PME3298 – Fenômenos de Transporte
1º semestre / 2019 – Prof. Dr. Bruno Souza Carmo

Gabarito da Prova 2

1ª Questão (3,0 pontos)

(a) Parâmetros envolvidos: Q, g, D, h, θ. Conjunto de dimensões fundamentais: MLt.

$$Q \doteq \frac{L^3}{t}, \qquad g \doteq \frac{L}{t^2}, \qquad D \doteq L, \qquad h \doteq L, \qquad \theta \doteq 1$$

A massa não aparece nas expressões.

Matriz dimensional:

Parâmetros repetentes:

g, D

	Q	g	D	h	θ
L	3	1	1	1	0
t	-1	-2	0	0	0

$5 - 2 = 3$ equações dimensionais

$$\Pi_1 = Q g^a D^b \quad \Rightarrow \quad (L^3 t^{-1})(L t^{-2})^a (L)^b = L^0 t^0$$

$$[t]: \quad -1 - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1/2$$

$$[L]: \quad 3 + a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -5/2$$

$$\boxed{\Pi_1 = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}}} \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

$$\Pi_2 = h g^a D^b \quad \Rightarrow \quad (L)(L t^{-2})^a (L)^b = L^0 t^0$$

$$[t]: \quad -2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$[L]: \quad 1 + a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -1$$

$$\boxed{\Pi_2 = \frac{h}{D}} \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

$$\Pi_3 = \theta g^a D^b \quad \Rightarrow \quad (1)(L t^{-2})^a (L)^b = L^0 t^0$$

$$[t]: \quad -2a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$[L]: \quad a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$\boxed{\Pi_3 = \theta} \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

$$\frac{Q}{\sqrt{gD^5}} = \phi\left(\frac{h}{D}, \theta\right)$$

(b) Igualando o adimensional Π_2 no modelo e no protótipo:

$$\frac{h_m}{D_m} = \frac{h_p}{D_p} \quad \Rightarrow \quad h_m = h_p\left(\frac{D_m}{D_p}\right) = 0{,}8 \times \left(\frac{1}{5}\right) = 0{,}16\,\mathrm{m} \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Igualando o adimensional Π_3:

$$\theta_m = \theta_p = 10^\circ \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Igualando o adimensional Π_1:

$$\frac{Q_m}{\sqrt{gD_m^5}} = \frac{Q_p}{\sqrt{gD_p^5}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_Q = \frac{Q_m}{Q_p} = \sqrt{\left(\frac{D_m}{D_p}\right)^5} = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^5} = 0{,}0179 \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

2ª Questão (3,0 pontos)

(a) Hipóteses: $u = w = 0$; fita muito larga, tal que $\partial v/\partial z = 0$; escoamento incompressível (ρ constante); pressão na superfície livre do filme é atmosférica, ou seja constante $((\partial p/\partial y)_{x=h} = (\partial p/\partial z)_{x=h} = 0)$. Além disso, o enunciado afirma que o regime é permanente $(\partial v/\partial t = 0)$.

Equação da continuidade: $\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial \cancel{u}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \cancel{w}}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

Equações de Navier–Stokes:

$$\cancel{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\cancel{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \cancel{v}}{\cancel{\partial t}} + \cancel{u}\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial \cancel{v}}{\cancel{\partial y}} + \cancel{w}\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cancel{v}}{\cancel{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 \cancel{v}}{\cancel{\partial z^2}}\right) - \rho g$$

$$\cancel{\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\cancel{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)}$$

Após a simplificação: $\begin{cases} x: \quad 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ y: \quad 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho g \\ z: \quad 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$

Como $\partial p/\partial x = \partial p/\partial z = 0$, concluímos que $p = p(y)$. Porém, estamos admitindo que $(\partial p/\partial y)_{x=h} = 0$. Como p não é função de x, então $\partial p/\partial y = 0$ em todo o domínio. Assim, a equação final na direção y é

$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho g \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Integrando esta equação em relação a x obtemos: $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\rho g}{\mu}x + C_1$

Integrando mais uma vez em relação a x: $v = \dfrac{\rho g}{2\mu}x^2 + C_1 x + C_2$ $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

Aplicando as condições de contorno: $\begin{cases} \bullet\ v = V_0 \text{ para } x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = V_0 \\ \bullet\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ para } x = h \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\dfrac{\rho g h}{\mu} \end{cases}$

A forma final do perfil é: $v = \dfrac{\rho g}{2\mu}(x^2 - 2hx) + V_0$ $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

(b) Chamando de b a largura da fita, temos

$$\frac{Q}{b} = \int_0^h v\,\mathrm{d}x = \int_0^h \left[\frac{\rho g}{2\mu}(x^2 - 2hx) + V_0\right]\mathrm{d}x = \frac{\rho g}{2\mu}\left(\frac{h^3}{3} - 2h\frac{h^2}{2}\right) + V_0 h = -\frac{\rho g h^3}{3\mu} + V_0 h \qquad \boxed{\textbf{0,5 pt}}$$

Portanto, a vazão será nula para: $-\dfrac{\rho g h^3}{3\mu} + V_0 h = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = \dfrac{\rho g h^2}{3\mu}$ $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

3ª Questão (4,0 pontos)

(a) Este é um exercício de condutos do tipo II. Escrevemos a eq. da energia entre os níveis dos reservatórios inferior (i) e superior (s):

$$\left(\cancel{\frac{p_i}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_i \bar{V}_i^2}{2g}} + z_i\right) - \left(\cancel{\frac{p_s}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_s \bar{V}_s^2}{2g}} + z_s\right) + h_b = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2g} + \left(\sum K\right)\frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$-\Delta z + h_b = \left(f\frac{L}{D} + K_{\text{ent}} + K_{\text{cot }45^\circ} + K_{\text{tê}} + K_{\text{cot }90^\circ} + K_{\text{valv 1}} + K_{\text{sai}}\right)\frac{\bar{V}^2}{2g} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

A carga da bomba é $h_b = \dfrac{\dot{W}_b \eta_b}{\gamma Q} = \dfrac{4\dot{W}_b \eta_b}{\gamma \bar{V} \pi D^2}$ $\boxed{\textbf{0,3 pt}}$

Substituindo na equação da energia:

$$-\Delta z + \frac{4\dot{W}_b \eta_b}{\gamma \bar{V} \pi D^2} = \left(f\frac{L}{D} + \sum K\right)\frac{\bar{V}^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(f\frac{L}{D} + \sum K\right)}{2g}\bar{V}^3 + \Delta z \bar{V} - \frac{4\dot{W}_b \eta_b}{\gamma \pi D^2} = 0$$

Substituindo valores numéricos: $\quad (85{,}03f + 0{,}1837)\bar{V}^3 + 200\bar{V} - 34{,}72 = 0$

$$\therefore \quad \bar{V}^3 + \underbrace{\frac{200}{85{,}03f + 0{,}1837}}_{p}\bar{V} - \underbrace{\frac{34{,}72}{85{,}03f + 0{,}1837}}_{q} = 0 \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

Para resolver este problema, precisamos admitir um valor inicial para f, encontrar uma estimativa de $\bar{V}$ com a expressão acima (resolvendo com a fórmula fornecida na prova), calcular $Re = \dfrac{\rho \bar{V} D}{\mu}$, e atualizar o valor o valor de f com a eq. de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2{,}0\log\left(\frac{\epsilon/D}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right) \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

com $\epsilon/D = 0{,}26/1500 = 1{,}733 \times 10^{-4}$. Repetimos o processo até a convergência. Tomaremos como estimativa inicial de f o valor desta variável no regime completamente rugoso:

$$f_{\text{CR}} = \left[-2{,}0\log\left(\frac{\epsilon/D}{3{,}7}\right)\right]^{-2} = 0{,}0133$$

A tabela ao lado mostra as iterações:

Iteração	f_i	p (m²/s²)	q (m³/s³)	$\bar{V}$ (m/s)	Re	f_{i+1}
0	0,0133	151,8	−26,34	0,1735	$2{,}593 \times 10^5$	0,0164
1	0,0164	127,0	−22,05	0,1735	$2{,}593 \times 10^5$	0,0164

O procedimento convergiu, e $\bar{V} = 0{,}1735\,\text{m/s}$. $\boxed{\textbf{0,5 pt}}$

A vazão no sistema será

$$Q = \bar{V}\frac{\pi D^2}{4} = 0{,}307\,\text{m}^3/\text{s} \quad \boxed{\textbf{0,3 pt}}$$

(b) Este problema é do tipo I. A velocidade média é:

$$\bar{V} = \frac{4Q}{\pi D^2} = 0{,}4810\,\mathrm{m/s} \quad \boxed{\mathbf{0{,}3\ pt}}$$

É preciso determinar o coeficiente de perda de carga localizada da válvula 2, que está parcialmente aberta. Fazemos isso escrevendo a expressão da perda localizada e relacionando-a com a perda de pressão através da válvula, lida com o manômetro:

$$K_{\text{valv 2}}\frac{\bar{V}^2}{2g} = \frac{\Delta p}{\gamma} = \delta(S_m - 1) \quad \Rightarrow \quad K_{\text{valv 2}} = \frac{2g\delta(S_m-1)}{\bar{V}^2} = 58{,}7 \quad \boxed{\mathbf{0{,}3\ pt}}$$

Escrevemos agora a equação da energia entre o reservatório superior e o inferior:

$$\left(\cancel{\frac{p_s}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_s\bar{V}_s^2}{2g}} + z_s\right) - \left(\cancel{\frac{p_i}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_i\bar{V}_i^2}{2g}} + z_i\right) - h_t = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2g} + \left(\sum K\right)\frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\Delta z - h_t = \left(f\frac{L}{D} + K_{\text{ent}} + K_{\text{cot }45^\circ} + K_{\text{tê}} + K_{\text{cot }90^\circ} + K_{\text{valv 2}} + K_{\text{sai}}\right)\frac{\bar{V}^2}{2g}$$

Para determinar f, usaremos a equação de Colebrook. A rugosidade relativa é $\epsilon/D = 1{,}733 \times 10^{-4}$ e o número de Reynolds $Re = \rho\bar{V}D/\mu = 7{,}186 \times 10^5$. A equação de Colebrook fornece $f = 0{,}0147$. $\boxed{\mathbf{0{,}3\ pt}}$

Substituindo na eq. da energia:

$$h_t = \Delta z - \left(f\frac{L}{D} + K_{\text{ent}} + K_{\text{cot }45^\circ} + K_{\text{tê}} + K_{\text{cot }90^\circ} + K_{\text{valv 2}} + K_{\text{sai}}\right)\frac{\bar{V}^2}{2g} = 199{,}0\,\mathrm{m} \quad \boxed{\mathbf{0{,}3\ pt}}$$

A potência entregue pela turbina é $\dot{W}_t = \eta_t\gamma Q h_t = 1{,}406\,\mathrm{MW}$. $\boxed{\mathbf{0{,}3\ pt}}$

(c) A energia perdida é a diferença entre a energia cedida à bomba e a energia obtida da turbina. Para temos essa medida percentual, dividimos pela energia cedida à bomba. Como carga é energia por unidade de peso, podemos escrever essa expressão em termos de carga, mas considerando o que é de fato entregue para a bomba, $h_B = \frac{h_b}{\eta_b} = \frac{\dot{W}_b}{\gamma Q_1}$, e o que é de fato extraído da turbina, $h_T = h_t\eta_t = \frac{\dot{W}_t}{\gamma Q_2}$:

$$\text{Perda} = \frac{h_B - h_T}{h_B} = 1 - \frac{h_T}{h_B} = 1 - \frac{\dot{W}_t Q_1}{\dot{W}_b Q_2} = 32{,}4\% \quad \boxed{\mathbf{0{,}5\ pt}}$$