CAPÍTULO 9

MODELOS SAZONAIS

INTRODUÇÃO

Uma série temporal pode apresentar a componente de tendência e a componente sazonal, como vimos anteriormente.

No entanto, mesmo após estimar e eliminar a componente sazonal determinística pode restar correlação significativa em:

i. "lags" de baixa ordem, indicando que resíduos ainda são correlacionados;

ii. "lags" sazonais, ou seja, múltiplos de período s. Nesse caso, há necessidade de se considerar uma sazonalidade estocástica ajustando um modelo ARIMA sazonal (SARIMA).

Por simplicidade, assume-se que os dados são observados mensalmente e a sazonalidade é de período s=12.

SAZONALIDADE DETERMINÍSTICA

Considere que $\{Z_t\}$ exibe um comportamento sazonal com período s=12. Podemos ajustar:

$$Z_t = \mu_t + N_t$$

onde μ_t é função determinística periódica, satisfazendo $\mu_t - \mu_{t-12} = 0$, ou

$$(1 - B^{12})\mu_t = 0$$

e N_t é um processo estacionário que pode ser modelado por um ARMA(p,q). Dessa forma:

$$\phi(B)N_t = \theta(B)a_t \qquad (10.1)$$

com $a_t \sim RB$ e μ_t tem solução dada por:

$$\mu_t = \mu + \sum_{j=1}^{6}\left[\alpha_j \cos\frac{(2\pi jt)}{12} + \beta_j sen\frac{(2\pi jt)}{12}\right]$$

com μ, α_j, β_j, constantes desconhecidas; $j = 1,2, \ldots 6$

Para um modelo sazonal determinístico, aplicando a diferença sazonal $(1 - B^{12})$ em $Z_t = \mu_t + N_t$, obtemos:

$$(1 - B^{12})Z_t = (1 - B^{12})\mu_t + (1 - B^{12})N_t \qquad (10.2)$$

como $\mu_t - \mu_{t-12} = 0$, então:

$$(1 - B^{12})Z_t = (1 - B^{12})N_t$$

substituindo $\phi(B)N_t = \theta(B)a_t \rightarrow N_t = \phi(B)^{-1}.\theta(B)a_t$, na equação ARMA obtemos:

$$(1 - B^{12})Z_t = (1 - B^{12})\phi(B)^{-1}\theta(B)a_t$$

$$\phi(B)(1 - B^{12})Z_t = \theta(B)(1 - B^{12})a_t$$

$$\phi(B)W_t = \theta(B)(1 - B^{12})a_t \qquad (10.3)$$

onde $W_t = (1 - B^{12})Z_t$

PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO

A identificação do modelo $\phi(B)W_t = \theta(B)(1 - B^{12})a_t$ é realizada da seguinte forma:

i. Obter as estimativas preliminares $\tilde{\mu}, \tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j$ de μ, α_j, β_j, $j = 1, \ldots, 6$, por meio de uma análise de regressão de Z_t sobre 1, $sen\, \frac{2\pi jt}{12}$ e $\cos \frac{2\pi jt}{12}$, $j = 1, \ldots, 6$.

ii. Calculamos os resíduos:

$$\tilde{N}_t = Z_t - \tilde{\mu}_t = Z_t - \tilde{\mu} - \sum_{j=1}^{6} [\, \tilde{\alpha}_j \cos \frac{(2\pi jt)}{12} + \tilde{\beta}_j sen \frac{(2\pi jt)}{12}]$$

e examinamos as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial para identificar um modelo ARMA(p,q) para N_t.

PREVISÃO

A previsão de valores futuros Z_{t+h}, dados $Z_1, \ldots, Z_t$ é obtido notando que:

$$\hat{Z}_t(h) = \mathrm{E}[Z_{t+h} | Z_t, Z_{t-1}, \ldots]$$

$$= \mathrm{E}[\mu_{t+h} + N_{t+h} | Z_t, Z_{t-1}, \ldots]$$

$$= \mu_{t+h} + \mathrm{E}[N_{t+h} | Z_t, Z_{t-1}, \ldots]$$

Portanto, $\hat{Z}_t(h) = \mu_{t+h} + \hat{N}_t(h)$

onde μ_{t+h} e $\hat{N}_t(h)$ são calculados utilizando os modelos $Z_t = \mu_t + N_t$ e $(1 - B^{12})\mu_t = 0$. Nota-se que os parâmetros são não conhecidos por isso utilizamos $\hat{\mu}_t$ no lugar de μ_t e N_t por $\hat{N}_t = Z_t - \hat{\mu}_t$.

SAZONALIDADE ESTOCÁSTICA

Do mesmo modo que podemos modelar uma série Z_t, observada mês a mês, por exemplo, por um modelo ARIMA:

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$$

Poderíamos modelar uma associação ano a ano na série Z_t através de um modelo ARIMA sazonal.

$$Z_t = \Phi Z_{t-12} + a_t$$

Do mesmo modo, poderíamos considerar um modelo de médias moveis sazonais, como:

$$Z_t = a_t - \Theta a_{t-12}$$

A ideia é relacionar uma observação Z_t, correspondente a um determinado mês, janeiro, por exemplo, com observações correspondentes a janeiros anteriores, através de um modelo ARIMA sazonal da forma:

$$\Phi(B^{12})\Delta_{12}^{D} Z_t = \Theta(B^{12})\alpha_t$$

onde:

$\Phi(B^{12}) = 1 - \Phi_1 B^{12} - \cdots - \Phi_P B^{12P}$ que é o operador autorregressivo sazonal de ordem P, estacionário;

$\Theta(B^{12}) = 1 - \Theta_1 B^{12} - \cdots - \Theta_Q B^{12Q}$ que é o operador de médias móveis sazonal de ordem Q, invertível;

$\Delta_{12} = (1 - B^{12})$ é o operador diferença sazonal;

$\Delta_{12}^{D} = (1 - B^{12})^{D}$, indicando o número de diferenças sazonais;

Analogamente, poderíamos ter também um modelo que relacionasse os meses de dezembro:

$$\Phi(B^{12})\Delta_{12}^{D}Z_{t-1} = \Theta(B^{12})\alpha_{t-1}$$

E, assim por diante, onde os polinômios $\Phi(.)$ e $\Theta(.)$ seriam os mesmos definidos anteriormente

Porém, diferentemente do modelo ARIMA usual, os $\alpha_t, \alpha_{t-1}, \dots$ não seriam RB. Por exemplo, a precipitação em janeiro 1980 tem de estar relacionada com janeiros anteriores, também está relacionada com dezembro, novembro, etc, de 1979, o que implica que $\alpha_t, \alpha_{t-1}, \dots$ estejam relacionados.

Para modelar essas relações de dependência temos:

$$\phi(B)\Delta^{d}\alpha_t = \theta(B)a_t$$

onde a_t é RB.

Segue de 10.2 e 10.1 que:

$$\phi(B)\Phi(B^{12})\Delta^{d}\Delta_{12}^{D}Z_t = \theta(B)\Theta(B^{12})a_t$$

Conhecido como ARIMA sazonal multiplicativo (SARIMA) de ordem $(p, d, q)x(P, D, Q)_{12}$.

O modelo $\phi(B)N_t = \theta(B)a_t$ implica que devemos tomar “d” diferenças simples e “D” diferenças sazonais da série Z_t, de modo que:

$$W_t = \Delta^{d}\Delta_{12}^{D}Z_t$$

seja estacionário.

Exemplo 10.2: Considere o modelo de médias móveis sazonal:

$$Z_t = a_t - \Theta_1 a_{t-12} - \cdots - \Theta_Q a_{t-12Q}$$

Sua fac será não nula somente nos lags $12,24,\ldots,12Q$.

As autocorrelações serão dadas por:

$$\mathrm{P}_{12} = \frac{-\Theta_1 + \Theta_1\Theta_2 + \cdots + \Theta_{Q-1}\Theta_Q}{1 + \Theta_1^2 + \cdots + \Theta_Q^2}$$

.

.

.

$$\mathrm{P}_{12Q} = \frac{-\Theta_Q}{1 + \Theta_1^2 + \cdots + \Theta_Q^2}$$

Por exemplo, o modelo SMA(1)

$$Z_t = a_t - \Theta a_{t-12}$$

Terá autocorrelação não nula, somente no lag 12, ou seja,

$$\rho_{12} = \frac{-\Theta}{1+\Theta^2}, \rho_j = 0, j \neq 0(\pm 12)$$

Exemplo 10.3: Seja o modelo autorregressivo sazonal puro SAR(P):

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-12} + \cdots + \Phi_{\mathrm{P}} Z_{t-12\mathrm{P}} + a_t$$

No caso particular onde P = 1, temos:

$$Z_t = \Phi Z_{t-12} + a_t$$

com fac dada por:

$$\begin{cases} \rho_{12} = \Phi \\ \rho_{24} = \Phi^2 \\ \rho_{12j} = \Phi^j, j = 0,1,\ldots \end{cases}$$

Ou seja, a fac será não nula nos lags múltiplos de 12.

Observe ainda que o modelo SAR(1) é estacionário se $|\Phi| < 1$ e o efeito sazonal é transitório e vai se amortecendo. Do mesmo modo SMA(1) é invertível se $|\Theta| < 1$.

Exemplo 10.4: Um modelo bastante conhecido utilizado é o SARIMA$(0,1,1)x(0,1,1)_{12}$ que tem a forma:

$$(1-B)(1-B^{12})Z_t = (1-\theta B)(1-\Theta B^{12})a_t$$

$$W_t = (1-\Theta B^{12} - \theta B + \theta\Theta B^{13})a_t$$

(ver Box,Jenkins,Reinsel,pg.333,exemplo 9.2)

A função de autocovariância será dada por:

$$\gamma(0) = \sigma^2\left(1+\theta^2+\Theta^2+\theta^2\Theta^2\right)$$

$$\gamma(1) = \sigma^2\left(-\theta-\theta\Theta^2\right)$$

$$\gamma(2) = \gamma(3) = \cdots = \gamma(10) = 0$$

$$\gamma(11) = \sigma^2(\theta\Theta)$$

$$\gamma(12) = \sigma^2(-\Theta-\theta^2\Theta)$$

$$\gamma(13) = \sigma^2(\theta\Theta)$$

$$\gamma(j) = 0, j > 13$$

Ou seja, a fac tem valores diferentes de zero nos lags 1,11,12,13 (com $\rho_{11} = \rho_{13}$)

IDENTIFICAÇÃO; ESTIMAÇÃO E VERIFICAÇÃO

Procederemos da mesma forma que nos modelos ARIMA. A diferença é que teremos que diferençar a série com respeito a Δ e Δ_{12} para produzir estacionariedade.

O próximo passo consiste em verificar as fac e facp para identificar um modelo preliminar e obter os valores de "p" e "q" nos lags 1,2,3,... e os valores de "P" e "Q" nos lags 12,24,36,...

Em seguida, estimar os parâmetros identificados utilizando EMV. Para o diagnóstico utilizaremos os testes de autocorrelação residual, parcial, Box-pierce, etc. E, Por último, procederemos na previsão para um modelo SARIMA multiplicativo.

Exemplos → R