

***Escola Superior de Agricultura "Luiz de
Queiroz"***

Universidade de São Paulo

***LCE0130 - Cálculo Diferencial e
Integral***

Taciana Villela Savian

Sala 304, pav. Engenharia, ramal 237

tvsvian@usp.br tacianavillela@gmail.com

Crescimento e Concavidade de Funções

Nessa aula iremos aprender a utilizar a derivada para compreender o comportamento de uma função.

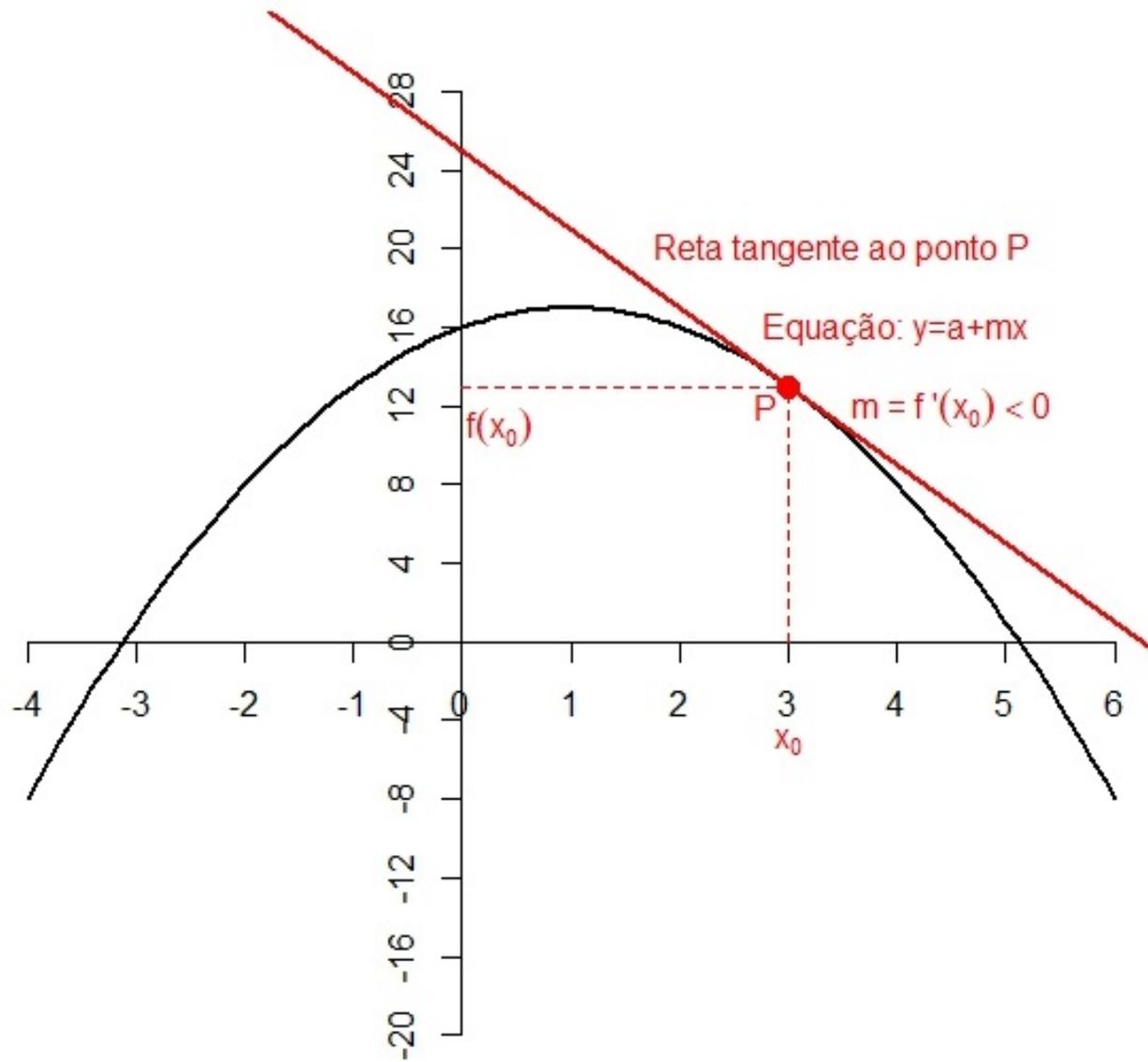
- Localizar os valores máximos e mínimos de uma função;
- Analisar a concavidade de uma função;
- Localizar os pontos de inflexão da função;
- Analisar algumas situações práticas.

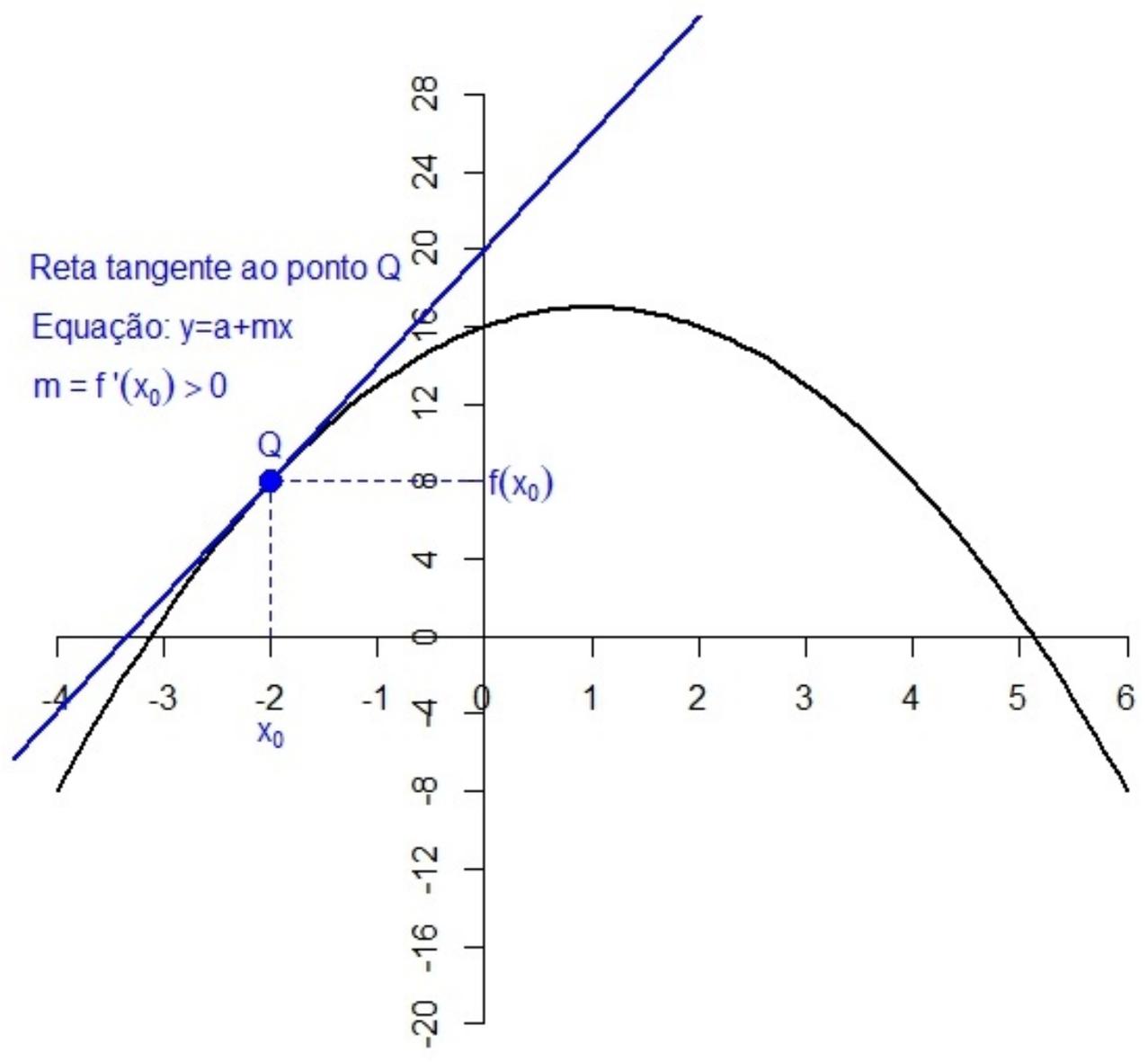
Crescimento e Concavidade de Funções

Ponto Crítico de uma Função

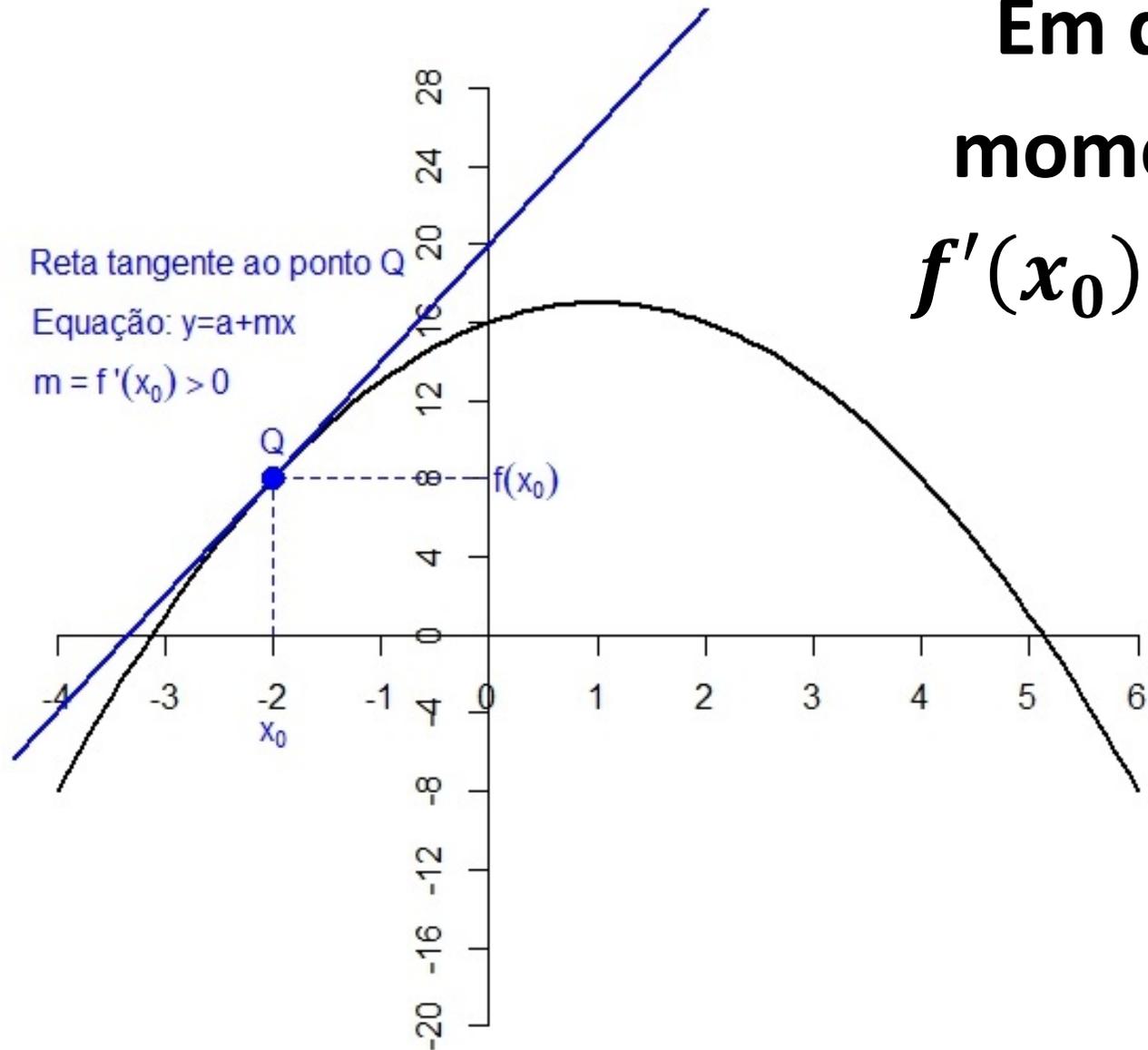
Se $f(x)$ é uma função, contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) , um ponto x_0 em seu domínio, no qual $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0) \nexists$ (não está definida) é denominado de ponto crítico da função $f(x)$.

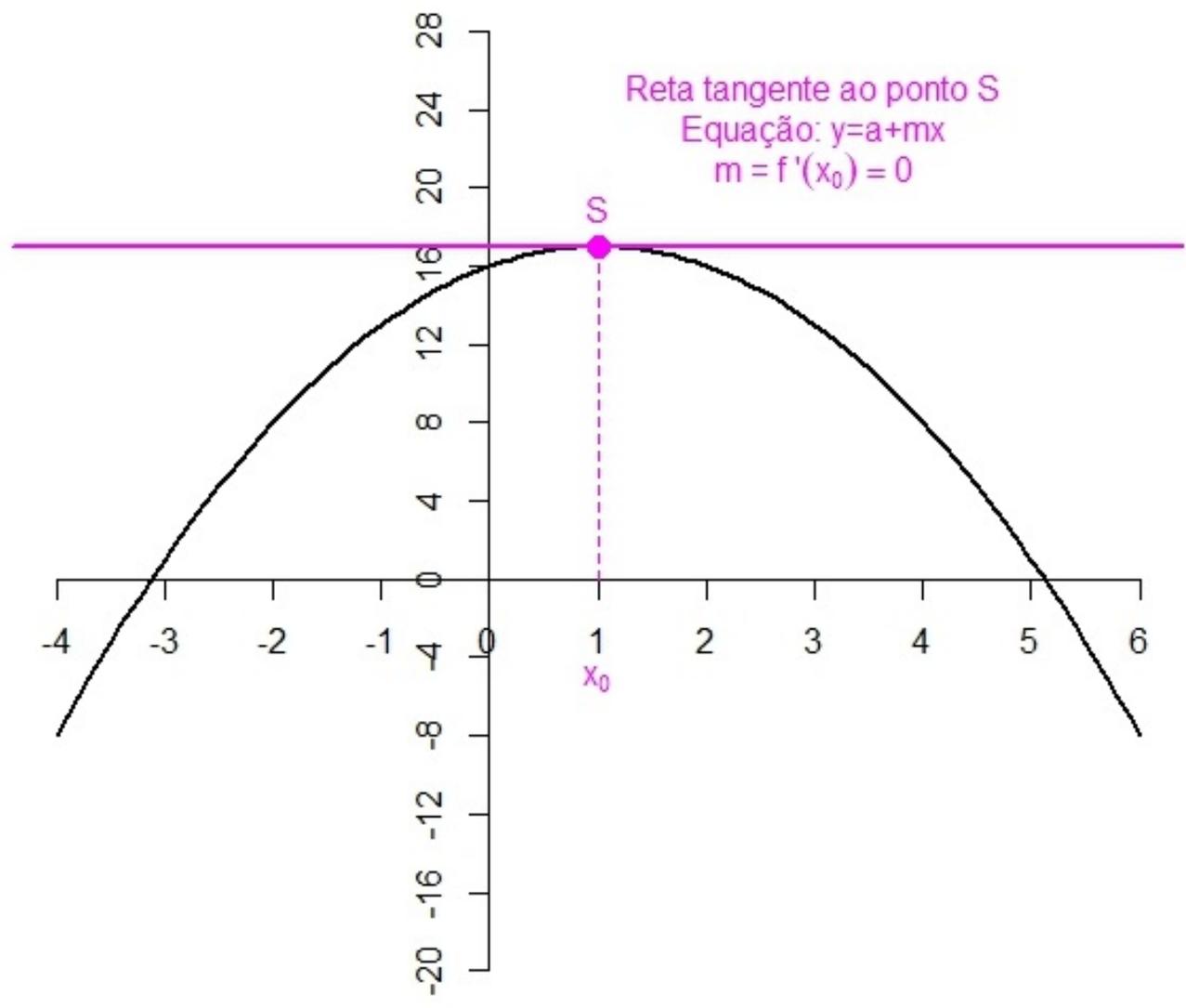
O que significa "graficamente" $f'(x_0) = 0$? e $f'(x_0) \nexists$?

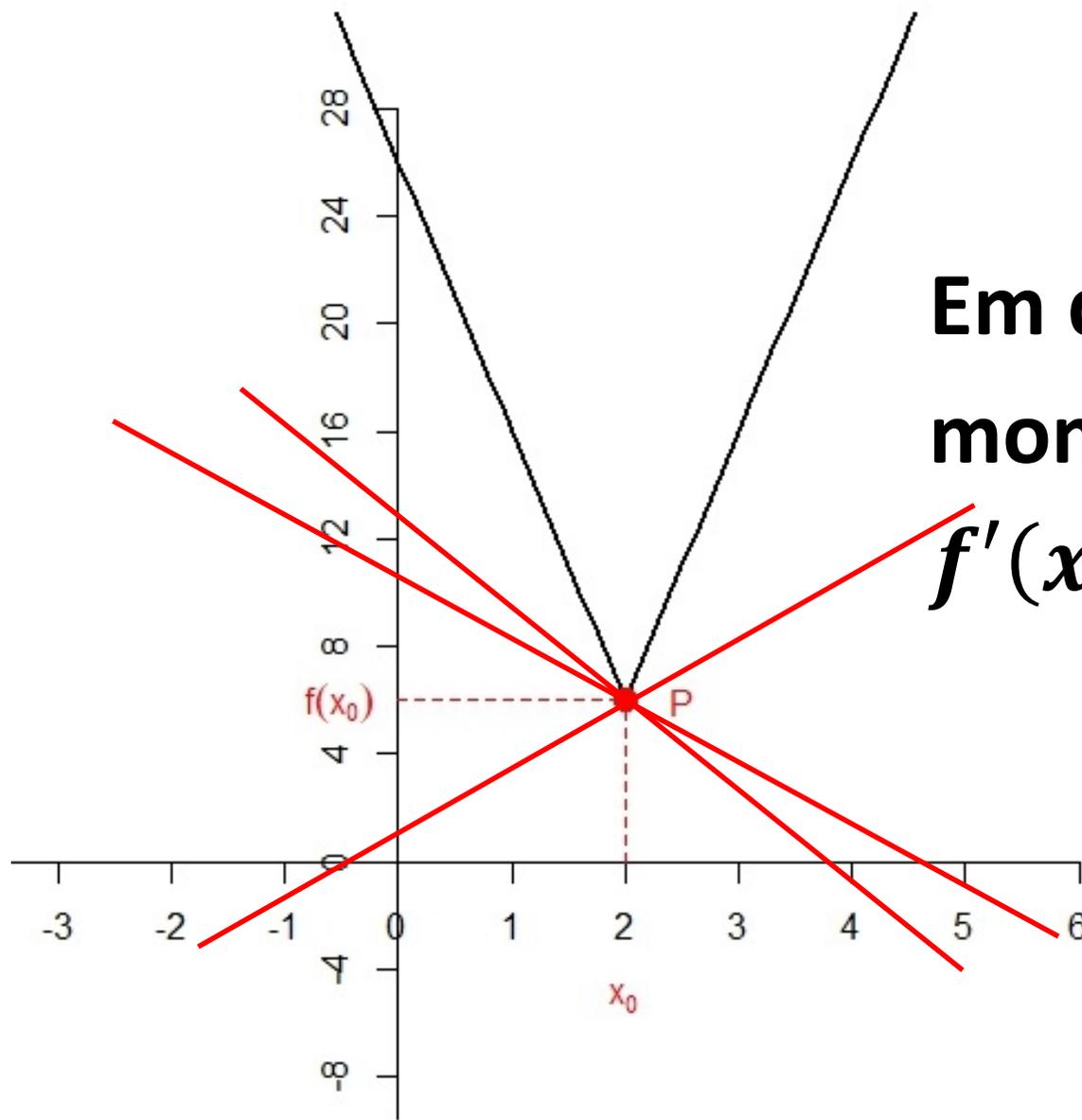




Em que
momento
 $f'(x_0) = 0$?



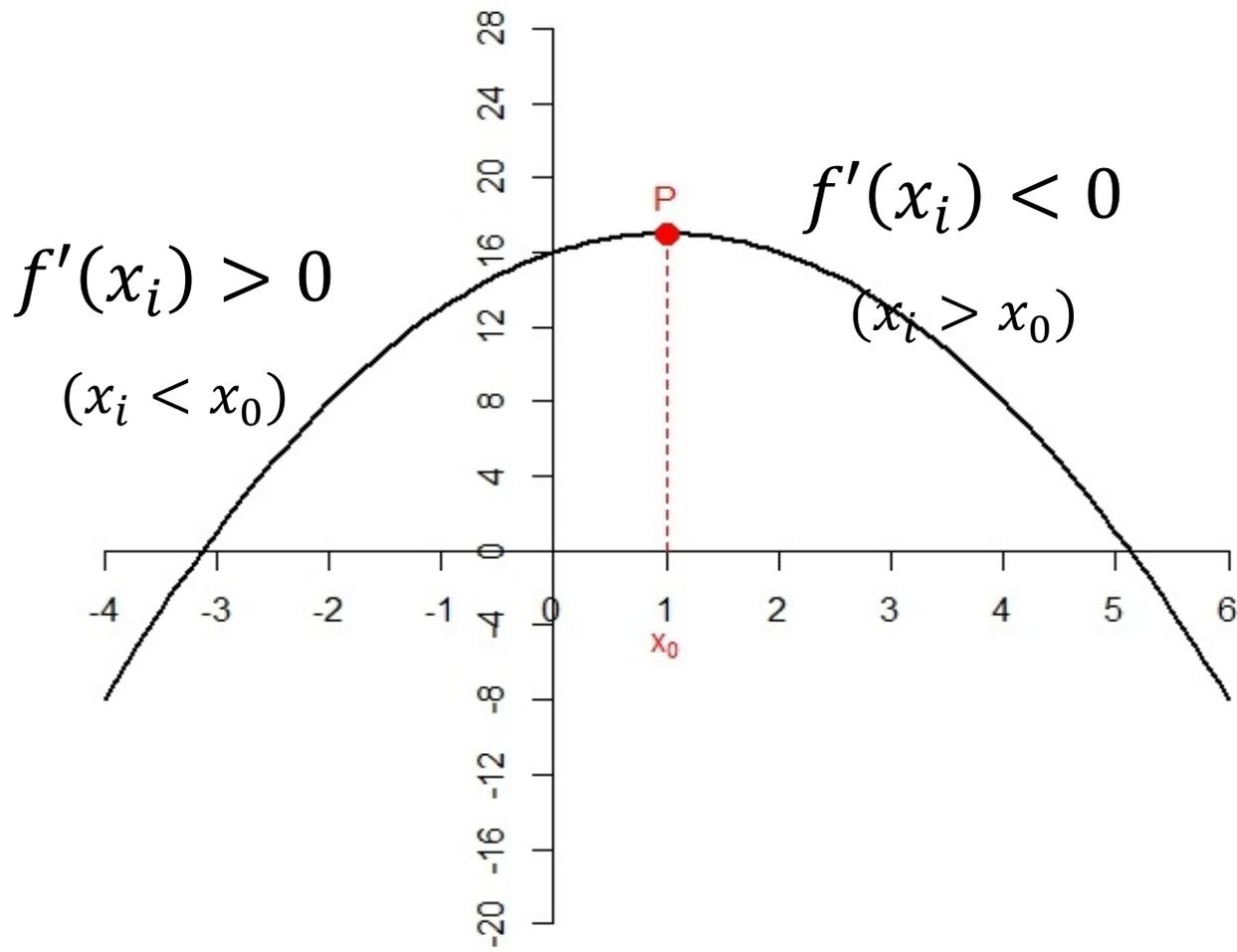




Em que
momento
 $f'(x_0) \nexists$?

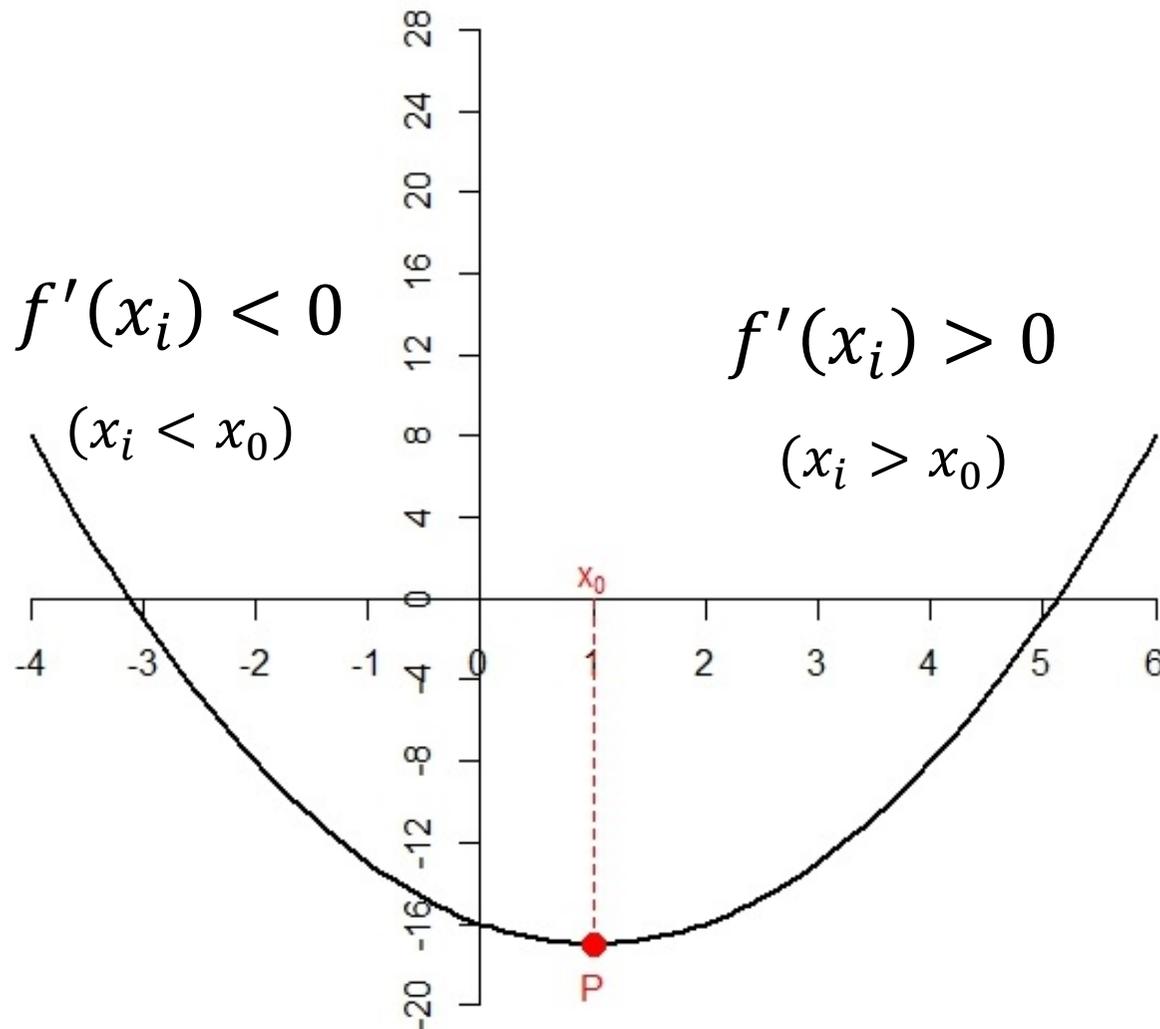
Máximos e Mínimos de Funções

Os pontos críticos de uma função dividem o seu domínio (D_f) em intervalos nos quais o sinal da derivada permanece inalterado (positivo ou negativo).



Se conseguirmos mostrar que antes de um ponto crítico (x_0) a derivada tem sinal positivo e depois desse ponto (x_0) a derivada tem sinal negativo, podemos afirmar que x_0 é a abscissa de um **Ponto de Máximo** na função $f(x)$

Crescente → **Decrescente.**



Da mesma forma,
Se conseguirmos mostrar
que antes de um ponto
crítico (x_0) a derivada tem
sinal negativo e depois
desse ponto (x_0) a
derivada tem sinal positivo,
podemos afirmar que x_0 é
a abscissa de um **Ponto
de Mínimo** na função $f(x)$.
Decrescente → **Crescente**

Além disso:

Se uma função $f(x)$ é diferenciável em um intervalo contendo c , então, no ponto $P(c, f(c))$, o gráfico é:

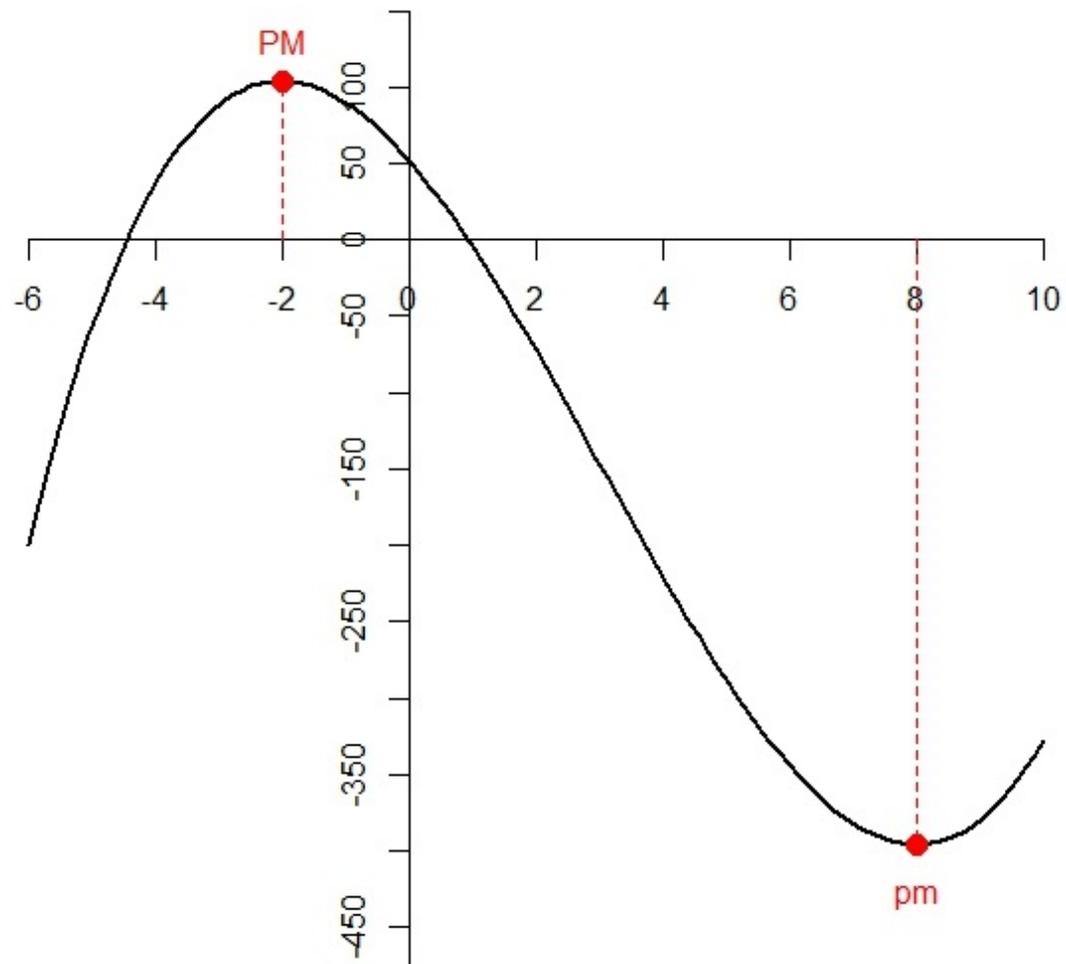
- Côncavo para cima se $f''(c) > 0$;
- Côncavo para baixo se $f''(c) < 0$;

EXEMPLO:

Considere a função $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$, definida no intervalo $[-6, 10]$.

Determine os intervalos de crescimento/decrescimento da função $f(x)$ e faça um esboço do gráfico identificando os pontos de máximo e mínimo da função.

Esboço gráfico da função $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$



CUIDADO!

Nem todo ponto crítico (x_0) de uma função pode ser classificado como máximo ou mínimo (local/global).

Quando não há troca de sentido da função $f(x)$

(crescente - decrescente ou decrescente - crescente)

o ponto crítico x_0 não é nem máximo, nem mínimo e sim um ponto denominado "**Ponto de Inflexão**" onde acontece a troca de concavidade da função $f(x)$.

EXEMPLO:

Considere a função $f(x) = x^3$, definida no \mathbb{R} .

Determine os intervalos de crescimento/decrescimento da função $f(x)$ e faça um esboço do gráfico identificando os pontos de máximo e mínimo da função, se houverem!

As técnicas utilizadas para calcular máximos e mínimos são muito úteis em uma área chamada "otimização"

Por exemplo:

- Uma empresa que tente "maximizar" seu lucro pode ter isso "minimizando" seus custos!
- Como descobrir em que momento a fotossíntese está ocorrendo com velocidade máxima?

Exemplo: Com o tempo, $t \geq 0$, medido em dias, a taxa segundo a qual a fotossíntese ocorre na folha de uma planta, representada pela taxa de produção de oxigênio, é dada aproximadamente por:

$$p(t) = 100(e^{-0,02t} - e^{-0,1t}).$$

Em que momento a fotossíntese está ocorrendo mais rápido? Segundo que taxa (unidade de oxigênio/unidade de tempo)?

Maximizar o lucro é um dos problemas fundamentais de um produtor de bens de consumo.

Dada uma quantidade, q , o lucro, $L(q)$, é a diferença entre a receita, $R(q)$, e o custo, $C(q)$, de produzir a quantidade q . Portanto,

$$L(q) = R(q) - C(q)$$

Lembrando: "Os máximos e mínimos de uma função só podem ocorrer nos pontos críticos da função."

Se queremos maximizar o Lucro.....

.....encontrar os pontos críticos da função $L(q)$.

$$L'(q) = 0$$

Mas,

$$L'(q) = R'(q) - C'(q)$$

Logo, o lucro máximo "pode" ocorrer quando

$$R'(q) - C'(q) = 0$$

$$R'(q) = C'(q)$$

em que: $R'(q)$ é a receita marginal e $C'(q)$ é o custo marginal.

Exemplo: Encontre a quantidade que maximiza o Lucro se a receita e custo totais (em reais) são dados por:

$$R(q) = 5q - 0,003q^2$$

$$C(q) = 300 + 1,1q$$

em que: q é a quantidade, $0 \leq q \leq 1.000$

Que nível de produção corresponde ao Lucro Máximo?

Exemplo: A demanda de entradas para um parque ecológico é dada pela equação $p = 70 - 0,02q$, em que p é o preço da entrada, em reais, e q é o número de pessoas que frequentam o parque pagando este preço.

(a) Que preço gera um público de 3.000 pessoas?

(R\$ 10,00)

(b) Qual a receita total com este preço?

(R\$ 30.000,00)

(c) Qual a receita total se o preço for R\$ 20,00?

(R\$ 50.000,00)

(d) Escreva a função receita como função do público q que frequenta o parque ecológico.

$$R(q) = p \times q = (70 - 0,02q) \times q = 70q - 0,02q^2$$

(e) Que frequência maximiza a receita do parque?

(1.750 pessoas)

(f) Que preço deve ser cobrado para maximizar a receita?

(R\$ 35,00)

(g) Qual é a receita máxima?

(R\$ 61.250,00)

(h) Qual o lucro correspondente?

Não dá para determinar se não souber os custos!!!!

Exercícios: entrega no dia 29/05

1) Para as funções a seguir use a primeira derivada para obter todos os pontos críticos da função e a segunda derivada para obter todos os pontos de inflexão. Use gráficos para indicar cada ponto crítico como máximo local, mínimo local, ou nenhum dos dois casos.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$

b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6$

2) A função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$ tem um ponto crítico em $x = 1$. Use o teste da segunda derivada para descobrir se ele é um máximo local ou mínimo local.

3) Durante uma enchente, o nível da água de um rio subiu, primeiro, cada vez mais rápido e, depois, cada vez mais devagar até atingir seu ponto mais alto e, então, voltar ao nível anterior à enchente. Considere a profundidade do rio (nível da água) como função do tempo.

a) O instante em que o rio atinge o nível mais alto é um ponto crítico ou um ponto de inflexão desta função?

b) O instante em que começou a subir mais devagar é um ponto crítico ou um ponto de inflexão?

4) Na estatística, temos uma função muito importante (função densidade de probabilidade) denominada curva Normal. Uma de suas características é apresentar a forma de sino e tem a seguinte expressão:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

em que: μ é um parâmetro (constante) denominado média; σ é um parâmetro denominado desvio padrão (o seu quadrado σ^2 é denominado variância).

a) em que ponto a função $f(x)$ tem um máximo?

b) a função tem ponto(s) de inflexão? Se sim, onde?