MA22 - Unidade 7 - Resumo 1

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

6 de Abril de 2013

Funções Contínuas

Definição (Função contínua em um ponto) Sejam $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no domínio $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$, um ponto tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$. Dizemos que a função f é *contínua em a* se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo

Seja $p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Então, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a).$$

Portanto, p é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Funções Contínuas

Exemplo Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Observe que f é contínua em 0, pois $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, mas f não é contínua em qualquer outro ponto. Realmente, seja $a \neq 0$ e sejam (x_n) e (y_n) sequências em $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ tais que $\lim x_n = \lim y_n = a$, $x_n \in \mathbb{Q}$ e $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, para todos $n \in \mathbb{N}$. A sequência $(f(y_n))$ é constante igual a zero e $(f(x_n) = |x_n|)$ converge para $|a| \neq 0$. Portanto, não existe $\lim_{x \to a} f(x)$, se $a \neq 0$, e f não é contínua nestes pontos.

Observação Na caraterização da continuidade em um ponto por meio de sequências, ao escrevermos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, somos obrigados a considerar sequências (x_n) em $D \setminus \{a\}$, onde D é o domínio de f, tais que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. De fato, isto é equivalente a considerar todas as sequências em D tais que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Funções Contínuas

Definição (Funcao contínua) Seja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é *contínua* se f for *contínua em todos os elementos de* D.

Note que só faz sentido falar em continuidade de f em um ponto a no caso de esse ponto *pertencer ao seu domínio*, além da condição técnica exigida para tratarmos do limite da função no ponto. Além disso, se D é uma união (qualquer) de intervalos da reta, essa condição é satisfeita por todos os seus pontos. Isso ocorre nos casos de domínios de funções algébricas, trigonométricas e aquelas obtidas das operações usuais com funções desse tipo.

Exemplo Seja $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Como p é contínua em todos os pontos $a \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que p é uma função contínua.

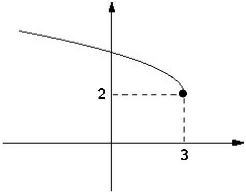
Exemplo Vimos que, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a.$$

As funções trigonométricas seno e cosseno são funções contínuas.

Funções Contínuas

Exemplo A função $f(x) = 2 + \sqrt{3 - x}$ é uma função contínua.
$\mathrm{Dom}(f) = D = (-\infty, 3]$.



Seja a um número menor do que 3. Então,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} 2 + \sqrt{3 - x} = 2 + \sqrt{3 - a} = f(a).$$

Para concluir que a função é contínua, devemos considerar o elemento $3 \in D$. Nesse caso, vamos fazer uso do limite lateral adequado.
Como

$$\lim_{x \to 3^-} 2 + \sqrt{3 - x} = 2 = f(3),$$

a função f é contínua em 3.

Propriedade da Permanência do Sinal

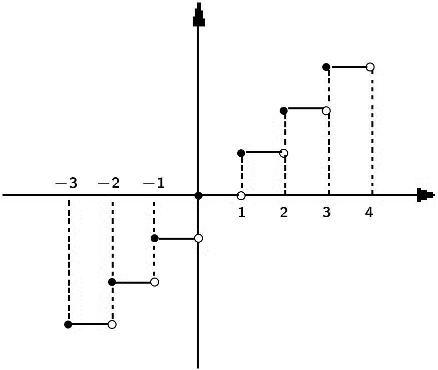
Proposição (Permanência do sinal) Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$. Suponha que f seja contínua em a e $f(a) > 0$. Então, existe um número $r > 0$ tal que,

$$\forall x \in (r - a, a + r) \cap D, \qquad f(x) > 0.$$

Observação: Essa propriedade garante, por exemplo, que ao estudarmos os sinais de uma função contínua, com zeros isolados, definida em um dado intervalo, só haja eventuais mudanças de sinais em torno desses pontos. Isso ocorre, por exemplo, no caso das funções polinomiais.

Exemplos de funções não contínuas

Exemplo Seja $f(x) = [x] = n$, na qual $n \leq x < n+1$, a função chamada *maior inteiro*. Isto é, $[x]$ é o maior inteiro que é menor ou igual a x.
Assim, $[-0.5] = -1$, $[2.1] = 2$, $[2.99] = 2$, $[3] = 3$, $[\sqrt{2}] = 1$ e $[\pi] = 3$.
Veja o gráfico de f:



Funções Contínuas

Afirmação: a função f é contínua em cada $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ e f *não* é contínua em cada $a \in \mathbb{Z}$.

Vamos considerar o caso dos números inteiros. Agora, os limites laterais serão diferentes, como o próprio gráfico da função indica. Seja n um número inteiro. Então, $f(n) = [n] = n$. Além disso, se $n - 1 < x < n$, então $f(x) = [x] = n - 1$. Portanto,

$$\lim_{x \to n^-} f(x) \ = \ n - 1.$$

Por outro lado, se $n \leq x < n + 1$, então $f(x) = n$. Assim,

$$\lim_{x \to n^+} f(x) \ = \ n.$$

Como os limites laterais são diferentes, f não admite limite no ponto n e, consequentemente, não é contínua nesse ponto.

Exemplos

Exemplo Cuidado especial deve ser dado àquelas funções cujas definições usam várias sentenças. A seguir, vamos determinar os valores de k para os quais

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{se} \quad x \leq 1, \\ k - x, & \text{se} \quad x > 1, \end{cases}$$

seja contínua em 1. É claro que isso também determinará os valores de k para os quais a função não é contínua em $x = 1$. Como $f(1) = 1^2 + 2 = 3$, basta que analisemos os limites laterais.

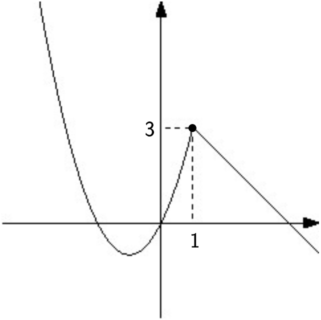
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 2x \; = \; 3\; f(3).$$

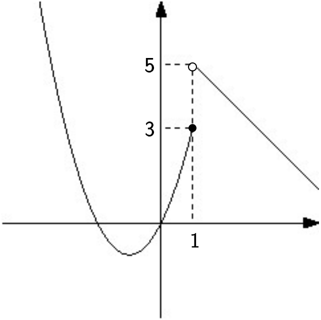
Agora,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} k - x \; = \; k - 1.$$

Portanto, para que f seja contínua em 1, é preciso que 3 seja igual a $k - 1$. Ou seja, f é contínua em 1 se, e somente se, $k = 4$.

Exemplos





Observe que $k = 4$ é a única possibilidade de f ser contínua em 1. Neste caso, o segmento de reta que é o gráfico de f à direita de 1 *continua* o trecho de parábola, gráfico de f à esquerda de 1. Qualquer outra escolha para a constante k implica numa *interrupção* do gráfico de f. Assim, $k = 6$ é apenas um exemplo em uma infinidade de possibilidades nas quais f não será contínua em 1.

Propriedades das Funções Contínuas

Proposição (Operações com funções contínuas) Sejam $f, g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ funções, $D \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $a \in D$, todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$. Se f e g são contínuas, então

i) $f + g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua;

ii) $f \cdot g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua;

iii) $\dfrac{f}{g} \colon D^* \longrightarrow \mathbb{R}$, em que $D^* = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, é contínua.

Observação: Essa propriedade garante, por exemplo, que ao estudarmos os sinais de uma função contínua, com zeros isolados, definida em um dado intervalo, só haja eventuais mudanças de sinais em torno desses pontos. Isso ocorre, por exemplo, no caso das funções polinomiais.

Composição e Continuidade

Proposição (Composição de funções contínuas) Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $b = f(a) \in E$ tal que todo intervalo aberto contendo b intersecta $E \setminus \{b\}$. Suponhamos também que $f(D) \subset E$, de modo que podemos considerar $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, a função composta. Se f é contínua em a e g é contínua em $b = f(a)$, então a composta $g \circ f$ é contínua em $a \in D$.

Exemplo Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos x$, ambas funções contínuas. Então, as funções compostas $f \circ g(x) = \cos^2 x$ e $g \circ f(x) = \cos x^2$ são contínuas.