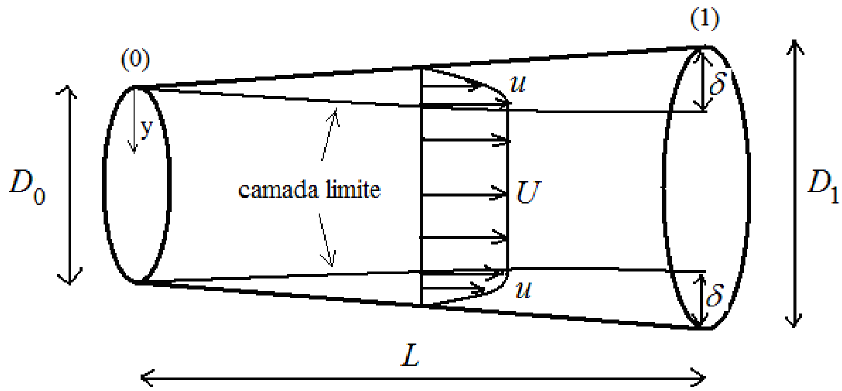
Mecânica dos Fluidos II (PME 2330)
Gabarito Segunda Prova - 2013

1. (**5 pontos**) O escoamento numa camada limite laminar pode ser representado pelo perfil de velocidades:

$$\frac{u}{U}=f(\eta)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\eta\right),\ \text{onde}\ \eta=\frac{y}{\delta}$$

a) Para uma placa plana paralela a corrente (sem gradiente de pressão) obtenha, usando a equação integral de Von Kármán, os resultados para a espessura da camada limite $\frac{\delta}{x}$ e para o coeficiente de atrito local $c_f=\frac{2\tau_p}{\rho U^2}$. (2 pontos)

b) A seção de testes de um túnel de vento de baixa velocidade tem uma seção transversal que aumenta ligeiramente de diâmetro para compensar o crescimento da camada limite, de modo a garantir que a velocidade U na linha de centro fique constante ao longo do comprimento. Temos $U=1m/s$, $L=5m$, viscosidade cinemática do ar é $\nu=1{,}5\times10^{-5}m^2/s$ e diâmetro $D_1=0{,}6m$. Supondo que a camada limite ao longo da seção de testes é laminar e dada pelo perfil senoidal apresentado e que sua espessura é nula na entrada em (0), calcule o diâmetro D_0. Faça a hipótese que a área da seção ocupada pela camada limite é muito fina e que pode ser calculada como uma coroa de círculo, de modo que a vazão numa seção qualquer de diâmetro D resulta $Q=U\frac{\pi D^2}{4}-U\pi D\delta+\pi D\int_0^\delta u\,dy$. (3 pontos)



Dados e ajudas para o cálculo: $\frac{c_f}{2}=\frac{d\theta}{dx}+\left(2+\frac{\delta^*}{\theta}\right)\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}$; $\delta^*=\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$; $\theta=\int_0^\delta\left[\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)\right]dy$;

$\int[1-\text{sen}(ax)]dx=x+\frac{1}{a}\cos(ax)$; $\int\text{sen}(ax)[1-\text{sen}(ax)]dx=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{a}\cos(ax)+\frac{1}{4a}\text{sen}(2ax)$

Solução:

a) Para gradiente de pressão constante, a equação integral fica:

$$\frac{c_f}{2}=\frac{d\theta}{dx}\quad\text{(I)}$$

onde:

$$\theta=\int_0^\delta\text{sen}\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)\left[1-\text{sen}\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)\right]dy=\delta\int_0^1\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)\left[1-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)\right]d\eta$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\eta-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)+\frac{2}{4\pi}\text{sen}\left(2\frac{\pi}{2}\eta\right)\right]\Bigg|_0^1\delta=\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\right)\delta=0{,}13662\,\delta\quad\text{(II)}$$

A tensão na parede é dada por:

$$\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{\mu U}{\delta} f'(0) = \frac{\mu U}{\delta}\frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \frac{\mu U}{\delta}$$

Com esse resultado, o coeficiente de atrito local fica:

$$c_f = \frac{2\tau_p}{\rho U^2} = \nu \frac{\pi}{U\,\delta} \quad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I):

$$\frac{\nu\,\pi}{2U\,\delta} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\right)\frac{d\delta}{dx}$$

Integrando com a condição $\delta(x=0)=0$ resulta:

$$\frac{1}{2}\delta^2 = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\right)^{-1}\frac{\nu\,x}{U} \Rightarrow \delta = \left[\pi\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\right)^{-1}\right]^{1/2}\left(\frac{\nu\,x}{U}\right)^{1/2} = 4{,}7953\left(\frac{\nu\,x}{U}\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{4{,}7953}{Re_x^{1/2}} \quad \text{(IV)}$$

onde $Re_x = \dfrac{U\,x}{\nu}$. Substituindo (IV) em (III):

$$c_f = \nu\frac{\pi}{U}\left[\pi\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\right)^{-1}\right]^{-1/2}\left(\frac{\nu\,x}{U}\right)^{-1/2} = \frac{\left[\pi\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\right)\right]^{1/2}}{Re_x^{1/2}} = \frac{0{,}65514}{Re_x^{1/2}}$$

b) Temos, pela continuidade, se δ_L é a espessura da camada limite em (1):

$$U\frac{\pi\,D_0^2}{4} = U\frac{\pi\,D_1^2}{4} - U\,\pi\,D_1\,\delta_L + \pi\,D_1\int_0^{\delta_L} u\,dy$$

Reorganizando os termos:

$$U\frac{\pi\,D_0^2}{4} = U\frac{\pi\,D_1^2}{4} - U\,\pi\,D_1\int_0^{\delta_L}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

Logo, se δ_L^* é a espessura de deslocamento em (1):

$$\frac{D_0^2}{4} = \frac{D_1^2}{4} - D_1\,\delta_L^* \quad \text{ou} \quad D_0 = \left(D_1^2 - 4\,D_1\,\delta_L^*\right)^{1/2} \quad \text{(V)}$$

A espessura de deslocamento é dada por:

$$\delta^* = \int_0^{\delta}\left[1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\,y}{2\,\delta}\right)\right]dy = \delta\int_0^1\left[1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)\right]d\eta = \left[\eta + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)\right]\bigg|_0^1 \delta = \left(1-\frac{2}{\pi}\right)\delta = 0{,}36338\,\delta \quad \text{(VI)}$$

De (IV), a espessura de camada limite em (1) é:

$$\delta_L = 4{,}7953\times\left(\frac{1{,}5\times10^{-5}\times 5}{1}\right)^{1/2} m = 0{,}041529\,m$$

Logo, de (V), obtemos o diâmetro D_0:

$$D_0 = \left(0{,}6^2 - 4\times0{,}6\times0{,}36338\times0{,}041529\right)^{1/2} m = 0{,}56902\,m$$

2. (5 pontos) Uma esfera flutuante de massa específica média ρ_e e diâmetro d que cai em um fluido de massa específica ρ ($\rho > \rho_e$) e viscosidade μ com uma velocidade de entrada V_0, penetrará até uma profundidade máxima h e depois voltará para acima, como mostra a figura. Queremos deduzir uma expressão para a velocidade de queda em função do tempo $V(t)$, a profundidade máxima h e o tempo transcorrido até a esfera atingir a profundidade máxima t_h. Para simplificar o problema, podemos desprezar os efeitos da aceleração da esfera no coeficiente de arrasto e, assim, utilizar dados correspondentes a velocidade constante da corrente livre. Aliás, podemos desprezar a variação do coeficiente de arrasto para baixos números de Reynolds e considerar um coeficiente de arrasto C_{D0} constante na faixa de velocidades de queda. Com estas aproximações:

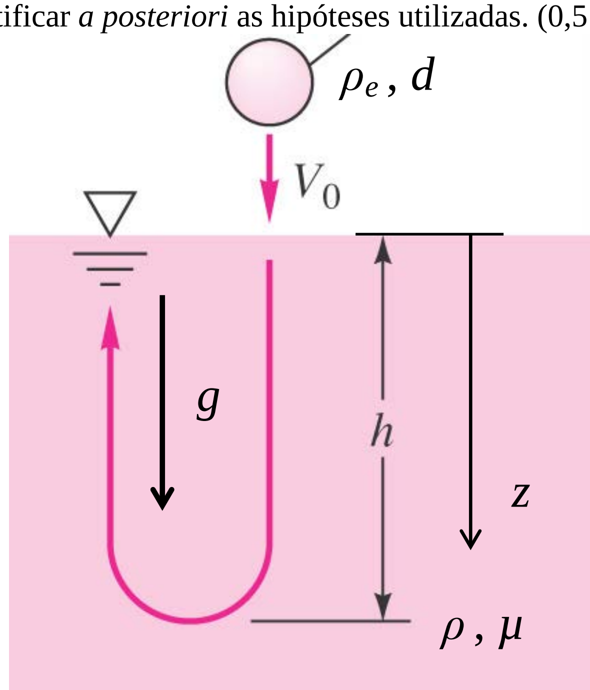
a) Aplicar um balanço de momento e demonstrar que a equação diferencial para a velocidade de queda resulta $\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1\right) g - \frac{3}{4}\frac{C_{D0}}{d}\frac{\rho}{\rho_e} V^2$. (1 ponto)

b) Adimensionalizar a equação do item a) definindo a velocidade e tempo adimensionais respectivamente como $V^* = \frac{V}{V_0}$ e $t^* = \frac{t}{T}$, onde $T = \frac{4}{3}\frac{\rho_e}{\rho}\frac{d}{C_{d0} V_0}$ e demonstrar que a equação nas variáveis adimensionais resulta $\frac{dV^*}{dt^*} = -\left(\Lambda^2 + V^{*2}\right)$, onde $\Lambda = \frac{1}{V_0}\left[\frac{4}{3}\frac{g\,d}{C_{D0}}\left(1 - \frac{\rho_e}{\rho}\right)\right]^{1/2}$. (0,5 pontos)

c) Integrar a equação anterior com a correspondente condição inicial e demonstrar que $V^* = \Lambda \operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) - \Lambda t^*\right]$; com este resultado, demonstrar que o tempo transcorrido até a esfera atingir a profundidade máxima resulta $t_h^* = \frac{t_h}{T} = \frac{1}{\Lambda}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$. (1,5 pontos)

d) Adimensionalizando a posição como $z^* = \frac{z}{V_0 T}$ e sabendo que $V = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dV}\frac{dV}{dt}$, integrar a relação anterior com a correspondente condição inicial e demonstrar que $z^* = \ln\left\{\left[\frac{\Lambda^2 + 1}{\Lambda^2 + V^{*2}}\right]^{1/2}\right\}$; com a relação anterior, demonstrar que a profundidade máxima resulta $h^* = \ln\left\{\left[\frac{\Lambda^2 + 1}{\Lambda^2}\right]^{1/2}\right\}$. (1,5 pontos)

e) Aplicar o resultados dos itens anteriores para uma esfera de $\rho_e = 500\,kg/m^3$ de diâmetro $d = 5\,cm$ que cai em agua a 20^o ($\rho = 1000\,kg/m^3$, $\mu = 0{,}001\,kg/m/s$) com uma velocidade $V_0 = 10\,m/s$ para calcular t_h e h; assumir $g = 9{,}8\,m/s^2$. Para determinar un coeficiente de arrasto representativo observar que, para uma esfera em regime laminar, $C_D \cong 0{,}47$ na faixa $10^3 \le Re_d \le 2\times10^5$. Utilizar este valor do coeficiente de arrasto e justificar *a posteriori* as hipóteses utilizadas. (0,5 pontos)



Dados e ajudas para o cálculo: $C_D = \dfrac{2D}{\rho U^2 A_f}$; $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$; $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C$

Solução:

a) Um balanço de momento linear, considerando forças de peso, empuxo e arrasto, fornece:

$$(\rho_e - \rho) g\, \upsilon_e - C_{D0}\frac{1}{2}\rho V^2 A_e = \rho_e\, \upsilon_e \frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = -\left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1\right) g - \frac{1}{2} C_{D0} \frac{\rho}{\rho_e}\frac{A_e}{\upsilon_e} V^2$$

$$\frac{A_e}{\upsilon_e} = \frac{\frac{1}{4}\pi d^2}{\frac{1}{6}\pi d^3} = \frac{3}{2d} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = -\left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1\right) g - \frac{3}{4}\frac{C_{D0}}{d}\frac{\rho}{\rho_e} V^2$$

b) Adimensionalizando $V^* = \dfrac{V}{V_0}$ e $t^* = \dfrac{t}{T}$, onde $T = \dfrac{4}{3}\dfrac{\rho_e}{\rho}\dfrac{d}{C_{d0} V_0}$, resulta:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_0}{T}\frac{dV^*}{dt^*} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV^*}{dt^*} = -\frac{T}{V_0}\left(\frac{\rho}{\rho_e} - 1\right) g - \frac{3}{4}\frac{C_{D0}}{d}\frac{\rho}{\rho_e}\frac{T}{V_0} V^2$$

$$\frac{dV^*}{dt^*} = -\frac{4}{3}\frac{g\,d}{C_{d0} V_0^2}\left(1 - \frac{\rho_e}{\rho}\right) - \frac{3}{4}\frac{C_{D0}}{d}\frac{\rho}{\rho_e} T V_0 V^{*2}$$

Substituindo, resulta:

$$\frac{dV^*}{dt^*} = -\left(\Lambda^2 + V^{*2}\right)$$

c) Integrando a relação anterior, com a condição inicial $V^*\left(t^* = 0\right) = 1$, resulta:

$$-\int_1^{V^*} \frac{dV^*}{\Lambda^2 + V^{*2}} = -\frac{1}{\Lambda}\operatorname{arctg}\left(\frac{V^*}{\Lambda}\right)\Bigg|_1^{V^*} = \frac{1}{\Lambda}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{V^*}{\Lambda}\right)\right] = t^*$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{V^*}{\Lambda}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) - \Lambda t^* \quad \Rightarrow \quad V^* = \Lambda \operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) - \Lambda t^*\right]$$

Com a condição $V^*\left(t^* = t_h^*\right) = 0$, resulta $t_h^* = \dfrac{1}{\Lambda}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\Lambda}\right)$.

d) Adimensionalizando a posição como $z^* = \dfrac{z}{V_0 T}$, resulta:

$$V^* = \frac{dz^*}{dt^*} = \frac{dz^*}{dV^*}\frac{dV^*}{dt^*} = -\left(\Lambda^2 + V^{*2}\right)\frac{dz^*}{dV^*}$$

Integrando com a condição de contorno $V^*\left(z^* = 0\right) = 1$, resulta:

$$-\int_1^{V^*} \frac{V^*}{\Lambda^2 + V^{*2}} dV^* = -\frac{1}{2}\ln\left[\Lambda^2 + V^{*2}\right]_1^{V^*} = z^* \quad \Rightarrow \quad z^* = \ln\left\{\left[\frac{\Lambda^2 + 1}{\Lambda^2 + V^{*2}}\right]^{1/2}\right\}$$

Com a condição $V^*\left(z^* = h^*\right) = 0$, resulta $h^* = \ln\left\{\left[\dfrac{\Lambda^2 + 1}{\Lambda^2}\right]^{1/2}\right\}$.

e) Com os dados do exercício, resultam: $T = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{500}{1000} \times \dfrac{0{,}05}{0{,}47 \times 10}\, s = 7{,}0922 \times 10^{-3}\, s$,

$$\Lambda = \frac{1}{10} \times \left[\frac{4}{3} \times \frac{9{,}8 \times 0{,}05}{0{,}47} \times \left(1 - \frac{500}{1000}\right)\right]^{1/2} = 8{,}3369 \times 10^{-2} ,$$

$$t_h^* = \frac{1}{8{,}3369\times10^{-2}}\times \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{8{,}3369\times10^{-2}}\right) = 17{,}844 \ ,$$

$$h^* = \ln\left\{\left[\frac{\left(8{,}3369\times10^{-2}\right)^2+1}{\left(8{,}3369\times10^{-2}\right)^2}\right]^{1/2}\right\} = 2{,}4879 \ ,$$

$$t_h = 17{,}844\times7{,}0922\times10^{-3}\ s = 0{,}12655\,s \ ,$$

$$h = 10\times7{,}0922\times10^{-3}\times2{,}4879\,m = 0{,}17645\,m \ .$$

Calculamos o número de Reynolds $Re_d = \dfrac{1000\times10\times0{,}05}{0{,}001} = 5\times10^5$; vemos que é levemente maior que o valor superior da faixa, mas para quase toda a faixa de velocidades resultará $C_D \cong 0{,}47$.