

Eletromagnetismo I

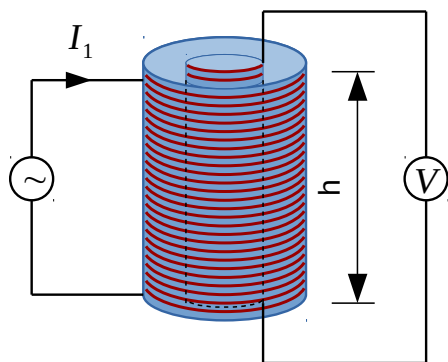
Prof. Raul Abramo - 2º Semestre 2015

Preparo: Gilson Ronchi

Aula 26

Indutância

Vamos considerar dois solenoides, um dentro do outro. Ao variarmos uma corrente passando por qualquer um desses solenoides, faremos com que o fluxo Φ no interior deles mude, o que induzirá uma força eletromotriz no outro solenoide.



Vista superior

$$\text{área } A_1, n_1 \frac{\text{espiras}}{\text{unidade de comp.}} = \frac{N_1}{h}$$

$$\text{área } A_2, n_2 \frac{\text{espiras}}{\text{unidade de comp.}} = \frac{N_2}{h}$$

Vejamos em detalhe. O fluxo no solenoide 2, devido a corrente I_1 no solenoide 1, será

$$\Phi_{2(1)} = N_2 \times A_2 \times \mu_0 \frac{N_1}{h} I_1$$

Ao variarmos I_1 , teremos uma força eletromotriz ε_2 gerada no circuito 2,

$$\varepsilon_2 = -\mu_0 A_2 \frac{N_1 N_2}{h} \frac{dI_1}{dt}$$

Dizemos que a variação da corrente no circuito 1 induziu uma força eletromotriz no circuito 2, e a constante de proporcionalidade é denominada de **indutância mútua**:

$$\varepsilon_2 = -M_{2(1)} \frac{dI_1}{dt}$$

onde $M_{2(1)}$ é a indutância mútua do circuito 1 sobre o circuito 2. No caso acima, teremos,

$$M_{2(1)} = \mu_0 A_1 \frac{N_1 N_2}{h}$$

Se invertermos a situação, podemos considerar que o circuito 2 induz uma força eletromotriz no circuito 1, e, nesse caso, o fluxo será

$$\Phi_{1(2)} = N_1 \times A_1 \times \mu_0 \frac{N_2}{h} I_2$$

e

$$\varepsilon_1 = -M_{1(2)} \frac{dI_2}{dt}$$

onde

$$M_{1(2)} = \mu_0 A_1 \frac{N_1 N_2}{h} = M_{2(1)}$$

Considere agora que os dois circuitos, 1 e 2, possuem o mesmo número de espiras ($N_1 = N_2 = N$), e a mesma área ($A_1 = A_2 = A$). Teremos

$$\varepsilon = -M \frac{dI}{dt}, \quad M = \mu_0 \frac{AN^2}{\ell}$$

De fato, podemos pensar que esses dois circuitos “idênticos” são unidos num só solenoide e o que isso implica é que o nosso solenoide possui uma **autoindutância** L , que constitui uma “resistência” à variação da corrente (e do fluxo) dentro do solenoide. No caso anterior, do solenoide, temos $L = \mu_0 \frac{AN^2}{\ell}$, mas no caso geral

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

Indutância: caso geral

O campo gerado por I_1 é, por Biot-Savart,

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^3} \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Em termos do potencial vetor:

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell}}{R}$$

Agora, o fluxo de $\vec{B}_1$ que passa pelo circuito 2 é

$$\Phi_{2(1)} = \int d\vec{S}_2 \cdot \vec{B}_1 = \int d\vec{S}_2 \cdot (\nabla \times \vec{A}_1) = \int d\vec{\ell}_2 \cdot \vec{A}_1$$

Portanto,

$$\Phi_{2(1)} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = M_{2(1)} I_1$$

Analogamente, se o circuito 2 possui uma corrente I_2 , o fluxo no circuito 1 será

$$\Phi_{1(2)} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = M_{1(2)} I_2$$

mas

$$\oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \oint_2 \oint_1 \frac{d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

e, portanto,

$$M_{2(1)} = M_{1(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

que chamada de **Fórmula de Neumann**, que demonstra que a indutância mútua, assim como a autoindutância, é uma quantidade puramente geométrica e independente da quantidade de corrente nos circuitos.

- A unidade de indutância é o *henry* (símbolo H): $1 \text{ henry} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 / \text{A} = \text{Wb/A}$.
- pode ser bem difícil calcular a indutância de sistemas. Por outro lado, é muito fácil medi-las!

Exemplo

Autoindutância de um laço circular de raio R

$$\hat{r} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \frac{R d\varphi_1 \hat{\varphi}(\varphi_1) \cdot R d\varphi_2 \hat{\varphi}(\varphi_2)}{\sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \frac{R^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{R\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}} \end{aligned}$$

Definindo

$$\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\psi_2 = \varphi_1 + \varphi_2$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 R}{4\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\psi_2}_{=2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi_1 \frac{\cos(\psi_1)}{\sqrt{1 - \cos(\psi_2)}} \\ &= \frac{\mu_0 R}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\psi_1)}{\sqrt{1 - \cos(\psi_2)}} \end{aligned}$$

O que está acontecendo? A indutância diverge? Quando $\psi_1 \rightarrow 0$ ou $\psi_1 \rightarrow 2\pi$, temos $\phi_1 = \phi_2$.

O problema aqui é que consideramos o fio (ou os cilindros) no caso do solenoide com infinitas voltas) infinitamente fino,

Se quisermos incluir a espessura do fio “rigorosamente”, chegaremos a uma integral elíptica! Porém, podemos obter o mesmo resultado, qualitativamente, se consideramos que em vez de termos $\psi_1 \rightarrow 0$, $\psi_1 \rightarrow 2\pi$, cortamos a integral em um certo $\delta\psi$:

$$\begin{aligned} L &\approx \frac{\mu_0 R}{4} \int_{\delta\psi}^{2\pi-\delta\psi} \frac{\cos(\psi_1)}{\sqrt{1-\cos(\psi_2)}} \\ &= \frac{\mu_0 R}{4} 2 \left[\frac{\sin \frac{\psi}{2}}{\sqrt{1-\cos \psi}} \left(2 \cos \frac{\psi}{2} + \ln \left(\tan \frac{\psi}{4} \right) \right) \right]_{\delta\psi}^{2\pi-\delta\psi} \end{aligned}$$

Energia do campo magnético

A potência elétrica num circuito com uma indutância L

$$\begin{aligned} P &= \frac{dW}{dt} = -\varepsilon I = LI \frac{dI}{dt} \\ &\rightarrow \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) \end{aligned}$$

Note que isso significa que não importa como (ou quão rápido) a corrente I se estabelece: um circuito com autoindutância L possui uma energia $W = \frac{LI^2}{2}$

Mas

$$LI = \Phi = \int d\vec{S} \cdot \vec{B} = \int d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \oint_C d\vec{\ell} \cdot \vec{A}$$

e

$$I \cdot LI = \oint_C (I d\vec{\ell}) \cdot \vec{A} = \int dV \vec{J} \cdot \vec{A}$$

Agora, usando que $\vec{J} = \nabla \times \vec{H}$, temos que

$$\begin{aligned} LI^2 &= \int dV (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{A} \\ &= \int dV [\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A})] \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \int dV \vec{H} \cdot \vec{B} - \frac{1}{2} \oint d\vec{S} \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) \\ &= \frac{1}{2} \int dV \vec{H} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

De modo que as densidades volumétricas de energia:

$$\left. \begin{aligned} w_B &= \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \\ w_E &= \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \end{aligned} \right\} \quad w_{EM} = \frac{1}{2} [\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{D} \cdot \vec{E}]$$