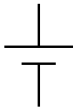
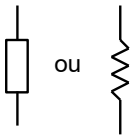
Eletromagnetismo I

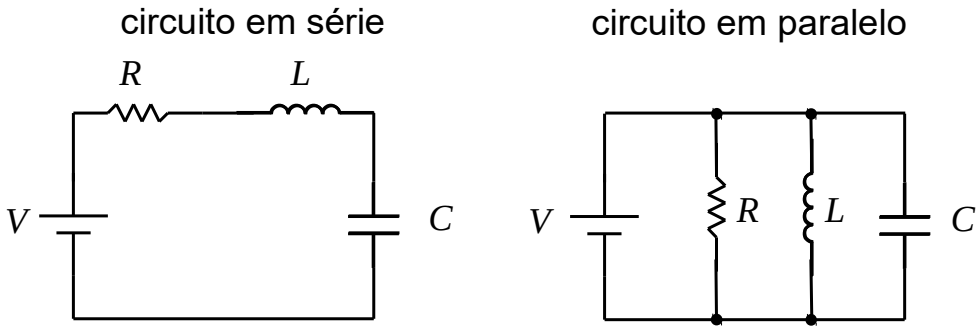
Prof. Raul Abramo - 2° Semestre 2015

Preparo: Gilson Ronchi

Aula 27

Circuito RLC

Símbolo	Descrição	
	fonte de tensão de corrente contínua (DC)	
	fonte de tensão de corrente alternada (AC) $V(t)=V_0 \cos \omega t$	
	resistor	$\Delta \phi = R I$
	capacitor	$Q = C \Delta \phi$ $\Delta \phi = \frac{1}{C} Q = \frac{1}{C} \int dt\, I$
	indutor	$\Delta \phi = L \frac{dI}{dt}$ $\quad \Delta \phi \Leftrightarrow \varepsilon$



Circuito RLC em série

Pela lei das malhas de Kirchoff, temos

$$V(t) = RI(t) + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t dt' I(t')$$

Fonte DC

Para o caso de tensão de alimentação contínua, i.e, $V(t) = V_0 = cte$,

$$V_0 = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t dt' I(t')$$

derivando novamente em relação a t, obtemos

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0$$

que é exatamente a equação do oscilador harmônico amortecido, onde

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \qquad \alpha = \frac{1}{2}\frac{R}{L}$$

e que cujas solução são do tipo $I = I_0 e^{\omega t}$:

$$\omega^2 + 2\omega\alpha + \omega_0^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \omega = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

- Caso supercrítico: $\alpha > 0$:
- Caso subcrítico: $\alpha < \omega_0$

Fonte CA

Consideraremos agora que o circuito esteja alimentado com uma fonte de tensão alternada:

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

Tomando a solução do tipo $I = I_0 e^{\omega t}$:

$$R + L(i\omega) + \frac{1}{C}\frac{1}{i\omega} = \frac{V_0}{I_0}$$

ou

$$R + i\left(\underbrace{L\omega}_{\equiv\chi_L} - \underbrace{\frac{1}{\omega C}}_{\equiv\chi_C}\right)$$

$$\boxed{Z \equiv \frac{V_0}{I_0} = R + i\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Se $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$, temos a condição de ressonância:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

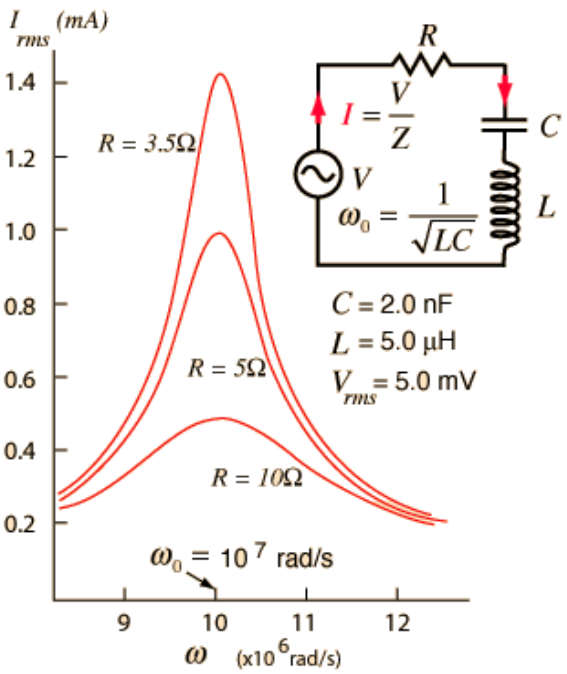
e $Z = R$.

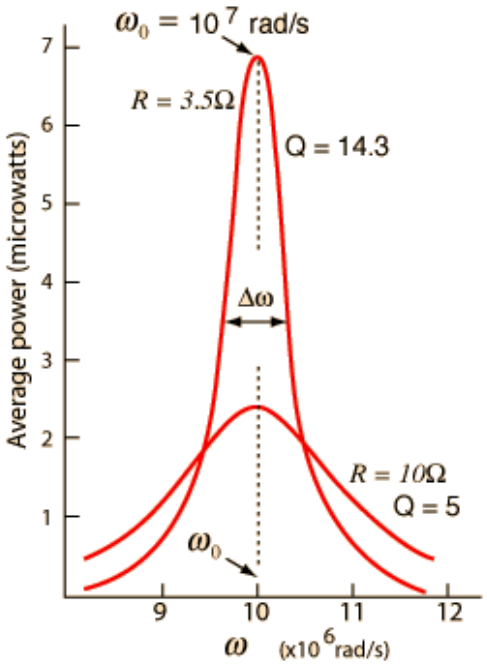
O fator de qualidade Q da ressonância é definida como

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

onde ω_0 é a frequência de ressonância e $\Delta\omega$ é o tamanho da faixa de frequência na qual a potência dissipada no circuito é maior que a metade da potência máxima, ou seja, corresponde a largura de banda a meia altura da potência dissipada. No caso do circuito RLC em série, $\Delta\omega = 2\alpha$ e

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$





Sistema RLC em paralelo

1. $I_1 = I_2 + I_3$
2. $V - RI_2 - L\frac{dI_2}{dt} = 0$
3. $\frac{1}{C}\int dt I_3 + L\frac{dI_3}{dt} + RI_2 = 0$

$$\therefore I_1 = \left(\frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C\right) V_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{R + i\left[\omega L + \omega C\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)\right]}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Energia em um sistema LC

$$\begin{aligned} -L\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}\int^t dt' I(t') &= 0 \\ \rightarrow \quad & L\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I = 0 \\ \rightarrow \quad & \frac{d^2 I}{dt^2} = -\frac{1}{LC} I = -\frac{1}{\omega_0^2} I \end{aligned}$$

Energia:

- Indutor:
$$W_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L I_0^2 \cos^2 \omega t$$
- Capacitor:
$$W_c = \frac{1}{2} C V_C^2$$
mas
$$V_C = \frac{1}{C}\int dt I = \frac{I_0}{\omega C}\sin^2 \omega t$$
$$W_c = \frac{1}{2}\frac{C}{\omega^2} I_0^2 \sin^2 \omega t$$

Na frequência de ressonância, $\omega_0^2 C = 1/L$ e

$$W_T = W_C + W_L = \frac{1}{2} L I_0^2 = constante$$