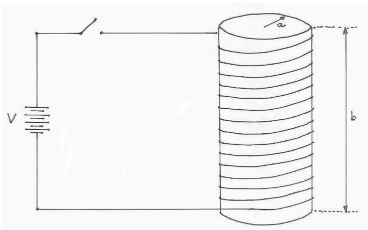
Complementos de Eletromagnetismo
Indutância e Energia Magnética

Nome:

Observe a figura abaixo, na qual um solenoide de raio a e comprimento $b >> a$ está ligado a uma bateria de diferença de potencial V, que será utilizado em todas as questões a seguir:



1. Calcule o valor da resistência elétrica do fio em função dos parâmetros a, b, n (número de espiras por unidade de comprimento), S (área de seção transversal do fio) e ρ (resistividade do fio). Despreze as partes do fio que ligam a bateria ao solenoide.

$$\boldsymbol{l = nb2\pi a}$$
$$\boldsymbol{R = \frac{\rho l}{S} = \frac{\rho nb2\pi a}{S}}$$

2. Ao ligar a chave, surge um campo elétrico no interior do fio devido à bateria. Qual é o valor deste campo elétrico? Este campo é conservativo?

$$\boldsymbol{V = Ed}$$
$$\boldsymbol{E_V = \frac{V}{l}}$$

Sim, o campo é conservativo, pois ele é criado por cargas elétricas.

3. O campo elétrico estabelece uma corrente elétrica no fio, que, num primeiro momento, aumenta com o tempo. Esta corrente produz no solenoide um campo magnético variável no tempo que, pela Lei de Faraday, induz um campo elétrico. Qual é a direção e o sentido do campo elétrico induzido? Este campo é conservativo? Qual é o efeito deste campo elétrico induzido na corrente elétrica?
O campo possui mesma direção e sentido contrário ao da corrente. Não é um campo conservativo, pois não existe potencial elétrico associado ao campo nesse caso. O campo provoca uma oposição à passagem de corrente.

4. O campo elétrico induzido no solenoide tem intensidade igual a:

$$E_I = \frac{n\mu_0 a}{2}\frac{dI}{dt}$$

Calcule o campo elétrico resultante no fio e apresente uma equação diferencial para o cálculo da corrente que se estabelece no circuito. (Sugestão: use a lei de Ohm microscópica para o cálculo da corrente: $\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$)

Como $\vec{E_V}$ e $\vec{E_I}$ têm sentidos opostos, o campo elétrico resultante tem intensidade dada por:

$$\boldsymbol{E = E_V - E_I}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{V}{l} - \frac{n\mu_0 a}{2}\frac{dI}{dt}}$$

$$\boldsymbol{I = jS}$$

$$\boldsymbol{I = \frac{S}{\rho}\left[\frac{V}{l} - \frac{n\mu_0 a}{2}\frac{dI}{dt}\right]}$$

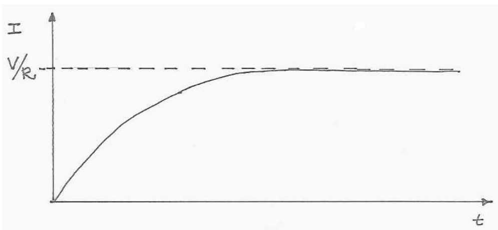
5. A corrente que se estabelece é dada pela função:

$$I(t) = \frac{V}{R}[1 - e^{-\beta t}]$$

onde

$$\beta = \frac{2R}{\mu_0 nal}$$

Esboce e interprete o gráfico de $I(t)$.



A corrente elétrica é nula no instante em que a chave é ligada ($t = 0$) e tende ao valor de $\frac{V}{R}$ quando t tende ao infinito

6. Qual é a dimensão da unidade de β? Qual é o sentido físico deste parâmetro?

Como $-\beta t$ é adimensional, podemos verificar que a dimensão de β é s^{-1}. Esse parâmetro indica quanto tempo o valor da corrente demora a atingir o valor máximo $\frac{V}{R}$ (quanto maior o valor de β, mais rapidamente a corrente se aproxima deste valor).

7. No solenoide, existe uma força eletromotriz (fem) induzida dada por:

$$\epsilon = L\frac{dI}{dt}$$

onde L é uma grandeza física conhecida como *indutância*. Mostre que, para um solenoide, a indutância pode ser calculada como:

$$L = \frac{n\mu_0 al}{2}$$

$$\boldsymbol{\epsilon = \oint \vec{E}_I \cdot d\vec{l} = E_I l = \frac{n\mu_0 al}{2}\frac{dI}{dt}}$$

$$\boldsymbol{\epsilon = L\frac{dI}{dt} \Rightarrow L = \frac{n\mu_0 al}{2}}$$

8. Neste circuito, a energia fornecida pela bateria é dada por:

$$E_V = \int_0^T P_V(t)dt = \int_0^T VI(t)dt = \frac{V^2}{R}\left[T + \frac{e^{-\beta T}}{\beta} - \frac{1}{\beta}\right]$$

Já a energia dissipada pelo efeito Joule é dada por:

$$E_R = \int_0^T P_R(t)dt = \int_0^T RI^2(t)dt = \frac{V^2}{R}\left[T + \frac{2}{\beta}e^{-\beta T} - \frac{e^{-2\beta T}}{2\beta} - \frac{3}{2\beta}\right]$$

Compare esses valores. Calcule a diferença entre eles e interprete o resultado. Onde está armazenada a energia não dissipada?
(Obs.: Para o cálculo, utilize $\beta = \frac{R}{L}$)

$$\boldsymbol{E_V - E_R = \frac{V^2}{R}\left[T + \frac{e^{-\beta T}}{\beta} - \frac{1}{\beta} - T - \frac{2}{\beta}e^{-\beta T} + \frac{e^{-2\beta T}}{2\beta} + \frac{3}{2\beta}\right]}$$

$$\boldsymbol{E_V - E_R = \frac{V^2}{R}\left[-\frac{e^{-\beta T}}{\beta} + \frac{e^{-2\beta T}}{2\beta} + \frac{1}{2\beta}\right]}$$

$$\boldsymbol{E_V - E_R = \frac{V^2}{R}\frac{1}{2\beta}[1 - 2e^{-\beta T} + e^{-2\beta T}] = \frac{V^2}{R}\frac{1}{2\beta}[1 - e^{-\beta T}]^2}$$

Substituindo $\boldsymbol{\beta = \frac{R}{L}}$, obtemos:

$$\boldsymbol{E_V - E_R = \frac{V^2}{R}\frac{L}{2R} = \frac{R^2 I^2}{V^2} = \frac{1}{2}LI^2}$$

Esta diferença de energia indica que nem toda energia fornecida pela bateria é dissipada por efeito Joule. Parte da energia é armazenada no campo magnético.

9. A partir do resultado do item anterior, determine a densidade volumétrica de energia magnética no solenoide $\frac{d\varepsilon_B}{dV}$. O resultado encontrado é válido apenas para o exemplo estudado?
(Obs.: Para o cálculo, use $l = nb2\pi a$ e $B = n\mu_0 I$)

$$\boldsymbol{E_V - E_R = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{n\mu_0 al}{2}\right]\left[\frac{B}{n\mu_0}\right]^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{n\mu_0 anb2\pi a}{2}\right]\left[\frac{B}{n\mu_0}\right]^2}$$

$$\boldsymbol{E_V - E_R = \frac{\pi a^2 bB^2}{2\mu_0}}$$

Como $\boldsymbol{\pi a^2 b}$ corresponde ao volume do solenoide, podemos escrever:

$$\boldsymbol{E_V - E_R = \frac{VB^2}{2\mu_0}}$$

Portanto a densidade magnética pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\frac{d\varepsilon_B}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Pode-se observar que este cálculo vale não apenas para o solenoide, pois o resultado depende apenas de $\boldsymbol{\vec{B}}$ e $\boldsymbol{\mu_0}$, que são parâmetros externos ao dispositivo.