PTC-5822 - Introdução a Processos Estocásticos - 2019
Lista de exercícios 07
GABARITO

Todos os exercícios desta lista foram retirados da apostila do curso.

1. Exercício 3, página 125.

(a)

Como as fontes são ortogonais, a DEP da tensão sobre o capacitor pode ser expressa da seguinte forma:

$$S_Y(f) = S'_Y(f) + S''_Y(f),$$

onde $S'_Y(f)$ é a DEP devida apenas a R_1 (isto é, fazendo $v_2 = 0$), e $S''_Y(f)$ é a DEP devida apenas a R_2 (isto é, fazendo $v_1 = 0$).

Da análise do circuito, a função de transferência nos domínios s e f do caso em que $v_2 = 0$ é:

$$H'(s) = \frac{V_c}{V_1} = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2 + sC} \Leftrightarrow H'(f) = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2 + j2\pi fC}.$$

Portanto, a DEP da tensão de saída quando $v_2 = 0$ é:

$$S'_Y(f) = |H'(f)|^2(2\kappa T R_1) = \frac{2\kappa T/R_1}{(1/R_1 + 1/R_2)^2 + 4\pi^2 f^2 C^2}.$$

Do mesmo modo:

$$S''_Y(f) = |H''(f)|^2(2\kappa T R_2) = \frac{2\kappa T/R_2}{(1/R_1 + 1/R_2)^2 + 4\pi^2 f^2 C^2}.$$

Portanto:

$$S_Y(f) = \frac{2\kappa T(1/R_1 + 1/R_2)}{(1/R_1 + 1/R_2)^2 + 4\pi^2 f^2 C^2} = \frac{2\kappa T(1/R_P)}{(1/R_P)^2 + 4\pi^2 f^2 C^2}.$$

(R_P é a resistência equivalente de R_1 e R_2 em paralelo, como utilizado no próximo item.)

(b)

Neste caso, a função de transferência nos domínios s e f é dada por:

$$H(s) = \frac{1}{1 + sCR_P} \Leftrightarrow H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fCR_P},$$

onde R_P é tal que $1/R_P = 1/R_1 + 1/R_2$. A DEP da tensão sobre o capacitor vale:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2(2\kappa TR_P) = \frac{2\kappa TR_P}{1 + 4\pi^2 f^2 C^2 R_P^2} = \frac{2\kappa T/R_P}{(1/R_P^2) + 4\pi^2 f^2 C^2}.$$

Ou seja, as duas expressões são idênticas, e qualquer um dos dois métodos pode ser empregado para calcular a DEP da tensão que cai sobre o capacitor.

2. Exercício 9, página 126.

$m_Y = m_X H(0) = 128.$

$$R_X(\tau) = C_X(\tau) + m_X^2 = 1000e^{-10|\tau|} + 128^2 \Leftrightarrow S_X(f) = \frac{20000}{100 + 4\pi^2 f^2} + 128^2\delta(f).$$

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2 = \left(\frac{20000}{100 + 4\pi^2 f^2} + 128^2\delta(f)\right)\left(\frac{1}{1 + 4\pi^2 f^2}\right) =$$

$$= 128^2\delta(f) + 20000G(f),$$

onde

$$G(f) = \frac{1}{(100 + 4\pi^2 f^2)(1 + 4\pi^2 f^2)}.$$

Trabalhando no domínio s e expandindo em frações parciais, podemos chegar a uma expressão alternativa da função $G(f)$:

$$G(f) = \frac{20A}{10^2 + 4\pi^2 f^2} + \frac{2B}{1 + 4\pi^2 f^2} \Leftrightarrow g(\tau) = Ae^{-10|\tau|} + Be^{-|\tau|}$$

onde $A = 1/1980$ e $B = 1/198$. Portanto:

$$R_Y(\tau) = 128^2 + 20000g(\tau) = 128^2 + 20000(Ae^{-10|\tau|} + Be^{-|\tau|}).$$

3. Exercício 8, página 156.

   Ver exemplo 6-2, página 144.

4. Exercício 10, página 156.

   (a)

$$H_0(f) = \frac{S_{XY}(f)}{S_Y(f)} = \frac{S_X(f)}{S_X(f) + S_N(f)} = \frac{S_X(f)}{1} = S_X(f).$$

   (b)

   Do exemplo 5-1, página 101: $h(t) = W\text{sinc}^2(Wt)$.

   (c)

   Na entrada: $E[Y^2(t)] = S_Y(0) = 1$.

   Na saída:

   $S_{\hat{X}}(f) = S_Y(f)|H_0(f)|^2 = |H_0(f)|^2 = S_X^2(f)$.

   Portanto: $E[\hat{X}^2(t)] = S_X^2(0) = 1$.

   (d)

   Não há ganho em termos de SNR.