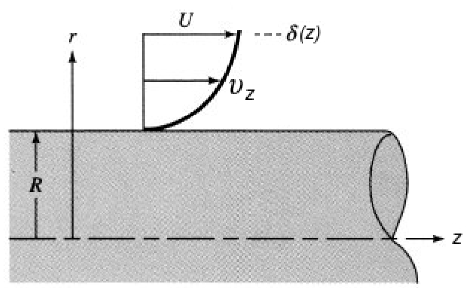
Mecânica dos Fluidos II (PME 3330)
Gabarito Segunda Prova - 2018

1. (**2 pontos**) Partindo das equações de continuidade e de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas para um escoamento permanente, bidimensional e axissimétrico, obtenha as equações aplicáveis em uma camada limite sobre um corpo cilíndrico, junto com as condições de contorno. Explique todas as hipóteses consideradas.

Continuidade: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\upsilon_r\right)+\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=0$

Navier-Stokes, componente r: $$\upsilon_r\frac{\partial \upsilon_r}{\partial r}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_r}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \upsilon_r}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \upsilon_r}{\partial z^2}-\frac{\upsilon_r}{r^2}\right]$$

Navier-Stokes, componente z: $$\upsilon_r\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial z^2}\right]$$



2. (**5 pontos**) Considere o escoamento permanente de uma camada limite laminar numa placa plana. Em uma determinada posição x_0, a espessura da camada é δ_0, enquanto a pressão e velocidade na corrente livre são respectivamente p_0 e U_0. Utilizando a equação integral de von Karman, queremos determinar a distribuição de pressão e velocidade necessários para que a espessura da camada limite não mude com a posição. Para isto, utilize um perfil de velocidade da forma:

$$\frac{u}{U}=\begin{cases} f(\eta) & \text{para} \quad 0\le y\le\delta \\ 1 & \text{para} \quad y>\delta \end{cases}$$

onde $\eta=\frac{y}{\delta}$ e $U=U(x)$ é a velocidade na corrente livre. Observe que $f(\eta)$ é um perfil "razoável", que satisfaz a condição de não escorregamento e fornece um valor finito de derivada na parede, além de ser contínuo na borda da camada limite. Encontre a solução em função das propriedades físicas do fluido, os valores de referência e os seguintes parâmetros:

$$C_1=\int_0^1\left[1-f(\eta)\right]d\eta \quad ; \quad C_2=\int_0^1 f(\eta)\left[1-f(\eta)\right]d\eta \quad ; \quad C_3=f'(0)$$

Equação integral de Von Karman em estado permanente, tensão de cisalhamento na parede, espessuras de deslocamento e de momento:

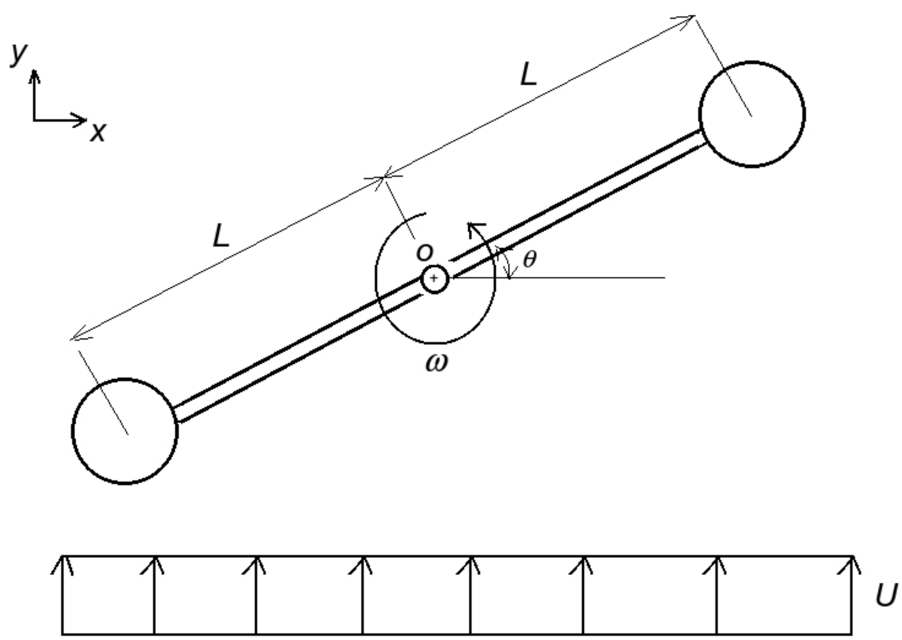
$$\frac{\tau_p}{\rho}=\frac{\partial}{\partial x}\left(U^2\theta\right)+U\,\delta^*\,\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\tau_p=\mu\frac{\partial u}{\partial y}(y=0) \qquad \delta^*=\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{U}\right)dy \qquad \theta=\int_0^\delta\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

Equação de Bernoulli, estado permanente: $p+\frac{1}{2}\rho U^2=cte$

3. (**3 pontos**) Duas esferas idênticas de diâmetro D e coeficiente de arrasto C_D estão presas à uma haste horizontal de comprimento $2L$ que gira ao redor de um eixo vertical que passa pelo ponto o. O dispositivo está imerso numa corrente de fluido de massa específica ρ e velocidade uniforme U. Considerando o arrasto nas esferas e desprezando arrasto na haste e atritos no eixo, qual o momento $M = M(\theta, \rho, U, \omega, L, D, C_D)$ a ser aplicado no eixo para um dado ângulo θ de modo a manter o dispositivo girando com velocidade angular constante ω? Considere que $\omega L > U$.

Força de arrasto: $F = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A C_D$



Gabarito

1ª Questão - Solução:
Fazendo as mesmas hipóteses que Prandtl fez para a camada limite sobre uma placa:
$\upsilon_r << \upsilon_z ; \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z} << \frac{\partial \upsilon_z}{\partial r} ; \frac{\partial \upsilon_r}{\partial z} << \frac{\partial \upsilon_r}{\partial r} ; \frac{\partial^2 \upsilon_z}{\partial z^2} << \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}\right)$, resulta:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\upsilon_r\right)+\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}=0,\; p=p(z)$$

$$\upsilon_r\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}+\upsilon_z\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\,p}{d\,z}+\nu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}\right)$$

Com condições de contorno: $\upsilon_z=\upsilon_r=0$ se $r=R$ e $\upsilon_z \to U$ se $r\to\infty$.

2ª Questão - Solução:
As espessuras de deslocamento e momento e tensão de cisalhamento na parede resultam:

$$\delta^* = C_1\,\delta \qquad ; \qquad \theta = C_2\,\delta \qquad ; \qquad \tau_p=\frac{C_3\,\mu U}{\delta}$$

Substituindo na equação integral, com a condição de espessura da camada limite constante, resulta:

$$C_3\frac{\mu U}{\rho\,\delta_0}=C_2\,\delta_0\,2U\frac{dU}{dx}+C_1\,\delta_0\,U\frac{\partial U}{\partial x}=\left(C_1+2C_2\right)\delta_0\,U\frac{dU}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dU}{dx}=\frac{C_3}{C_1+2C_2}\frac{\mu}{\rho\delta_0^2}=cte=A>0$$

Integrando, o perfil de velocidade resulta: $U(x)=U_0+A(x-x_0)$

Finalmente, por Bernoulli:

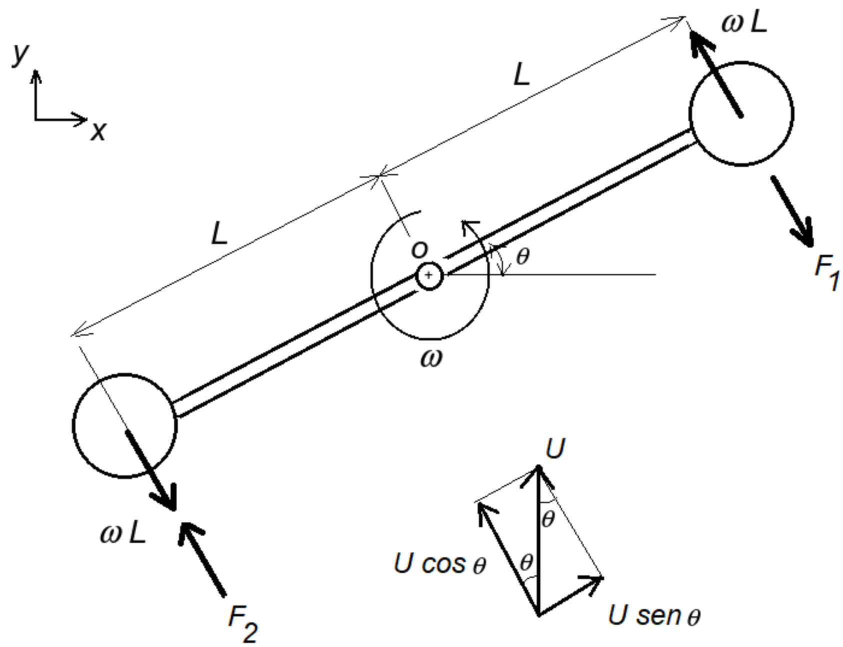
$$p+\frac{1}{2}\rho U^2=p_0+\frac{1}{2}\rho U_0^2 \quad \Rightarrow \quad p(x)=p_0-\frac{1}{2}\rho\left\{\left[U_0+A(x-x_0)\right]^2-U_0^2\right\}$$

Vemos que $\frac{dU}{dx}>0$ e $\frac{dp}{dx}<0$.

3ª Questão - Solução:
Observando a figura, considerando sinal positivo para o sentido anti-horário, o momento das forças de arrasto é dado por:

$$M_{arrasto}=-\left(F_1+F_2\right)L$$

Decompondo a velocidade da corrente nas direções tangencial e radial, as forças de arrasto devidas às velocidades relativas são:



$$F_1 = \frac{1}{2}\rho(\omega L - U\cos\theta)^2 \frac{\pi D^2}{4} C_D$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\rho(\omega L + U\cos\theta)^2 \frac{\pi D^2}{4} C_D$$

Assim:

$$M_{arrasto} = -\left(2\omega^2 L^2 + 2U^2\cos^2\theta\right)\frac{1}{2}\rho\frac{\pi D^2}{4} C_D L$$

O momento aplicado no eixo será:

$$M = -M_{arrasto} = \left(\omega^2 L^2 + U^2\cos^2\theta\right)\rho\frac{\pi D^2}{4} C_D L$$

Outra solução possível é lembrar que a força de arrasto sobre uma esfera é dada por:

$$F = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A C_D$$

Onde a área A independe da direção da corrente. Se temos uma corrente $\vec{U}_\infty = U\vec{e}_x + V\vec{e}_y$:

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\rho\left|\vec{U}_\infty\right|^2 A C_D \vec{e}_U$$

Onde $\vec{e}_U$ é um versor na direção da corrente. Temos que:

$$\left|\vec{U}_\infty\right|^2 = U^2 + V^2$$

E o versor na direção da corrente é dado por:

$$\vec{e}_U = \frac{\vec{U}_\infty}{\left|\vec{U}_\infty\right|} = \frac{U\vec{e}_x + V\vec{e}_y}{\sqrt{U^2 + V^2}}$$

Assim, a força de arrasto é:

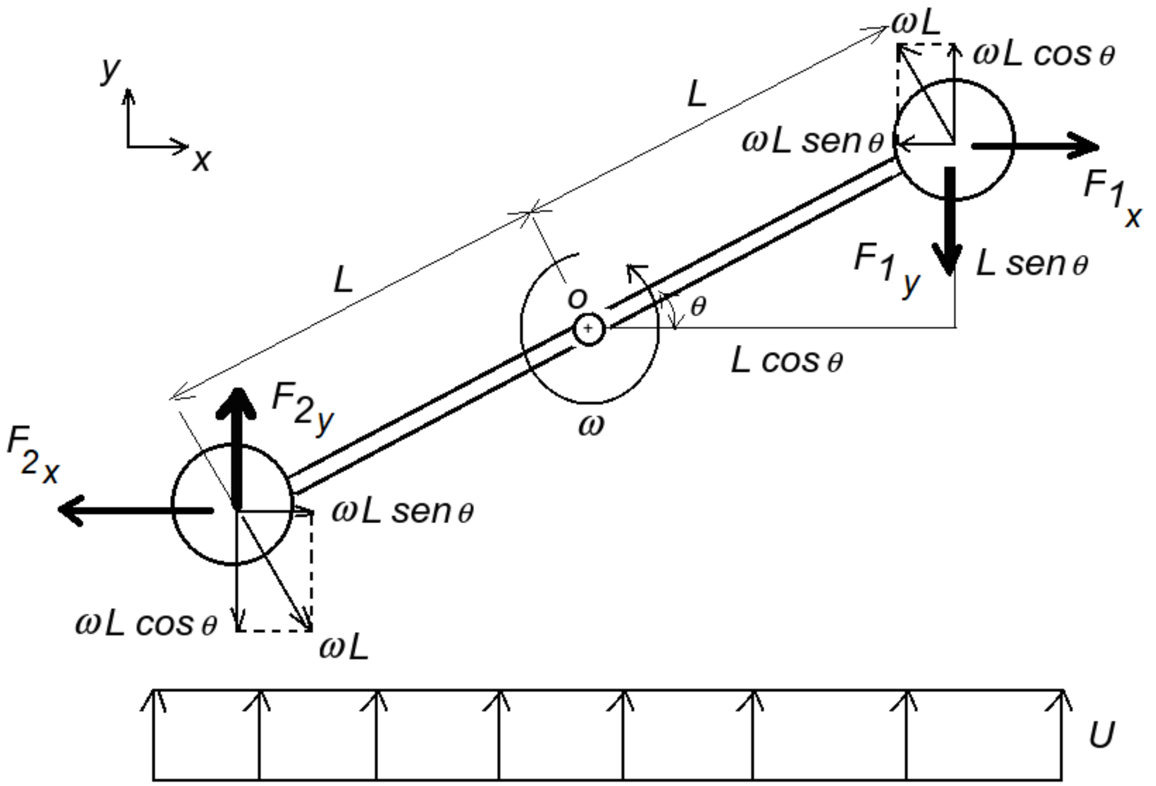
$$\vec{F} = \frac{1}{2}\rho\sqrt{U^2 + V^2} A C_D \left(U\vec{e}_x + V\vec{e}_y\right)$$

Assim, temos as componentes x e y da força de arrasto submetida a uma corrente $\vec{U}_\infty = U\,\vec{e}_x + V\,\vec{e}_y$:

$$F_x = \frac{1}{2}\rho\sqrt{U^2+V^2}\,A\,C_D\,U$$

$$F_y = \frac{1}{2}\rho\sqrt{U^2+V^2}\,A\,C_D\,V$$

Agora, numa nova abordagem do problema, vamos decompor as velocidades de rotação das esferas nas direções *x* e *y*:



Nesta nova abordagem, temos forças:

$$F_{1x} = \frac{1}{2}\rho\sqrt{(\omega L\cos\theta - U)^2 + (\omega L \operatorname{sen}\theta)^2}\,\frac{\pi D^2}{4}C_D\,\omega L\operatorname{sen}\theta$$

$$F_{1y} = \frac{1}{2}\rho\sqrt{(\omega L\cos\theta - U)^2 + (\omega L \operatorname{sen}\theta)^2}\,\frac{\pi D^2}{4}C_D\,(\omega L\cos\theta - U)$$

$$F_{2x} = \frac{1}{2}\rho\sqrt{(\omega L\cos\theta + U)^2 + (\omega L \operatorname{sen}\theta)^2}\,\frac{\pi D^2}{4}C_D\,\omega L\operatorname{sen}\theta$$

$$F_{2y} = \frac{1}{2}\rho\sqrt{(\omega L\cos\theta + U)^2 + (\omega L \operatorname{sen}\theta)^2}\,\frac{\pi D^2}{4}C_D\,(\omega L\cos\theta + U)$$

O Momento das forças de arrasto (no sentido horário, portanto com sinal negativo) é:

$$M_{arrasto} = -\left[(F_{1x}+F_{2x})\,L\,\operatorname{sen}\theta + (F_{1y}+F_{2y})L\,\cos\theta\right]$$

E o momento no eixo será:

$$M = \left[(F_{1x}+F_{2x})\,L\,\operatorname{sen}\theta + (F_{1y}+F_{2y})L\,\cos\theta\right]$$