Eletromagnetismo I

Prof. Raul Abramo - 2º Semestre 2015

Preparo: Gilson Ronchi

Aula 17

Nesta aula veremos:

- Dipolos magnéticos
- Quadrupolos magnéticos
- Exemplos e exercícios

Potencial vetor

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\vec{l}' \frac{I}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad \rightarrow 0 \text{ se } \vec{J} = 0$$

Mas

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad = \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\hat{r}\cdot\hat{r}')$$

então, para $r > r'$,

$$A(\vec{r}) \quad = \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\int d\vec{l}' \vec{r}'^l P_l(\hat{r}\cdot\hat{r}')$$

- $l = 0$:

$$\int d\vec{l}' \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

- $l = 1$

$$\int d\vec{l}' \cdot r' \cdot (\hat{r}\cdot\hat{r}') = \int d\vec{l}' (\hat{r}\cdot\vec{r}')$$

Vamos considerar

$$\hat{r}\int d\vec{l}' \cdot (\hat{r}\cdot\vec{r}')$$

$$\begin{aligned}
\int d\vec{l}' \cdot r' \cdot \left(\hat{r}\cdot\hat{r}'\right) &= \int d\vec{S}' \cdot \nabla' \times \left[\hat{r}\left(\hat{r}\cdot\vec{r}'\right)\right] \\
&= \int d\vec{S}' \cdot \left[-\hat{r} \times \nabla'\left(\hat{r}\cdot\vec{r}'\right)\right] \\
&= \hat{r}\int d\vec{S}' \times \nabla'\left(\hat{r}\cdot\vec{r}'\right) \\
&= \hat{r}\int d\vec{S}' \times \hat{r}
\end{aligned}$$

Momento de dipolo de um laço

Vamos então definir o momento de dipolo magnético de um laço

$$\vec{m} = I \times \vec{S} \qquad \vec{S} = S\hat{n}$$

Então

$$A_{dip}\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

De um modo mais geral

$$\begin{aligned}
\vec{m}\times\vec{r} &= \int dV' r'\left(\hat{r}\cdot\hat{r}'\right)\vec{J}\left(\vec{r}'\right) \\
&= \int dV'\left(\hat{r}\cdot\vec{r}'\right)\vec{J}\left(\vec{r}'\right)
\end{aligned}$$

Mas a expressão acima assume que o lado direito é um vetor perpendicular a $\hat{r}$!
De fato

$$\begin{aligned}
\hat{r}\cdot\left(\vec{m}\times\hat{r}'\right) &= 3 \\
&= \int dV'\left(\hat{r}\cdot\vec{r}'\right)\left[\hat{r}\cdot\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right]
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\hat{r}\cdot\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\left(\hat{r}\cdot\vec{r}'\right) \quad &= \quad \frac{1}{2}\nabla'\cdot\left\{\left[\hat{r}\cdot\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right]\hat{r}\left(\vec{r}'\right)^2\right\} \\
\text{onde} \quad & \nabla'\cdot\vec{J}\left(\vec{r}'\right) = 0 \\
& \nabla'\left(\vec{r}'\right)^2 = 2\vec{r}'
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\hat{r}\cdot\int dV'\left(\hat{r}\cdot\vec{r}'\right)\vec{J}\left(\vec{r}'\right) &= \frac{1}{2}\int dV'\nabla'\cdot\left\{\left[\hat{r}\cdot\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right]\hat{r}\left(\vec{r}'\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\oint d\vec{S}'\cdot\hat{r}r'\left[\hat{r}\cdot\vec{J}\left(\vec{r}'\right)\right]
\end{aligned}$$

Campo magnético de dipolo

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right)$$

$$\boxed{\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\left(\vec{m} \cdot \hat{r}\right)\hat{r} - \vec{m}}{r^3}}$$

Quadrupolo magnético

É um caso mais difícil

- $l = 2$

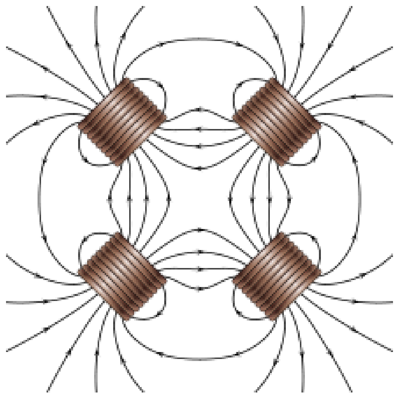
$$\vec{A}_2\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int dV' \vec{J}\left(\vec{r}'\right)\left(r'^2\right) \underbrace{P_2\left(\hat{r} \cdot \hat{r}'\right)}_{=\frac{1}{2}\left[3\left(\hat{r}\cdot\hat{r}'\right)^2 - 1\right]}$$

Assim como no caso do quadrupolo elétrico:

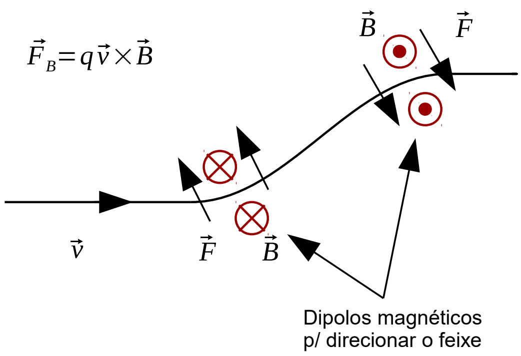
$$\vec{A}_2\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \times \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{3} \hat{r}_i \hat{r}_j \cdot \vec{Q}_{ij}$$

$$\vec{Q}_{ij} = \int dV' \left(3 r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}\right) \vec{J}\left(\vec{r}'\right)$$

Exemplo de um quadrupolo magnético físico:

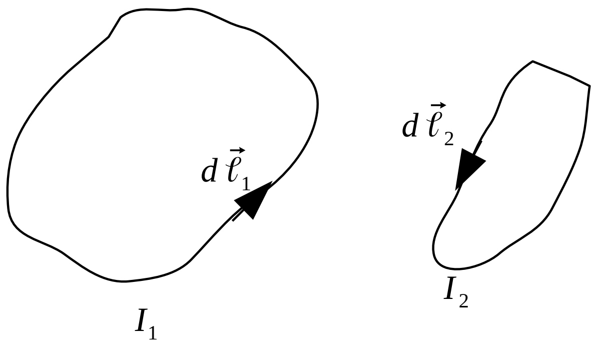


Aplicação: Feixes de partículas carregadas



Mas os feixes são "grossos" e tendem a desfocar à medida que propagam dentro dos acelerado-res. E aí que entram os quadrupolos.

A força magnética



$$d\vec{F} = dq\vec{v}\times\vec{B} = Id\vec{\ell}\times\vec{B} \qquad \begin{cases} d\vec{F}_{12} & = I_1 d\vec{\ell}_1\times\vec{B}_2 \\ d\vec{F}_{21} & = I_2 d\vec{\ell}_2\times\vec{B}_1 \end{cases}$$

Por outro lado,

$$d\vec{B}\left(\vec{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell}'\times\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad \begin{cases} d\vec{B}_1 & = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 d\vec{\ell}_1\times\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} \\ d\vec{B}_2 & = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 d\vec{\ell}_2\times\frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} \end{cases}$$

Portanto, a força total do laço 1 sobre o 2 será

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint d\vec{\ell}_2\times\frac{\left[d\vec{\ell}_1\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\right]}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}$$

Mas

$$\frac{d\vec{\ell}_2\times\left[d\vec{\ell}_1\times\vec{r}_{21}\right]}{r_{21}^3} = -\left(d\vec{\ell}_1\cdot d\vec{\ell}_2\right)\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} + d\vec{\ell}_1\left(\frac{d\vec{\ell}_2\cdot\vec{r}_{21}}{r_{21}^3}\right)$$

O último termo e anula na integral

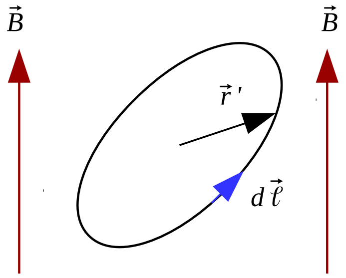
$$\oint d\vec{\ell}\cdot\nabla\frac{1}{r} = \int d\vec{S}\left(\nabla\times\nabla\frac{1}{r}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{F}_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint d\vec{\ell}_1\cdot d\vec{\ell}_2 \frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} \\ &= -\vec{F}_{12} \end{aligned}$$

Exemplo: Fios infinitos

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}$$

Força de um campo constante em uma laço



$$
\begin{aligned}
d\vec{F} &= I d\vec{\ell} \times \vec{B} \\
\therefore & \oint d\vec{F} = 0 \qquad \text{(demonstre isso)}
\end{aligned}
$$

Torque:

$$
\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \int \vec{r}' \times d\vec{F} = I \oint \vec{r}' \times \left(d\vec{\ell}' \times \vec{B} \right) \\
&= I \oint d\vec{\ell}' \left(\vec{r}' \cdot \vec{B} \right) - I\vec{B} \oint \cancelto{0}{d\vec{\ell} \cdot \vec{r}'} \\
&= I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}
\end{aligned}
$$

De fato

$$\boxed{U_B = -\vec{m} \cdot \vec{B}}$$

Perceba que o campo magnético $\vec{B}$ não realiza trabalho

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow W = P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$$