MA22 - Unidade 8 - Resumo 1

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

6 de Abril de 2013

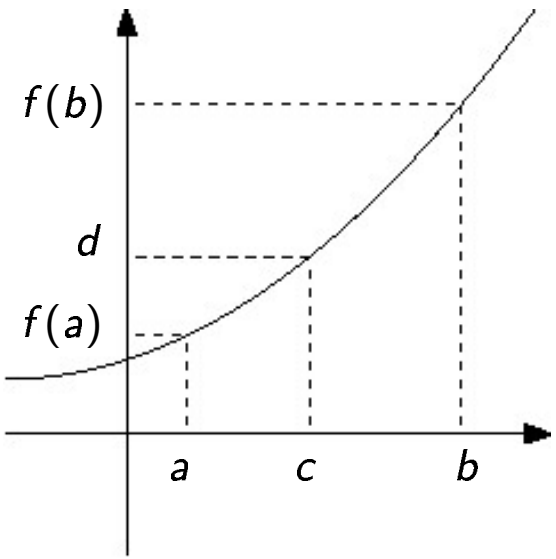
Teorema do Valor Intermediário

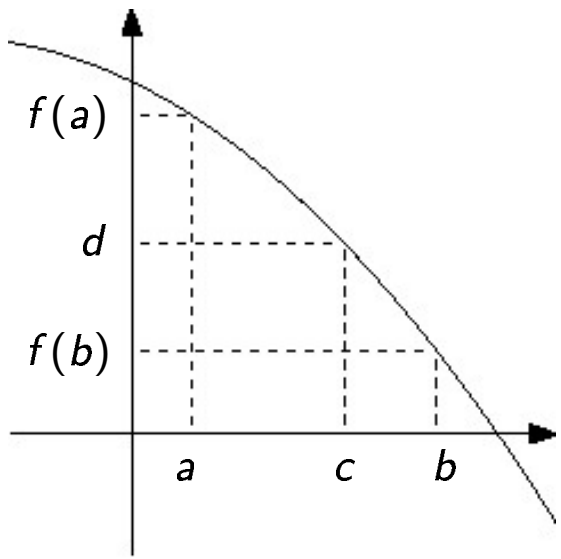
Este teorema vai responder a questão a seguir:

Pergunta Dada uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, sob quais *condições* podemos afirmar que, se d é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um número c, entre a e b, tal que

$$f(c) = d?$$

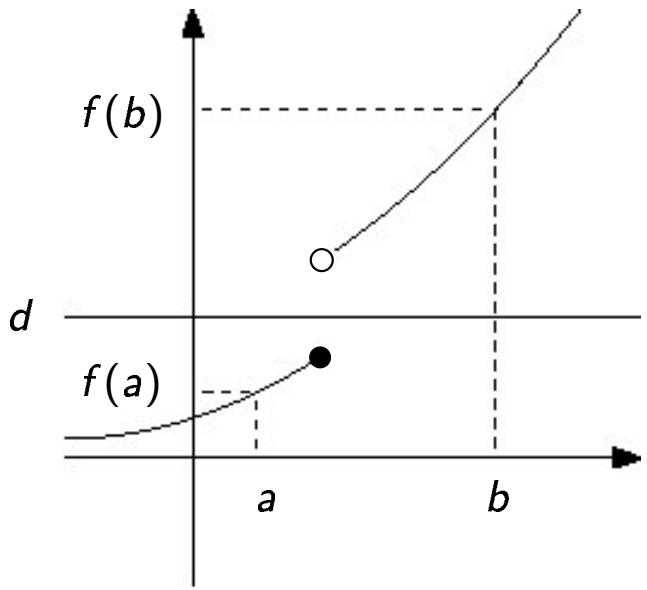
Nestes dois casos a pergunta tem resposta afirmativa:





Teorema do Valor Intermediário

Nem sempre isso acontece. Veja a próxima ilustração.



Não existe $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = d$.

Teorema do Valor Intermediário

A continuidade é uma condição necessária para a existência de um ponto c tal que $f(c) = d$, como ilustra o exemplo da figura anterior.

A continuidade é a condição necessária para o gráfico da função, ao passar do *nível* $f(a)$ para o *nível* $f(b)$, cruzar todas as retas horizontais entre eles, passando também pela reta $y = d$, pelo menos uma vez. A outra condição diz respeito ao domínio da função, como você verá no decorrer do texto.

Teorema (Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e seja d um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = d.$$

Teorema do Valor Intermediário

Observação O enunciado de um teorema é fundamental. Você deve lembrar-se das hipóteses, saber qual é a conclusão e alguns bons exemplos aos quais o teorema se aplica. Neste caso, os ingredientes são:

(a) um intervalo fechado e limitado;

(b) uma função contínua definida no dito intervalo;

(c) um número entre os valores da função nos extremos do intervalo.

A conclusão do teorema diz que o tal número pertence à imagem da função.

Aplicações do TVI

Teorema (Imagem de um Intervalo) Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um intervalo I. Então, $f(I)$ é um intervalo.

Prova Se f é constante, $f(I) = [c, c]$. Vamos então supor f não constante e sejam α e β elementos de $f(I)$. Então, existem a e b em I tais que $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$. Suponhamos que $a < b$. Aqui usamos a hipótese de I ser um intervalo: $[a, b] \subset I$. A função f, contínua em I, quando restrita a $[a, b]$, ainda é uma função contínua. Agora, suponha γ um elemento qualquer entre α e β. Portanto, γ é um elemento entre $f(a)$ e $f(b)$ e, pelo Teorema do Valor Intermediário aplicado a f restrita à $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$. Isso quer dizer que todos os elementos entre α e β são elementos de $f(I)$, ou seja, $[\alpha, \beta] \subset f(I)$.

Aplicações do TVI

Proposição Seja $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com n um inteiro ímpar e $a_n \neq 0$. Então p possui uma raiz real.

Prova Podemos supor $a_n > 0$ (justifique) e escrever

$$p(x) \;=\; x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right).$$

Assim, $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$, uma vez que n é um número ímpar. Isso significa que, pelo teorema do slide anterior, $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

Aplicações do TVI

O TVI é um resultado que garante a *existência* de algo: um número com determinada propriedade. Veja como o resultado pode ser usado para garantir a existência da raiz quadrada de um número positivo.

Proposição Se $a > 0$, então existe um número $\alpha > 0$ tal que $\alpha^2 = a$.

Prova Considere a função contínua $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$. Esta função é crescente ($a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$), $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Como a imagem de f é um intervalo da reta, concluímos que $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. Logo, para cada $a \in [0, +\infty)$, existe um único $\alpha \in [0, +\infty)$, tal que $\alpha^2 = a$. Isto é, $\sqrt{a} = \alpha$.

Teorema de Weierstrass - Valores Extremos

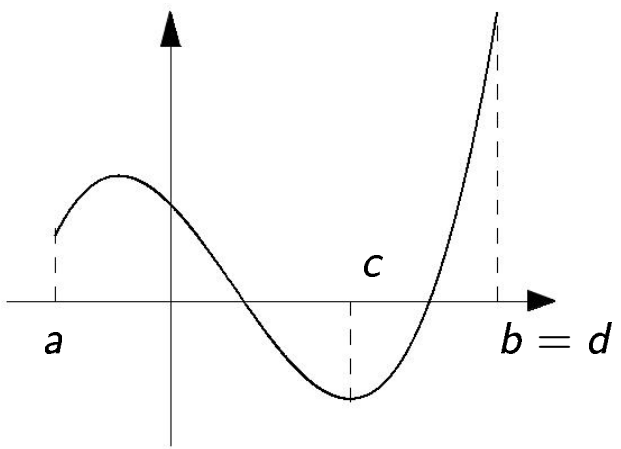
O teorema que apresentaremos a seguir é útil para garantir a existência de solução para vários problemas de otimização. Ele informa condições nas quais uma certa função assume seus valores extremos.

Teorema (Teorema de Weierstrass) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$, fechado e limitado da reta. Então, existem números c e d, contidos em $[a, b]$, tais que, para todo $x \in [a, b]$,

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

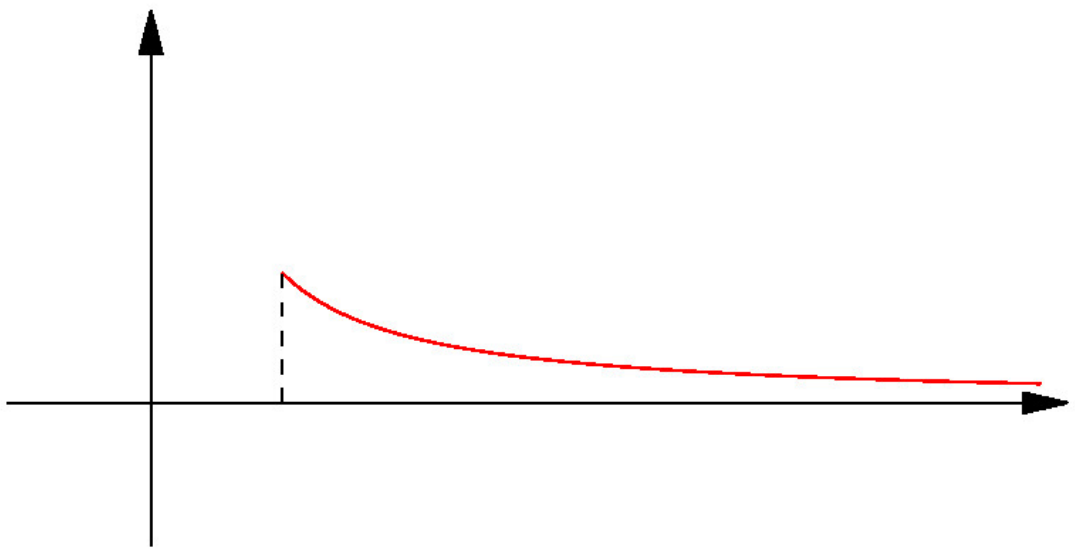
Teorema de Weierstrass - Valores Extremos

Veja na figura a seguir um exemplo de uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$, que assume seu valor mínimo em c, no interior do domínio, e seu valor máximo em $b = d$, na extremidade superior do seu domínio.



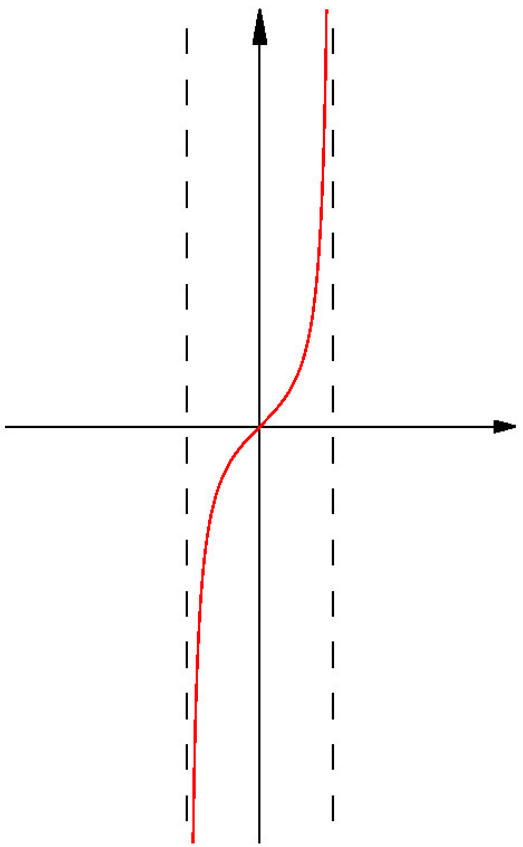
Teorema de Weierstrass - Valores Extremos

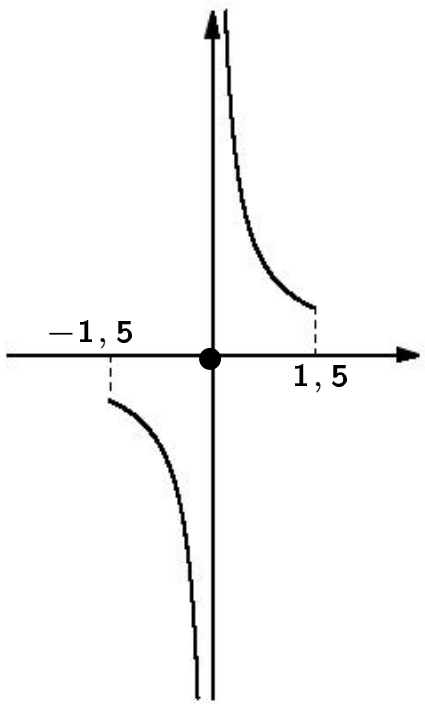
Exemplo As características do domínio da função f são fundamentais para o resultado. Veja a função $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, no intervalo fechado e limitado. A função f é limitada, mas não admite mínimo. Isto é, não existe $a \in [1, +\infty)$ tal que $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in [1, +\infty)$.



Teorema de Weierstrass - Valores Extremos

Exemplo A característica de ser limitado apenas, também não é suficiente para se obter o resultado. Considere a função $g : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$. Neste caso, temos uma função bijetora entre o intervalo $(-1, 1)$ e a reta real. Portanto, a função g não admite máximo e não admite mínimo.



Teorema de Weierstrass - Valores Extremos

Exemplo A continuidade da função é essencial. Por exemplo, a função $h\colon [-1,5,\ 1,5] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \dfrac{1}{x}$, se $x \neq 0$, e $f(0) = 0$, é tal que, para todo número real $r > 0$, existem a e b no intervalo $[-1,5,\ 1,5]$, tais que $h(a) < -r$ e $h(b) > r$. Ou seja, h não admite máximo e não admite mínimo, apesar do seu domínio ser um intervalo fechado e limitado. É evidente que esta função não é contínua em $x = 0$. Veja o gráfico a seguir.