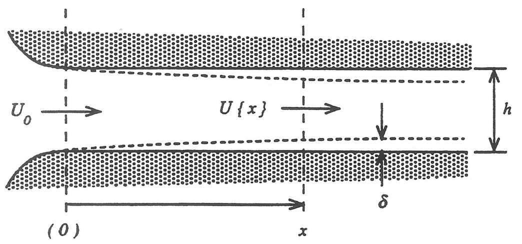
2ª PROVA DE PME3330 - 27/05/2019

1ª Questão(5,0 pontos): Um túnel de vento tem altura *h* e largura (na direção ortogonal ao plano da figura) *b*, com *b*>>*h*, de forma que o escoamento pode ser considerado bidimensional, acontecendo no plano figura. Na entrada do túnel a velocidade é U_o. O escoamento pode ser considerado incompressível. Ocorre o desenvolvimento da camada limite ao longo das paredes superior e inferior. O desenvolvimento dessa camada limite causa uma variação na velocidade $U(x)$ ao longo do centro do túnel. A camada limite é laminar, e pode ser aproximada pelo perfil:

$$\frac{u}{U} = sen\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)$$

Desprezando a variação de pressão ao longo do túnel, obtenha uma expressão para a velocidade $U(x)$ ao longo do centro do túnel como função de U_o, h, x e das propriedades do fluido ρ e ν. (Extraído de Fay, J.A., "Introduction to Fluid Mechanics", Massachusetts Institute of Technology, 1994.)



Dados:

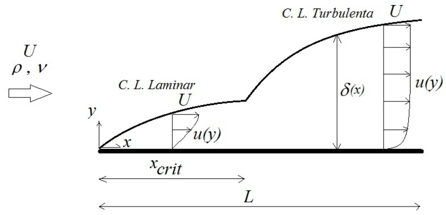
Espessura de Deslocamento $\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$ Espessura de Quantidade de Movimento $\theta = \int_0^\delta \left[\frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)\right] dy$

Equação integral de Von Kármán: $\frac{\tau_o}{\rho U^2} = \frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + \left(2 + \frac{\delta^*}{\theta}\right)\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}$ $sen^2\eta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\eta$

2ª Questão (3,0 pontos): A camada limite sobre uma placa plana paralela à corrente sofre transição na posição x_{crit}, $x_{crit} < L$. São conhecidos os coeficientes de arrasto para um lado da placa quando a camada limite é inteiramente laminar e quando a camada limite é inteiramente turbulenta:

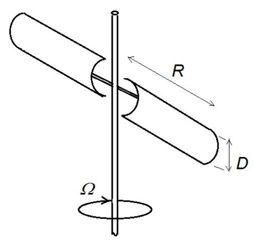
$$C_{Dlam} = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \quad \text{e} \quad C_{Dturb} = \frac{0{,}031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}}$$

Obtenha uma expressão para o coeficiente da arrasto da placa C_D como função de Re_{xcrit} e Re_L considerando agora que a placa é laminar até x_{crit} e turbulenta depois desse ponto.



Dados: $\mathrm{Re}_{xcrit} = \frac{U\,x_{crit}}{\nu}$ $\mathrm{Re}_L = \frac{UL}{\nu}$ $\mathrm{Re}_x = \frac{U\,x}{\nu}$ $c_{f\,lam} = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$ $c_{f\,turb} = \frac{0{,}027}{\mathrm{Re}_x^{1/7}}$ $C_D = \frac{1}{L}\int_0^L c_f\,dx$

3ª Questão (2,0 pontos): Um misturador rotativo consiste em dois semitubos de comprimento *R* girando em torno de um braço central. Se o coeficiente de arrasto da parte côncava de um semitubo de diâmetro *D* é dado por C_D e pode ser considerado constante, obtenha uma expressão para a potência $\dot{W}$ necessária para girar o misturador com velocidade angular Ω em fluido estacionário de massa específica ρ.



(Extraído de Frank M. White, "Mecânica dos Fluidos", 4ª edição)

Dado: $F_{arrasto} = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D$

GABARITO

1ª Questão(5,0 pontos) - Solução:

A velocidade ao longo do centro do túnel é dada por:

$$U_o\,h = U\left(h-2\delta\right)+\,2\int_0^{\delta} u\,dy$$

Isso resulta:

$$U_o\,h = U\,h - 2\left(U\int_0^{\delta} dy - \int_0^{\delta} u\,dy\right)$$

Que também pode ser escrito:

$$U_o\,h = U\,h - 2U\int_0^{\delta}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

Isso resulta:

$$U_o\,h = U\left(h-2\delta^*\right)$$

Ou seja:

$$\boxed{U=\frac{U_o}{1-2\delta^*/h}} \quad \text{(I)}$$

Assim, o problema passa a ser determinar o desenvolvimento da camada limite e da espessura de deslocamento. Se, inicialmente, posso considerar que a variação de pressão ao longo do túnel é irrelevante, temos que:

$$\boxed{\frac{\tau_o}{\rho U^2}=\frac{d\theta}{dx}} \quad \text{(II)}$$

Do perfil de velocidades, podemos calcular a espessura de quantidade de movimento. Temos que:

$$\theta=\int_0^{\delta}\left[\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)\right]dy=\int_0^{\delta}\left[sen\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)-sen^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\right]dy$$

Podemos fazer:

$$\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}=\eta\ ;\ dy=\frac{2\delta}{\pi}d\eta$$

Com esse resultado, temos:

$$\theta=\frac{2\delta}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[sen\,\eta - sen^2\eta\right]\,d\eta$$

Lembrando agora que $sen^2\eta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\eta$:

$$\theta = \frac{2\delta}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[sen\,\eta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\eta\right] d\eta$$

Integrando:

$$\theta = \frac{2\delta}{\pi}\left[-\cos\eta - \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{4}sen 2\eta\right]_0^{\pi/2}$$

Isso resulta:

$$\theta = \frac{2\delta}{\pi}\left\{\left[-\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}sen\,\pi\right] - \left[-\cos 0 - \frac{1}{2}0 + \frac{1}{4}sen 0\right]\right\} = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\delta$$

Logo:

$$\boxed{\theta = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\delta} \text{ (III)}$$

A tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau_o = \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu\, U \frac{\pi}{2\delta}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\right]_{y=0}$$

Logo:

$$\boxed{\tau_o = \mu\frac{\pi}{2}\frac{U}{\delta}} \text{ (IV)}$$

Substituindo (III) e (IV) em (II):

$$\nu\frac{\pi}{2}\frac{1}{U\delta} = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\frac{d\delta}{dx}$$

Isso resulta:

$$\delta\, d\delta = \frac{\pi}{\frac{4}{\pi} - 1}\frac{\nu}{U}dx = \frac{\pi^2}{4-\pi}\frac{\nu}{U}dx$$

Que resulta:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{\pi^2}{4-\pi}\frac{\nu\, x}{U} + C$$

Como $\delta = 0$ para $x = 0$, temos que $C = 0$. Dividindo os dois lados da equação por x^2:

$$\frac{\delta^2}{x^2} = \frac{\frac{2\pi^2}{4-\pi}}{\frac{Ux}{\nu}}$$

Tirando a raiz:

$$\boxed{\frac{\delta}{x}=\frac{\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}\,\pi}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}$$

A espessura de deslocamento é dada por:

$$\delta^*=\int_0^{\delta}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy=\int_0^{\delta}\left[1-sen\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\right]dy=\frac{2\delta}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-sen\,\eta)\,d\eta=\frac{2\delta}{\pi}\left[\eta+\cos\eta\right]_0^{\pi/2}$$

Isso resulta:

$$\boxed{\delta^*=\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\delta}$$

Ou seja,

$$\boxed{\frac{\delta^*}{x}=\frac{(\pi-2)\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}\quad \text{(V)}$$

Substituindo (V) em (I):

$$\boxed{U=\frac{U_o\,h}{h-2(\pi-2)\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}\frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}}$$

2ª Questão (3,0 pontos) - Solução:

Podemos escrever:

$$C_D=\frac{1}{L}\left(\int_0^{x_{crit}}c_{f\,lam}\,dx+\int_{x_{crit}}^{L}c_{f\,turb}\,dx\right)$$

Ou ainda:

$$C_D=\frac{1}{L}\int_0^{L}c_{f\,turb}\,dx+\frac{1}{L}\left(\int_0^{x_{crit}}c_{f\,lam}\,dx-\int_0^{x_{crit}}c_{f\,turb}\,dx\right)$$

Logo:

$$C_D=\frac{0{,}031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}}+\frac{1}{L}\left(\int_0^{x_{crit}}c_{f\,lam}\,dx-\int_0^{x_{crit}}c_{f\,turb}\,dx\right)$$

Dividindo e multiplicando os termos entre parênteses por x_{crit}:

$$C_D=\frac{0{,}031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}}+\frac{x_{crit}}{L}\left(\frac{1}{x_{crit}}\int_0^{x_{crit}}c_{f\,lam}\,dx-\frac{1}{x_{crit}}\int_0^{x_{crit}}c_{f\,turb}\,dx\right)$$

Note agora que o primeiro termo entre parênteses é o coeficiente de arrasto de uma placa plana de comprimento x_{crit} com camada limite laminar, e o segundo termo é o coeficiente de arrasto de uma placa plana de comprimento x_{crit} com camada limite turbulenta. Assim:

$$C_D = \frac{0{,}031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}} - \frac{x_{crit}}{L}\left(\frac{0{,}031}{\mathrm{Re}_{x\,crit}^{1/7}} - \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_{x\,crit}}}\right)$$

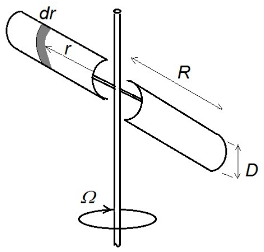
Ou ainda:

$$\boxed{C_D = \frac{0{,}031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}} - \frac{\mathrm{Re}_{x\,crit}}{\mathrm{Re}_L}\left(\frac{0{,}031}{\mathrm{Re}_{x\,crit}^{1/7}} - \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_{x\,crit}}}\right)}$$

3ª Questão (3,0 pontos) - Solução:

Um elemento *dr* em um raio *r* ao longo de um dos braços sofre um arrasto:

$$dF = C_D \frac{1}{2}\rho(\Omega r)^2\, D\, dr$$



Para os dois braços, esse arrasto gera um torque:

$$T = \int_0^R C_D\, \rho \Omega^2\, D r^3\, dr = C_D\, \rho \Omega^2\, D \frac{R^4}{4}$$

e a potência será:

$$\dot{W} = T \times \Omega = C_D\, \rho \Omega^3\, D \frac{R^4}{4}$$