PTC-5822 - Introdução a Processos Estocásticos - 2019
Segunda Prova - 22/05/2019
GABARITO

1. **(1,5)** Determine a média e a autocorrelação do processo de tempo discreto $Y(n) = [X(n) + X(n-1)]/2$, onde $X(n)$ é o processo de Bernoulli.

   Se $X(n)$ é um processo de Bernoulli, então $E[X(n)] = p$ e

$$R_X(n_1, n_2) = \begin{cases} p, & n_1 = n_2 \\ p^2, & n_1 \neq n_2. \end{cases}$$

   Portanto:

$$E[Y(n)] = \frac{1}{2}E[X(n) + X(n-1)] = \frac{p+p}{2} = p.$$

$$R_Y(n_1, n_2) = E[Y(n_1)Y(n_2)] = E\left[\left(\frac{X(n_1) + X(n_1) - 1}{2}\right)\left(\frac{X(n_1) + X(n_1) - 1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}E[X(n_1)X(n_2) + X(n_1)X(n_2 - 1) + X(n_1 - 1)X(n_2) + X(n_1 - 1)X(n_2 - 1)]$$

$$= \begin{cases} (p^2 + p)/2, & n_1 = n_2; \\ (3p^2 + p)/4, & |n_1 - n_2| = 1; \\ p^2 & |n_1 - n_2| > 1. \end{cases}$$

2. Seja $X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, onde A e B são variáveis aleatórias gaussianas independentes e identicamente distribuídas com médias zero e variâncias σ^2.

   (a) **(1,5)** Determine a média e a autocovariância de $X(t)$;

$$E[X(t)] = E(A)\cos(\omega t) + E(B)\sin(\omega t) = 0.$$

   Como $E(A^2) = E(B^2) = \sigma^2$, e $R_X(t_1, t_2) = C_X(t_1, t_2)$:

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[(A\cos\omega t_1 + B\sin\omega t_1)(A\cos\omega t_2 + B\sin\omega t_2)]$$

$$= E(A^2\cos\omega t_1\cos\omega t_2 + B^2\sin\omega t_1\sin\omega t_2) = \sigma^2\cos\omega(t_1-t_2) = \sigma^2\cos\omega\tau.$$

(b) **(1,5)** Determine função densidade conjunta de $X(t)$ e $X(t+s)$.
Da expressão 5-39 (página 116), com $R(\tau) = \sigma^2\cos\omega\tau$ e $R(0) = \sigma^2$:

$$f(x_1,x_2,\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^4(1-\cos^2(\omega\tau))}}\exp\left\{-\frac{\sigma^2[x_1^2 - 2\cos(\omega\tau)x_1x_2 + x_2^2]}{2[\sigma^4(1-\cos^2(\omega\tau))]}\right\}.$$

3. **(1,0)** Seja $Y(t) = X(t)+N(t)$, onde $X(t)$ e $N(t)$ são processos ortogonais e $N(t)$ é o processo ruído branco. Sejam $\varphi_n(t)$ as funções de base da expansão de Karhunen-Loève do processo $X(t)$. Mostre que $\varphi_n(t)$ são também as funções de base da expansão do processo $Y(t)$, e indique a relação entre os autovalores associados a expansão de $X(t)$ e aqueles associados à expansão de $Y(t)$.

   Ver exemplo 6-3, página 144.

4. Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ dois processos independentes e estacionários no sentido amplo, e seja $Z(t) = X(t)Y(t)$.

   (a) **(1,5)** Mostre que $Z(t)$ também é estacionário no sentido amplo;

$$E[Z(t)] = E[X(t)Y(t)] = E[X(t)]E[Y(t)] = m_Xm_Y.$$

$$R_Z(t_1,t_2) = E[Z(t_1)Z(t_2)] = E[X(t_1)Y(t_1)X(t_2)Y(t_2)]$$

$$= E[X(t_1)X(t_2)]E[Y(t_1)Y(t_2)] = R_X(\tau)R_Y(\tau).$$

   Como m_Z não varia com o tempo e R_Z só depende de τ, $Z(t)$ também é estacionário no sentido amplo.

   (b) **(1,5)** Determine $R_Z(\tau)$ e $S_Z(f)$.

   $R_Z(\tau) = R_X(\tau)R_Y(\tau)$ (do item anterior).

   $S_Z(f) = S_X(f) * S_Y(f)$.

5. **(1,5)** Seja $Z(t) = X(t) + Y(t)$. Identifique as condições para que a seguinte igualdade seja válida: $S_Z(f) = S_X(f) + S_Y(f)$.

   $X(t)$ e $Y(t)$ devem ser processos estacionários (pelo menos no sentido amplo) e não-correlacionados.