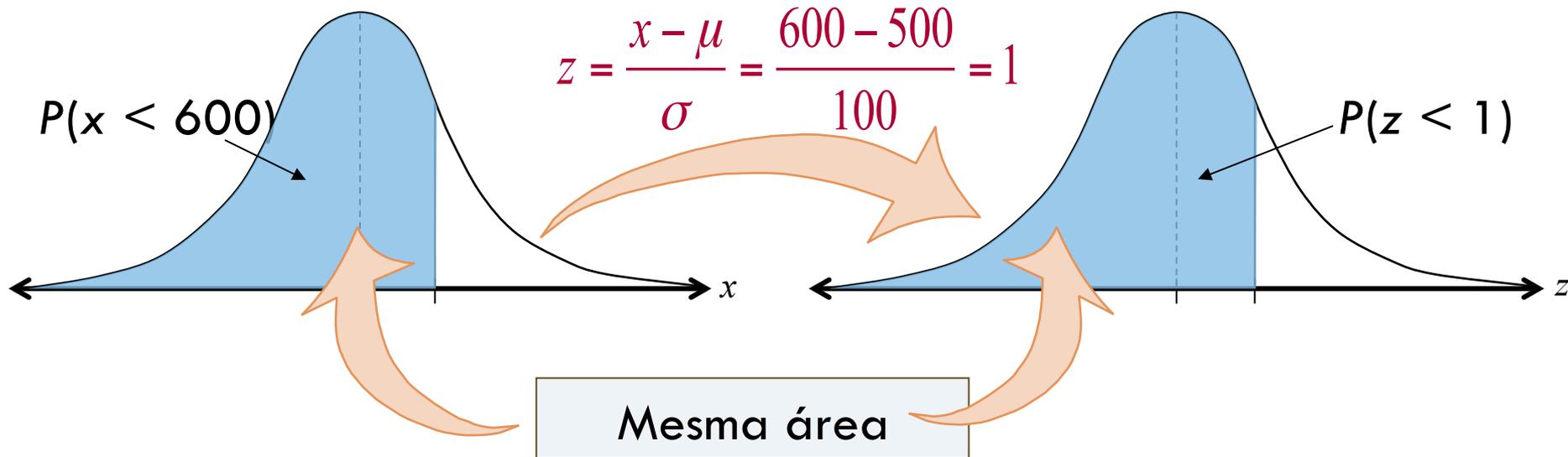
Encontrar Probabilidades

Distribuição normal

$$\mu = 500 \quad \sigma = 100$$

Distribuição normal padrão

$$\mu = 0 \quad \sigma = 1$$



$$P(x < 600) = P(z < 1) = 0,8413$$

Exercício 10.4

Uma pesquisa indica que para cada ida ao supermercado, um comprador gasta uma média de 45 minutos com um desvio padrão de 12 minutos. O período de tempo gasto no mercado é normalmente distribuído e representado pela variável x . Um cliente entra no mercado. Encontre a probabilidade de que ele passe entre 24 e 54 minutos dentro do mercado.



Exercício 10.5

Encontre a probabilidade de que o cliente fique no mercado mais de 39 minutos. (Lembre-se: $\mu = 45$ minutos e $\sigma = 12$ minutos.)



Exercício 10.6

Se 200 clientes entram no mercado, quantos deles você esperaria que permanecessem por mais de 39 minutos?



Exercício 10.7

Assuma que os níveis de colesterol em homens dos Estados Unidos são normalmente distribuídos, com uma média de 215 miligramas por decilitro e um desvio padrão de 25 miligramas por decilitro. Você seleciona aleatoriamente um homem dos Estados Unidos. Qual é a probabilidade de que seu nível de colesterol seja menor que 175? R. 5,48%

EXCEL
DIST.NORM(X; MÉDIA; DESVIO PADRÃO; VERDADEIRO)



Exercício 10.8

Pesquisa indica que as pessoas usam seus computadores por, em média, 2,4 anos antes de trocar por uma máquina nova. O desvio padrão é de 0,5 anos. Um dono de computador é selecionado de forma aleatória. Encontre a probabilidade de que ele vá usar o computador por menos de 2 anos antes de trocá-lo. A variável x é normalmente distribuída. R. 21,19%

Encontrar valores para distribuições normais

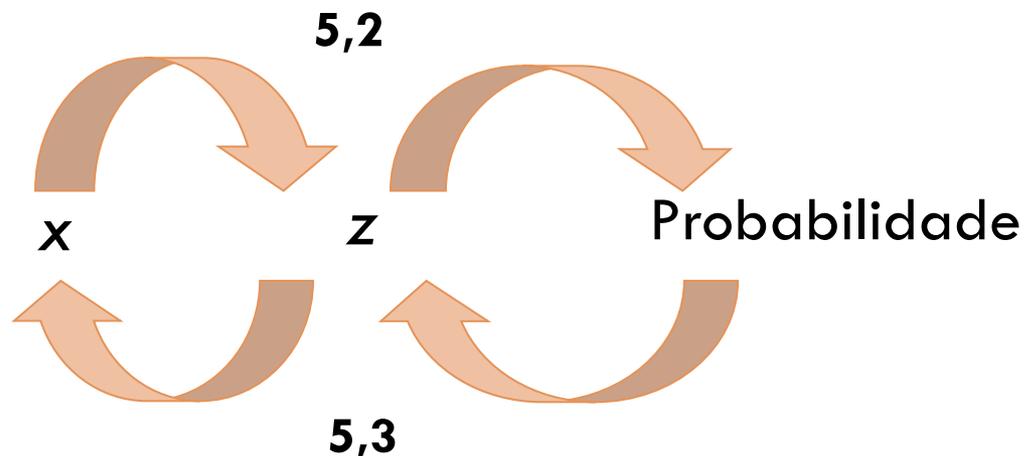
Encontrar valores para distribuições normais

□ Objetivos

- Encontrar um z -escore dada a área sob a curva normal
- Transformar um z -escore em um valor x
- Encontrar o valor de um dado específico de uma distribuição normal dada a probabilidade

Encontrar valores dada uma probabilidade

- Antes: dada uma variável aleatória x normalmente distribuída, foi pedido para encontrar a probabilidade
- Agora: dada uma probabilidade, será pedido o valor da variável aleatória x

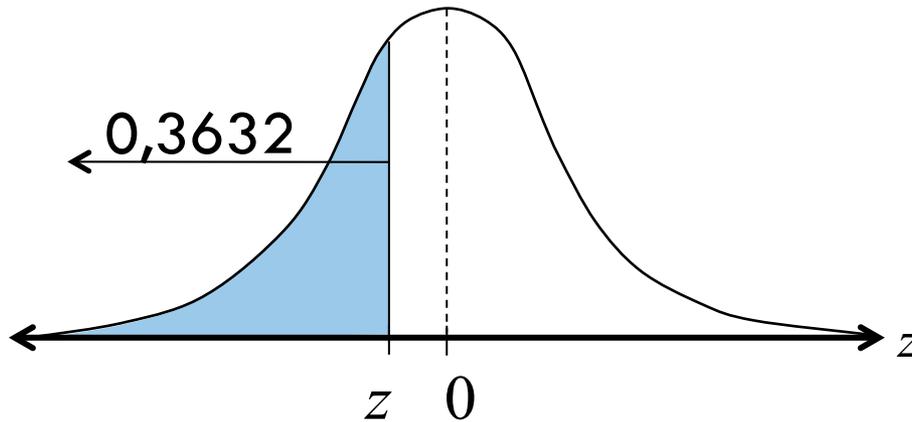


Encontrar valores dada uma probabilidade

- Exemplos
- Universidade quer saber qual a pontuação mais baixa que um aluno pode tirar em uma prova e ainda estar entre os 10% melhores
- Pesquisa médica quer saber valores de corte para selecionar os 90% dos pacientes

Encontrar um z-escore dada uma área

Encontre o z-escore que corresponda à área cumulativa de 0,3632.



Encontrar um z-escore dada uma área

- Localizar 0,3632 no corpo da tabela normal padrão

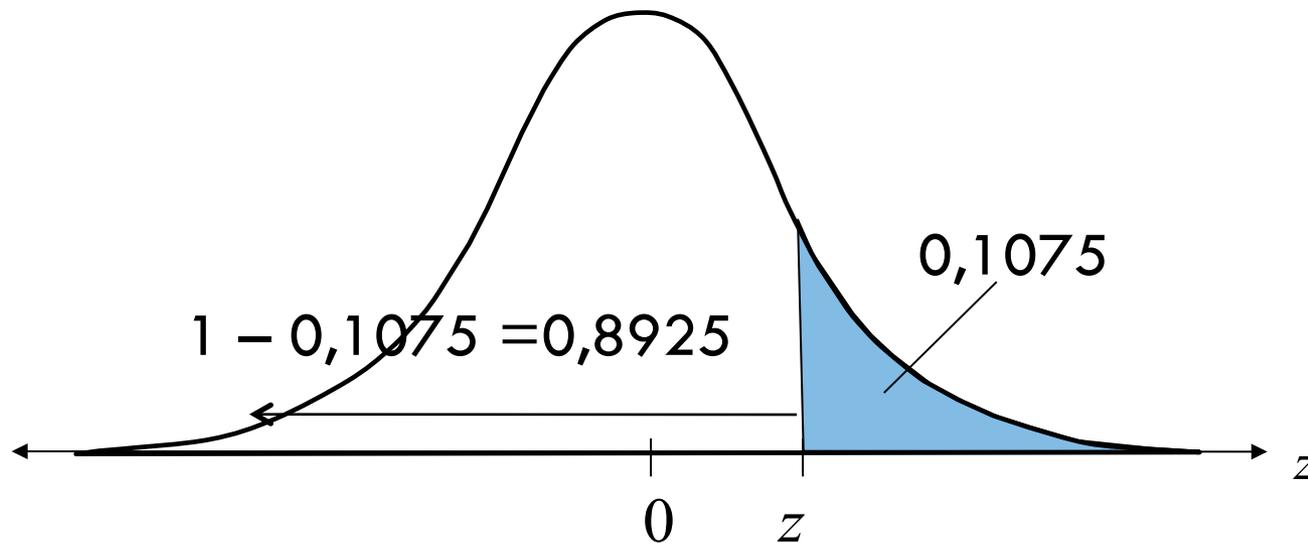
z	.09	.08	.07	.06	.05	.04	.03
-3.4	.0002	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
-3.3	.0003	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004
-3.2	.0005	.0005	.0005	.0006	.0006	.0006	.0006
-3.1	.0006	.0006	.0006	.0007	.0007	.0007	.0007
-3.0	.0008	.0008	.0008	.0008	.0008	.0008	.0008
-2.9	.0009	.0009	.0009	.0009	.0009	.0009	.0009
-2.8	.0010	.0010	.0010	.0010	.0010	.0010	.0010
-2.7	.0011	.0011	.0011	.0011	.0011	.0011	.0011
-2.6	.0012	.0012	.0012	.0012	.0012	.0012	.0012
-2.5	.0013	.0013	.0013	.0013	.0013	.0013	.0013
-2.4	.0014	.0014	.0014	.0014	.0014	.0014	.0014
-2.3	.0015	.0015	.0015	.0015	.0015	.0015	.0015
-2.2	.0016	.0016	.0016	.0016	.0016	.0016	.0016
-2.1	.0017	.0017	.0017	.0017	.0017	.0017	.0017
-2.0	.0018	.0018	.0018	.0018	.0018	.0018	.0018
-1.9	.0019	.0019	.0019	.0019	.0019	.0019	.0019
-1.8	.0020	.0020	.0020	.0020	.0020	.0020	.0020
-1.7	.0021	.0021	.0021	.0021	.0021	.0021	.0021
-1.6	.0022	.0022	.0022	.0022	.0022	.0022	.0022
-1.5	.0023	.0023	.0023	.0023	.0023	.0023	.0023
-1.4	.0024	.0024	.0024	.0024	.0024	.0024	.0024
-1.3	.0025	.0025	.0025	.0025	.0025	.0025	.0025
-1.2	.0026	.0026	.0026	.0026	.0026	.0026	.0026
-1.1	.0027	.0027	.0027	.0027	.0027	.0027	.0027
-1.0	.0028	.0028	.0028	.0028	.0028	.0028	.0028
-0.9	.0029	.0029	.0029	.0029	.0029	.0029	.0029
-0.8	.0030	.0030	.0030	.0030	.0030	.0030	.0030
-0.7	.0031	.0031	.0031	.0031	.0031	.0031	.0031
-0.6	.0032	.0032	.0032	.0032	.0032	.0032	.0032
-0.5	.2776	.2810	.2843	.2877	.2912	.2946	.2981
-0.4	.3121	.3156	.3192	.3228	.3264	.3300	.3336
-0.3	.3483	.3520	.3557	.3594	.3632	.3669	.3707
-0.2	.3859	.3897	.3936	.3974	.4013	.4052	.4090
-0.1	.4247	.4286	.4325	.4364	.4404	.4443	.4483
-0.0	.4641	.4681	.4721	.4761	.4801	.4840	.4880

z-escore é
-0,35.

Os valores no começo da fileira correspondente e no topo da coluna fornecem o escore z

Encontrar um z-escore dada uma área

Encontre o escore z que tenha 10,75% da área da distribuição à sua direita.



Como a área total é 1 e a área à direita é 0,1075 a área cumulativa é 0,8925.

Encontrar um z-escore dada uma área

- Localize 0,8925 no corpo da tabela normal padrão

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406
0.4	.6554	.6591	.6628	.6665	.6702	.6739	.6776
0.5	.6915	.6952	.6989	.7026	.7063	.7100	.7137
0.6	.7274	.7311	.7347	.7384	.7421	.7458	.7494
0.7	.7642	.7678	.7714	.7750	.7786	.7823	.7859
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279

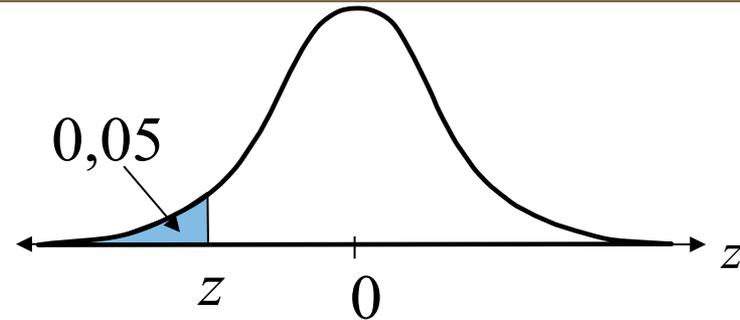
z-escore é
1,24.

A soma dos valores no começo da fileira e no topo da coluna correspondentes fornecem o escore z

Exemplo: encontrando um z escore dado um percentil

Encontre o z-escore que corresponda à P_5

O escore z que corresponde à P_5 é o mesmo z escore que corresponde à área de 0,05.



As áreas mais próximas de 0,05 na tabela são 0,0495 ($z = -1,65$) e 0,0505 ($z = -1,64$). É necessário interpolar, porque 0,05 está entre as duas áreas na tabela, use o z escore que está entre $-1,64$ e $-1,65$.

O z escore é $-1,645$.

Transformar um z-escore em um valor de x

Para transformar um z-escore para um valor x em uma dada população

$$x = \mu + z\sigma$$

Exercício 11.1

As velocidades dos veículos em um trecho de uma rodovia são normalmente distribuídas, com uma média de 67 km por hora e um desvio padrão de 4 km por hora. Encontre as velocidades x correspondentes aos escores z de 1,96, $-2,33$ e 0.



Exercício 11.2

As pontuações dos candidatos num concurso público são normalmente distribuídos, com uma média de 75 e um desvio padrão de 6,5. Para ser adequado ao emprego no serviço público, você precisa ter uma pontuação dentro dos primeiros 5%. Qual é a menor pontuação que você pode conseguir e ainda assim ser adequado ao emprego?



Exercício 11.3

- Em uma amostra escolhida aleatoriamente de 1.169 homens com idade entre 35 e 44 anos, a média do nível de colesterol total era de 210 miligramas por decilitro com um desvio padrão de 38,6 miligramas por decilitro. Suponha que os níveis totais de colesterol nos homens sejam normalmente distribuídos. Encontre o nível total de colesterol mais alto que um homem nesta faixa etária pode ter e ainda estar no 1% de colesterol mais baixo da população . R. 120,06

Encontrar valores para distribuições normais

□ Objetivos

- ▣ Encontrar um z -escore dada a área sob a curva normal
- ▣ Transformar um z -escore em um valor x
- ▣ Encontrar o valor de um dado específico de uma distribuição normal dada a probabilidade



Distribuições Amostrais
e
Teorema do Limite Central

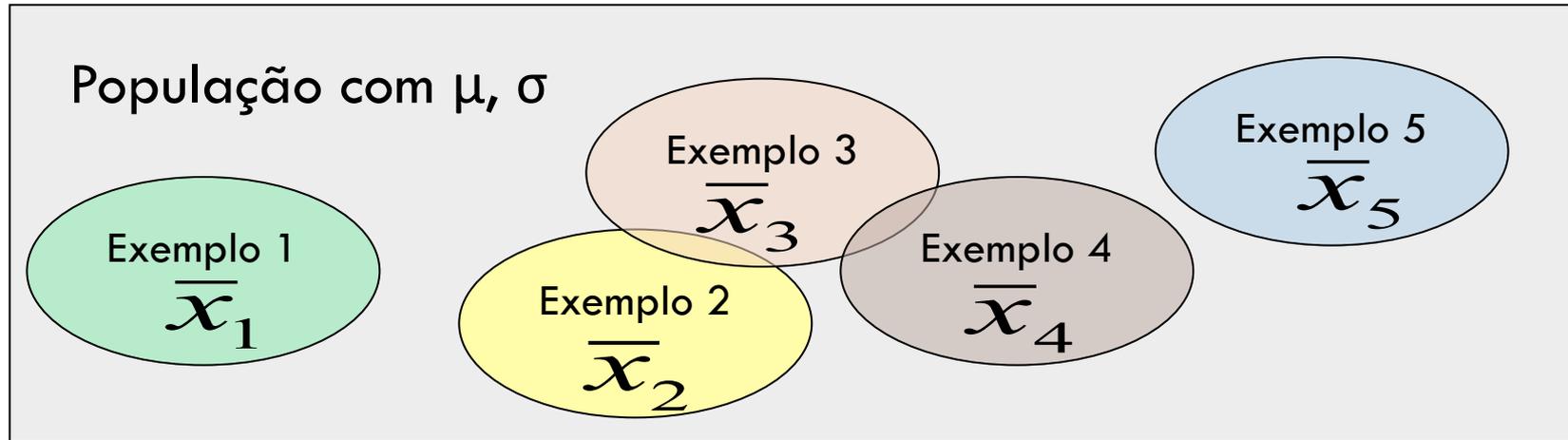
Objetivos

- Encontrar distribuições amostrais e verificar suas propriedades
- Interpretar o Teorema do Limite Central
- Aplicar o Teorema do Limite Central para encontrar a probabilidade de uma média da amostra

Distribuições Amostrais

- Distribuição de probabilidade da amostra
- Formada quando amostras de tamanho n são repetidamente colhidas de uma população
- Se a estatística da amostra é a média, temos uma distribuição de médias da amostra

Distribuições de Probabilidade de Médias Amostrais



A distribuição da amostra consiste dos valores das médias amostrais, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \dots$

Propriedades de distribuições de Probabilidade das médias amostrais

- A média das médias amostrais é igual à média populacional μ

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

- Desvio padrão das médias amostrais = desvio padrão da população dividido pela raiz quadrada do tamanho da amostra n (erro padrão da média)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Distribuições das Médias das Amostras

Os valores populacionais $\{1, 3, 5, 7\}$ são escritos em pedaços de papel e postos em uma caixa. Dois pedaços de papel são aleatoriamente selecionados, sendo que cada um é recolocado na caixa após cada seleção. Encontre a média, a variância e o desvio padrão da população.

Média, Variância e Desvio Padrão da População

Os valores populacionais $\{1, 3, 5, 7\}$ são escritos em pedaços de papel e postos em uma caixa. Dois pedaços de papel são aleatoriamente selecionados, sendo que cada um é recolocado na caixa após cada seleção. Encontre a média, a variância e o desvio padrão da população.

$$\mu = \frac{\sum x}{N} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \mu)^2}{N} = 5$$

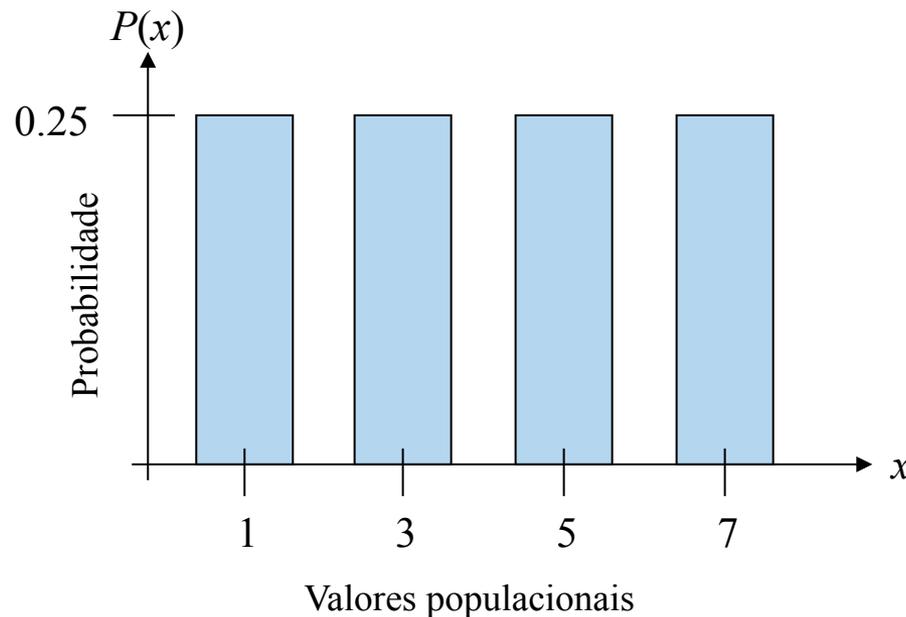
$$\sigma = \sqrt{5} = 2,236$$

Distribuições das Médias das Amostras

Faça o histograma de probabilidade dos valores populacionais

Distribuições das Médias das Amostras

Faça o histograma de probabilidade dos valores populacionais



Todos os valores têm a mesma probabilidade de serem selecionados (distribuição uniforme)

Distribuições das Médias das Amostras

Liste todas as amostras possíveis de tamanho $n = 2$ da população e calcule a média de cada amostra

Distribuições das Médias das Amostras

Liste todas as amostras possíveis de tamanho $n = 2$ da população e calcule a média de cada amostra

Amostras	Média da Amostra	Amostras	Média da Amostra
1, 1	1	5, 1	3
1, 3	2	5, 3	4
1, 5	3	5, 5	5
1, 7	4	5, 7	6
3, 1	2	7, 1	4
3, 3	3	7, 3	5
3, 5	4	7, 5	6
3, 7	5	7, 7	7

As médias formam a distribuição amostral das médias amostrais

Distribuições das Médias das Amostras

Construa a distribuição de probabilidade das médias das amostrais

Distribuições das Médias das Amostras

Construa a distribuição de probabilidade das médias das amostras

Média das Amostras	Frequência	Probabilidades
1	1	0,0625
2	2	0,1250
3	3	0,1875
4	4	0,2500
5	3	0,1875
6	2	0,1250
7	1	0,0625

Distribuições das Médias das Amostras

Encontre a média, variância e o desvio padrão das médias das amostras

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 4$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

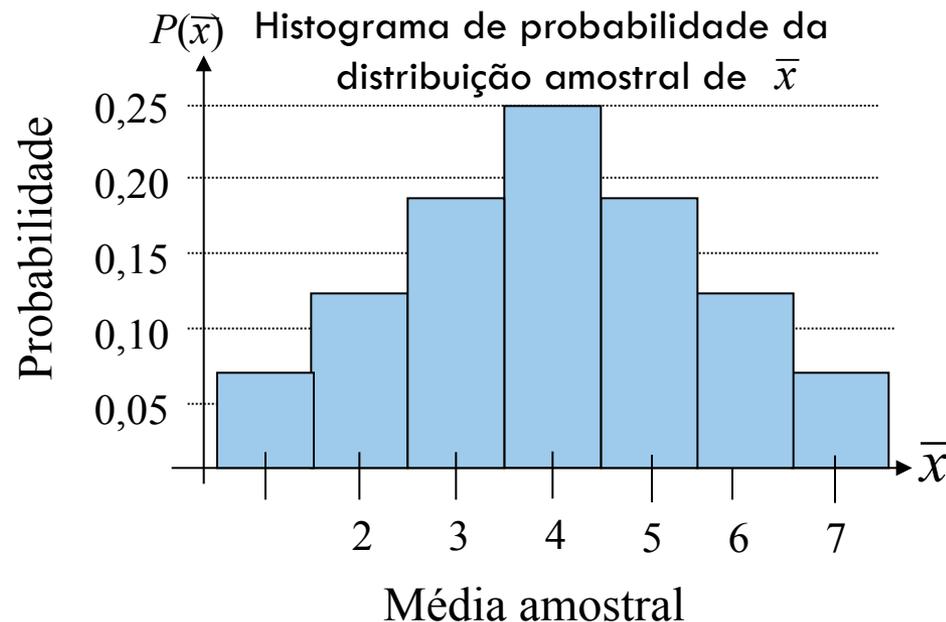
$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{2,5} = 1,581$$

Distribuições das Médias das Amostras

Faça um histograma de probabilidade das médias amostrais.

Distribuições das Médias das Amostras

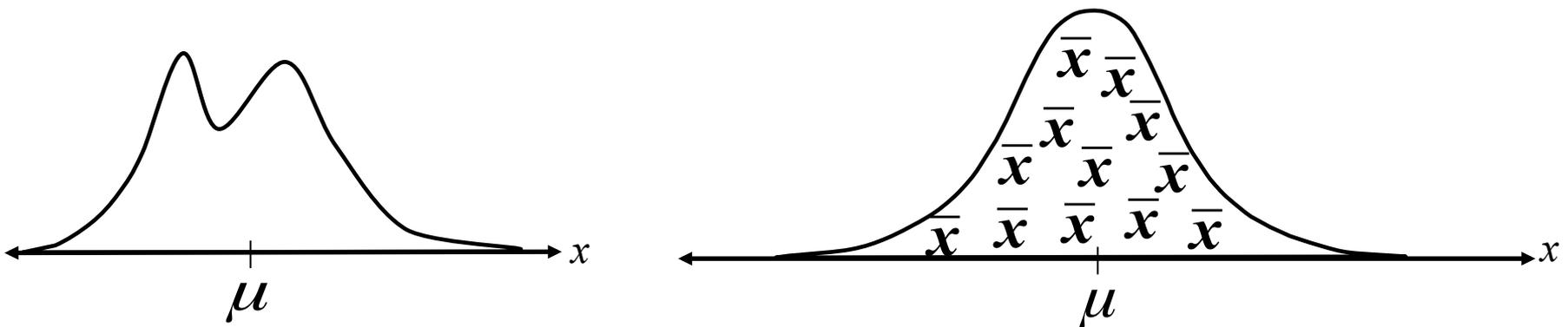
Faça um histograma de probabilidade das médias amostrais.



O gráfico é simétrico e em formato de sino. Aproxima-se de uma distribuição normal

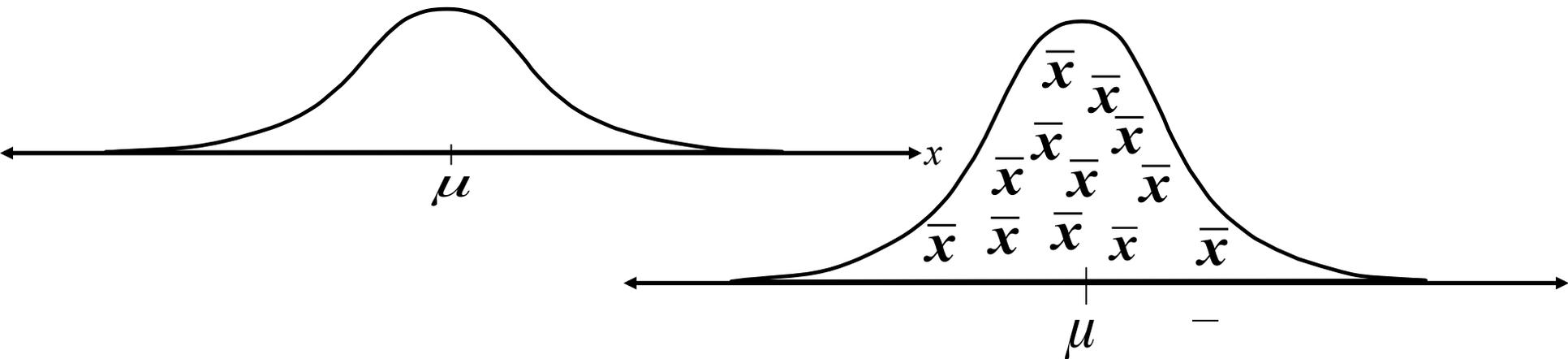
Teorema do Limite Central

Se amostras de tamanho $n \geq 30$ são tiradas de qualquer população de média $= \mu$ e desvio padrão $= \sigma$, a distribuição da média amostral aproxima-se de uma distribuição normal. Quanto maior o tamanho da amostragem, melhor a aproximação.



Teorema do Limite Central

Se a própria população é normalmente distribuída, a distribuição das médias amostrais é normalmente distribuída para **qualquer** tamanho de amostragem n .



Teorema do Limite Central

A distribuição das médias amostrais tem:

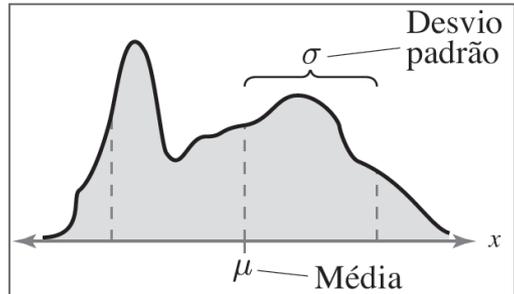
$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

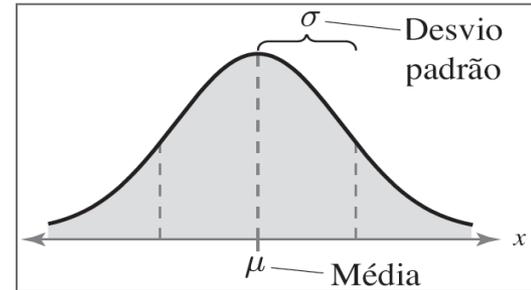
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Teorema do Limite Central

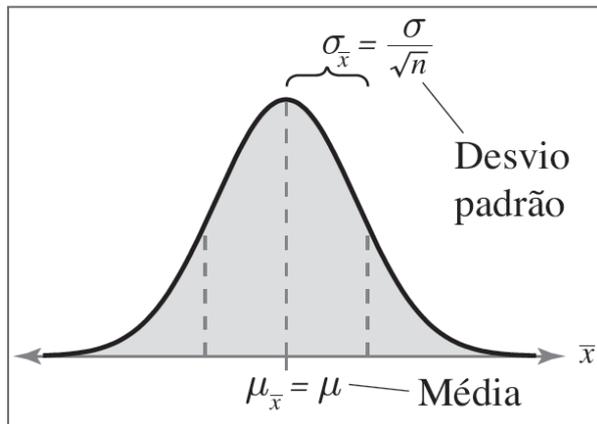
Distribuição populacional qualquer



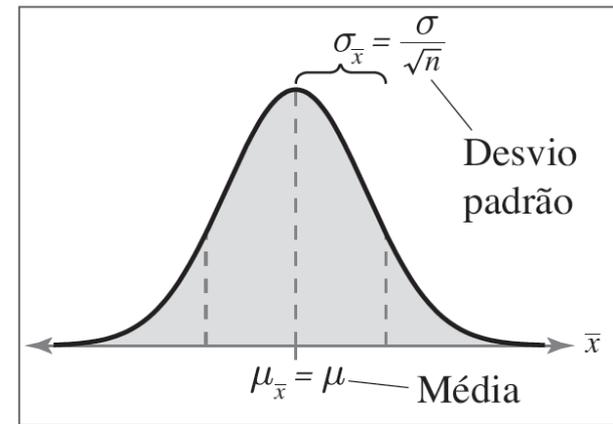
Distribuição populacional normal



Distribuição das médias amostrais
($n \geq 30$)



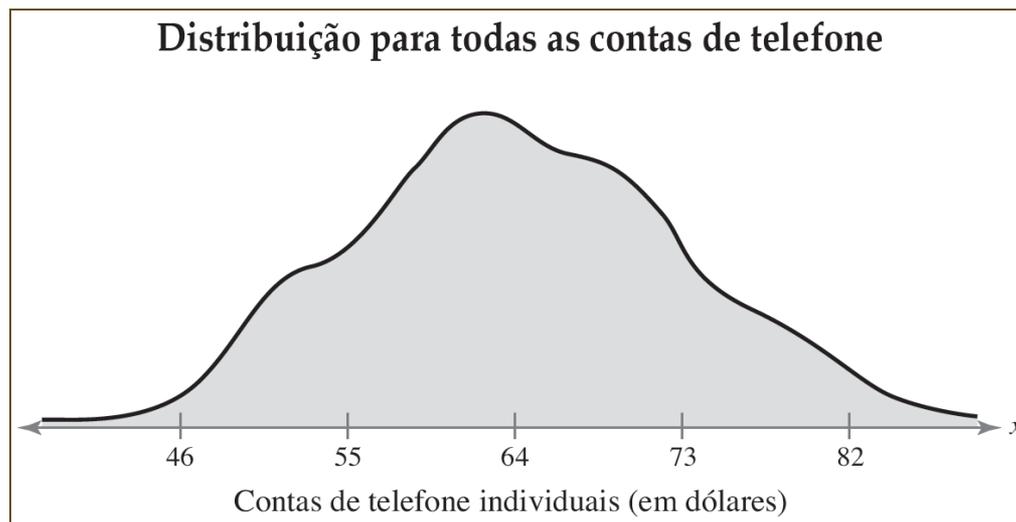
Distribuição das médias amostrais
(n qualquer)



Exercício 12.1

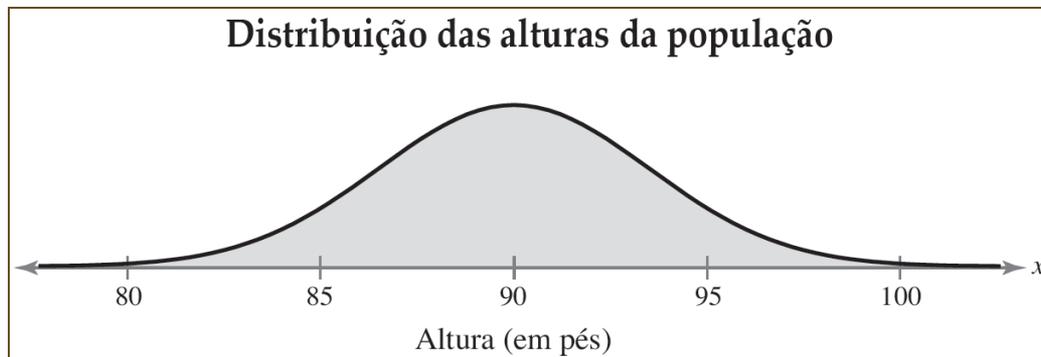


As contas dos telefones dos habitantes de uma cidade têm uma média de \$64 e um desvio padrão de \$9. Amostragens aleatórias de 36 contas de telefone são tiradas dessa população e a média de cada amostragem é determinada. Encontre a média e o erro padrão da média da distribuição amostral. Então esboce um gráfico da distribuição das médias amostrais.



Exercício 12.2

As alturas das árvores de carvalho branco adultas são normalmente distribuídas, com uma média de 90 pés e um desvio padrão de 3,5 pés. Amostras aleatórias de tamanho 4 são tiradas dessa população, e a média de cada amostra é determinada. Encontre a média e o erro padrão da média da distribuição amostral. Então esboce um gráfico da distribuição amostral das médias amostrais.



Probabilidade e o Teorema do Limite Central

Encontrar a probabilidade de que uma média de amostra caia em um dado intervalo da distribuição amostral

Para transformar x em um z-escore

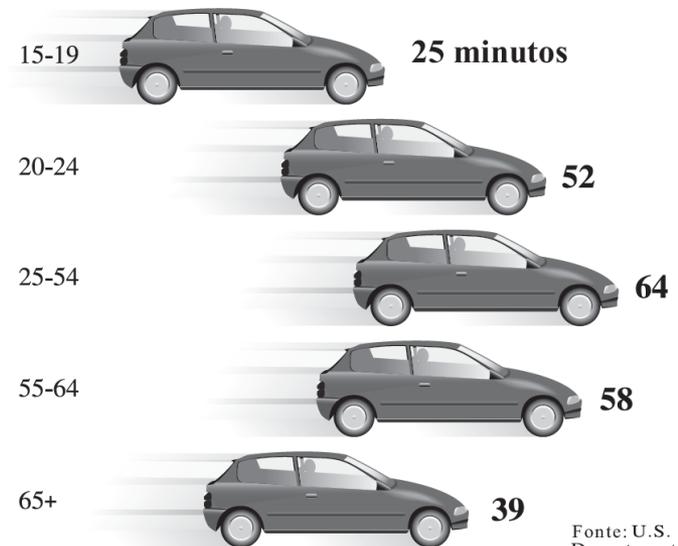
$$z = \frac{\text{Valor} - \text{Média}}{\text{Desvio padrão}} = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

Exercício 12.3

O gráfico mostra o tempo gasto pelas pessoas dirigindo a cada dia. Você seleciona aleatoriamente 50 motoristas de 15 até 19 anos. Qual é a probabilidade de que o tempo médio que eles gastem dirigindo diariamente esteja entre 24,7 e 25,5 minutos? Assuma que $\sigma = 1,5$ minutos.

Tempo atrás do volante

Média de tempo gasto por dia, dirigindo, por faixa etária:



Fonte: U.S. Department of Transportation.

Exercício 12.4

Os gastos médios com alojamento e refeição por ano de faculdades de quatro anos são de \$ 6.803. Você seleciona aleatoriamente 9 faculdades de quatro anos. Qual é a probabilidade de que a média de alojamento e refeição seja menor que \$ 7.088? Suponha que os gastos com alojamento e refeição sejam normalmente distribuídos com um desvio padrão de \$ 1.125.

Exercício 12.5

Um auditor de um banco afirma que os gastos dos cartões de crédito são normalmente distribuídos com uma média de \$ 2.870 e um desvio padrão de \$ 900. Qual a probabilidade de um portador de cartão de crédito aleatoriamente selecionado tenha um gasto menor que \$ 2500



Exercício 12.6

Você seleciona aleatoriamente 25 portadores de cartão de crédito. Qual é a probabilidade de que a média dos gastos dos seus cartões de crédito seja menor que \$ 2.500?

Exercício 12.7

- Existe uma chance de 34% para o indivíduo ter um gasto menor que \$ 2.500
- Existe apenas 2% de chance de que a média de uma amostra de 25 tenha um gasto menor que \$ 2.500. Portanto é um evento incomum
- Então, é possível que a amostra seja incomum ou é possível que a afirmação do auditor, de que a média é \$ 2.870, esteja incorreta

Objetivos

- Encontrar distribuições amostrais e verificar suas propriedades
- Interpretar o Teorema do Limite Central
- Aplicar o Teorema do Limite Central para encontrar a probabilidade de uma média da amostra

Aproximações normais de distribuições binomiais



Objetivos

- Determinar quando a distribuição normal pode se aproximar da distribuição binomial
- Encontrar a correção pela continuidade
- Usar a distribuição normal para aproximar probabilidades binomiais

Aproximação normal para distribuição binomial

Procedimento cirúrgico tem chance de 85% de sucesso e um médico faz o procedimento em 10 pacientes, qual a probabilidade de exatamente duas cirurgias com sucesso?

E se o médico fizer a cirurgia em 150 pacientes e você quiser encontrar a probabilidade de menos de 100 cirurgias com sucesso?

Aproximação normal para distribuição binomial

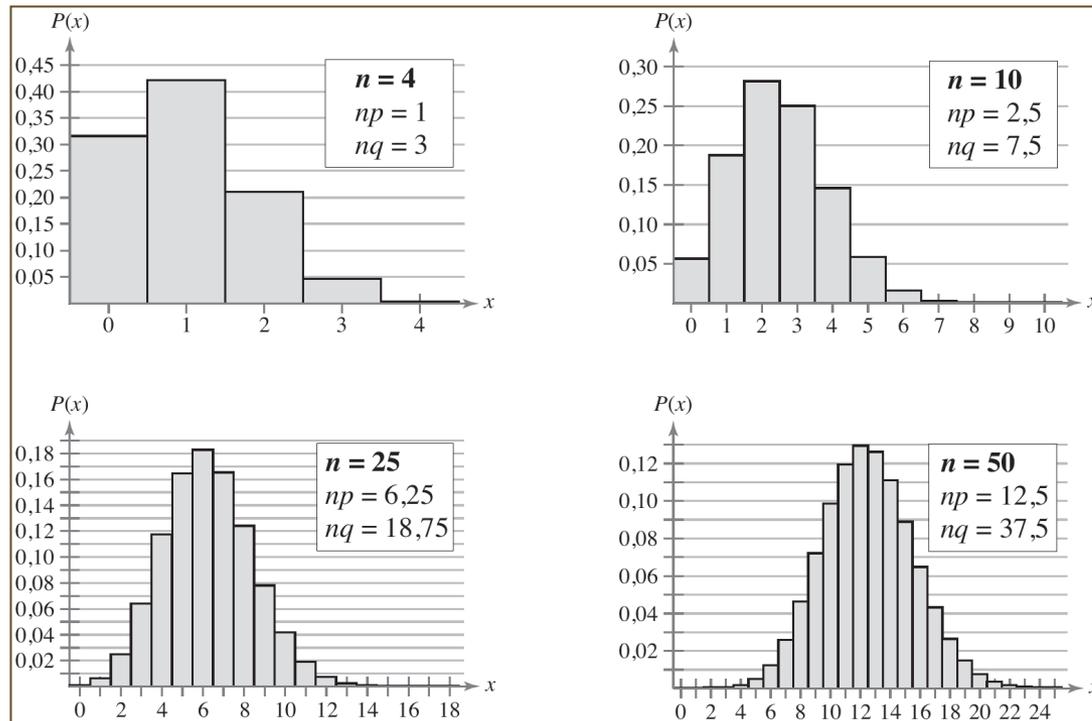
A distribuição binomial é aproximada para normal quando não é prático utilizar a distribuição binomial para encontrar uma probabilidade

Aproximação normal para uma distribuição binomial

- Se $np \geq 5$ e $nq \geq 5$, a variável aleatória binomial x é aproximada por uma normalmente distribuída com
 - média $\mu = np$
 - desvio padrão $\sigma = \sqrt{npq}$

Aproximação normal para distribuição binomial

Distribuição binomial: $p = 0,25$



Quando n aumenta, o histograma se aproxima de uma curva normal

Exercício 13.1

Decida se você pode usar a distribuição normal para aproximar x , sendo ele o número de pessoas que responderam sim. Se puder, encontre a média e o desvio padrão.

1. 51% dos adultos nos EUA cuja resolução de ano novo era se exercitar mais alcançaram essa meta. Você seleciona aleatoriamente 65 adultos cuja resolução era se exercitar mais e pergunta se alcançaram essa resolução.



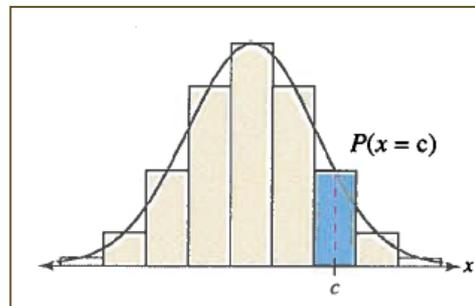
Exercício 13.2

2. Quinze por cento dos adultos nos EUA não fazem resoluções de ano novo. Você seleciona aleatoriamente 15 adultos nos EUA e pergunta a cada um se fez uma resolução de ano novo.



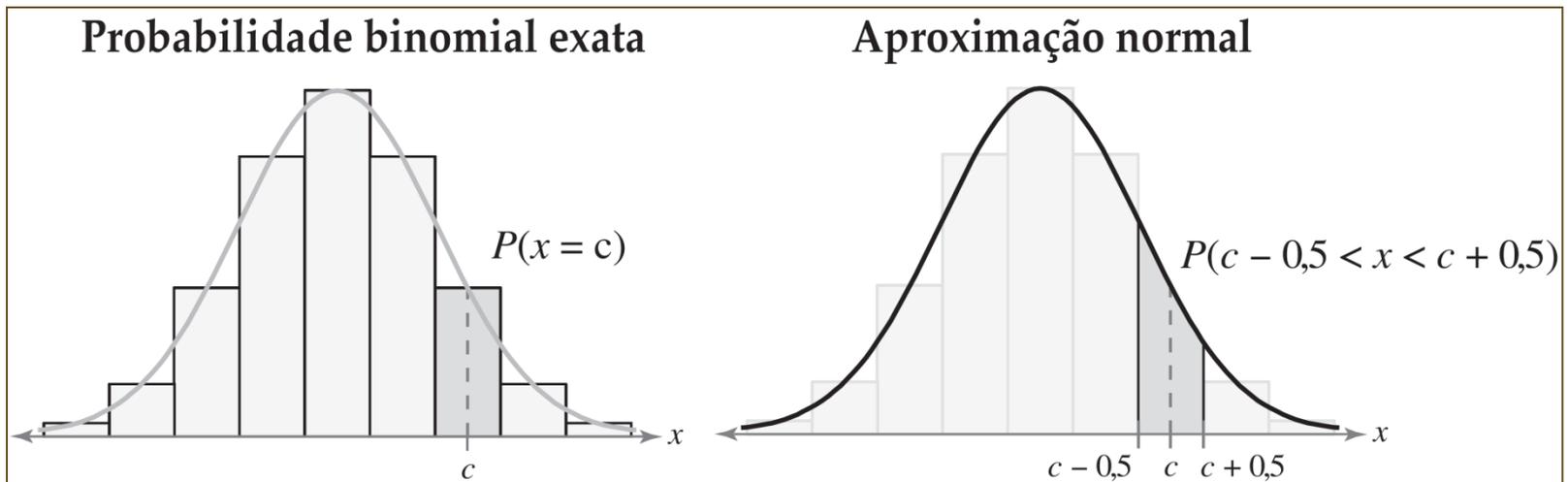
Correção pela continuidade

- A distribuição binomial é discreta e pode ser representada por um histograma
- Para calcular as probabilidades binomiais *exatas*, a fórmula binomial é usada para cada valor de x e os resultados são somados
- Isso corresponde geometricamente a somar as áreas das barras no histograma de probabilidade



Correção pela continuidade

- Quando usa-se uma distribuição normal contínua para aproximar uma probabilidade binomial, é preciso mover 0,5 unidade para a esquerda e para a direita do ponto médio para incluir todos os possíveis valores x no intervalo



Exercício 13.3

1. Probabilidade de obter entre 270 e 310 sucessos

Exercício 13.4

2. A probabilidade de obter pelo menos 158 sucessos.

Exercício 13.5

3. A probabilidade de obter menos de 63 sucessos.

Usando a distribuição normal para aproximar probabilidades binomiais

Em palavras

Verificar se a distribuição binomial se aplica.

Determine se pode usar a distribuição binomial para aproximar x ,

Encontre a média μ e o desvio padrão σ para a distribuição.

Em símbolos

Especifique n , p e q .

$$np \text{ é } \geq 5?$$

$$nq \text{ é } \geq 5?$$

$$\mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

Usando a distribuição normal para aproximar probabilidades binomiais

Em palavras

Aplique a correção pela continuidade apropriada e sombreie a área sob a curva.

Encontre o(s) score(s) z correspondente(s)

Encontre a probabilidade.

Em símbolos

Some ou subtraia 0,5 dos pontos finais.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Use a tabela normal padrão.

Exercício 13.6

51% dos adultos nos EUA cuja resolução de ano novo era se exercitar mais alcançaram essa resolução. Você seleciona aleatoriamente 65 adultos nos EUA cuja resolução era se exercitar mais e pergunta se eles alcançaram essa resolução. Qual é a probabilidade de que menos de 40 deles respondam sim? (*Fonte: Opinion Research Corporation.*)

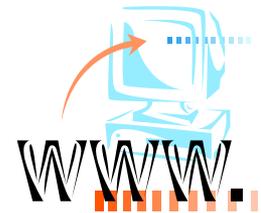


Exercício 13.7

- 38% das pessoas nos EUA admitem bisbilhotar nos armários de banheiro de outras. Você seleciona aleatoriamente 200 pessoas e pergunta se bisbilhotam no armário do banheiro de outras pessoas. Qual a probabilidade de que pelo menos 70 digam sim? R. 0,8289

Exercício 13.8

Um pesquisa reporta que 86% dos usuários de internet utilizam o Internet Explorer[®] do Windows[®] como seu navegador. Você seleciona aleatoriamente 200 usuários de internet e os pergunta se eles usam o Internet Explorer[®]. Qual é a probabilidade de que exatamente 176 deles digam que sim? (*Fonte: OneStat.com.*)



Exercício 13.9

- 34% das pessoas nos EUA tem tipo sanguíneo A. Você seleciona 32 pessoas aleatoriamente e pergunta se o tipo sanguíneo delas é A
 - Encontre a probabilidade de que exatamente 12 pessoas digam ter o tipo sanguíneo A
 - Encontre a probabilidade de no mínimo 12 pessoas digam ter o tipo sanguíneo A
 - Encontre a probabilidade de que menos de 12 pessoas digam ter tipo sanguíneo A
 - Uma campanha de doação de sangue gostaria de conseguir pelo menos 60 doadores com tipo sanguíneo A. Há 150 doadores. Qual a probabilidade de que não haja doadores de tipo A suficientes?

Objetivos

- Determinamos quando a distribuição binomial pode ser aproximada pela distribuição normal
- Encontramos a correção pela continuidade
- Usamos a distribuição normal para aproximar probabilidades binomiais