6^a) Lista de Exercícios de Álgebra 1, Licenciatura em Matemática, para entregar dia 04-06-19.

1. Seja $\phi : N^* \to N^*$ a função de Euler. (Lembre que esta função associa a cada inteiro positivo n o número de inteiros positivos primos com n e menores que n)

   (a) Seja p un número primo , $r > 0$ inteiro mostre que $\phi(p^r) = p^{r-1}(p-1)$.

   (b) Mostre que se m e n são inteiros maiores que zero que são primos entre si, então $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

   (c) Prove que se $m = p_1^{r_1}.\dots.p_t^{r_t}$ é a decomposição de m em fatores primos então $\phi(m) = m(1-\frac{1}{p_1}).\dots.(1-\frac{1}{p_r})$

2. Determinar todos os inteiros tais que $\frac{n+17}{n-4}$ seja o quadrado de um número racional.

3. Seja a um número inteiro que não é um quadrado perfeito. Mostre que a equação $x^2 = a$ não tem solução em $\mathbf{Q}$

4. Seja $f : A \to B$ uma função de um conjunto A num conjunto B. Mostre que a relação definida em A por meio de aRb se e somente se $f(a) = f(b)$ é uma relação de equivalência.

5. Seja $\cong$ uma relação de equivalência num conjunto não vazio, A. Prove que existe um conjunto B e uma função $f : A \to B$ tal que $a \cong b$ se e só se $f(a) = f(b)$.

6. Exiba um exemplo de uma relação R em um conjunto A que satisfaça as seguintes condições

   (a) R é reflexiva e simétrica mas não transitiva.

   (b) R é simétrica e transitiva mas não reflexiva.

   (c) R é transitiva, reflexiva e não simétrica.

7. Pare que valores de $n \in \mathbf{Z}$ a representação do racional $\frac{n^2+2n+3}{n^2+3n+5}$ é irredutivel?

8. Em cada um dos ítens abaixo, prove a afirmação se for verdadeira e exiba um contra exemplo se for falsa.

   (a) Sejam a, b, c três inteiros. Se $a \mid bc$ e $a \nmid b$ então $a \mid b$.

   (b) O resto da divisão de um quadrado perfeito por 4 deve ser 0 ou 1.

   (c) Um inteiro da forma $6k + 5$ é também da forma $3k + 2$ e vale também a recíproca.

   (d) O produto de 3 inteiros consecutivos maiores que 1 é sempre um múltiplo de 3.

   (e) Sejam a e b inteiros não ambos nulos. Então, $mdc(a, b) = mmc(a, b)$ se e somente se $|a| = |b|$

(f) Dois números inteiros ímpares a e b são primos entre si se e somente se a equação diofantina $ax + by = 2$ tem solução.

(g) O sistema que equações diofantinas:
$x \equiv a(mod\ c_1)$
$x \equiv b(mod\ c_2)$
tem sempre solução

(h) Sejam a e b inteiros com $a > 1$ a equação diofantina $a^n \equiv 1(mod\ b)$ tem solução.

(i) Sejam a_2, a_1, a_0 inteiros então $a_2(10)^2 + a_1(10) + a_0$ é necessariamente congruente módulo 11 a $a_2 - a_1 + a_0$.

(j) Se num conjunto qualquer existe uma relação que é transitiva e simétrica então ela também é reflexiva.

9. Sejam a, b inteiros primos entre si prove ou dê contra exemplo para as seguintes afirmações.

   (a) $a - b$ e ab são primos entre si.

   (b) Se a é ímpar e b par então $a + b$ e $a - b$ são primos entre si.

10. Determine o conjunto solução de cada uma das equações diofantinas abaixo.

    (a) $31x + 7y = 2$

    (b) $91x - 221y = 1053$

11. Resolva as seguintes questões.

    (a) Sejam a, b, c inteiros com $a^2 + b^2 \neq 0$ prove que $\text{mdc}(a, b) \mid c$ se e somente se existem r e s inteiros tais que $c = ra + sb$.

    (b) Prove que existem infinitos primos da forma $4n + 3$.

    (c) Prove que existem infinitos primos da forma $3n + 2$.

12. Determinar o conjunto solução para o seguinte sistema equações diofantinas.
    $31x \equiv 4(mod\ 7)$
    $91x \equiv 2107(mod\ 21)$

13. Chamamos ideal de $\mathbb{Z}$ a um subconjunto I de $\mathbb{Z}$ tal que:

    (a) $0 \in I$

    (b) I é fechado para a soma.

    (c) Se $x \in I$ e $y \in \mathbb{Z}$ então $xy \in I$

    Mostre que para todo ideal I de $\mathbb{Z}$ existe um número a em I tal que $I = \{ta : t \in \mathbb{Z}\}$.
    Sugestão:Se $I \neq \{0\}$ considere o menor elemento positivo de I.