

CAPÍTULO V – DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

- Definição de Densidade espectral de potência.
- Propriedades.
- Exemplos.
- Transformações de processos estocásticos (sistemas contínuos).
- Sistemas lineares e espectro de potência.
- Ruído impulsivo; ruído branco e ruído térmico.
- **Processos gaussianos em sistemas lineares.**
- **Densidade espectral de potência de tempo discreto.**
- **Amostragem.**
- **Sistemas lineares discretos.**
- **Estimação espectral;**

Processos gaussianos em sistemas lineares

- Um processo estocástico é denominado gaussiano se as variáveis aleatórias $\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)$ são conjuntamente gaussianas para qualquer n e quaisquer t_1, \dots, t_n . Dois processos $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ são conjuntamente gaussianos se as variáveis aleatórias $\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n), \mathbf{y}(t'_1), \dots, \mathbf{y}(t'_m)$ são conjuntamente gaussianas para quaisquer m e n e quaisquer $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m$.

- A função densidade de probabilidade de ordem n , dada por

$$f_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n),$$

de um processo gaussiano é completamente determinada em termos de sua média e matriz de covariância.

- Ou seja, um processo aleatório gaussiano estará completamente caracterizado se sua média $m_{\mathbf{x}}(t)$ e sua função de autocorrelação $R_{\mathbf{x}}(t_1, t_2)$ forem determinados.

Processos gaussianos em sistemas lineares

- Admitiremos, agora, que o processo $\mathbf{x}(t)$ é estacionário com média zero (por simplicidade) e autocorrelação $R(\tau)$. Como $E\{\mathbf{x}^2(t)\}=R(0)$, então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R(0)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2R(0)}\right)$$

- As variáveis $\mathbf{x}(t+\tau)$ e $\mathbf{x}(t)$ são conjuntamente gaussianas, e seu coeficiente de correlação é dado por

$$r = \frac{\sigma_{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)}}{\sigma_{\mathbf{x}(t)}\sigma_{\mathbf{x}(t+\tau)}} = \frac{E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau)\}}{\sqrt{E\{\mathbf{x}^2(t)\}E\{\mathbf{x}^2(t+\tau)\}}} = \frac{R(\tau)}{R(0)}$$

- Assim, sua densidade conjunta é dada por

$$f(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{R^2(0) - R^2(\tau)}} \exp\left(-\frac{R(0)x_1^2 - 2R(\tau)x_1x_2 + R(0)x_2^2}{2[R^2(0) - R^2(\tau)]}\right)$$

Processos gaussianos em sistemas lineares

- Se um processo $\mathbf{x}(t)$ gaussiano for aplicado na entrada de um sistema linear com resposta impulsiva $h(t)$, obteremos como resposta

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

que também é um processo gaussiano, pois ele é a combinação linear das variáveis aleatórias $\mathbf{x}(t)$ que são conjuntamente gaussianas

- Pode-se demonstrar, também, que se $\mathbf{y}_1(t)$ e $\mathbf{y}_2(t)$ são as saídas de dois sistemas lineares tendo como respectivas entradas $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$, dois processos conjuntamente gaussianos, então $\mathbf{y}_1(t)$ e $\mathbf{y}_2(t)$ são também conjuntamente gaussianos.
- Segue-se, portanto, que $\mathbf{x}'(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$, onde $\mathbf{x}(t)$ é um processo gaussiano, é também um processo gaussiano e, além disso, $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{x}'(t)$ são conjuntamente gaussianos.

Processos gaussianos em sistemas lineares

- Exemplo: ruído térmico
 - O ruído térmico é um processo aleatório gaussiano. Se $\mathbf{n}(t)$ é a tensão de ruído gerada por um resistor, então

$$R_n(\tau) = \frac{N}{2} \delta(\tau)$$

ou seja, $\mathbf{n}(t_1)$ e $\mathbf{n}(t_2)$ são ortogonais para $t_1 \neq t_2$, e como eles são gaussianos e com média zero, então eles são independentes.

- Dessa forma vemos que, no ruído branco gaussiano, duas amostras tomadas em instantes de tempo diferentes são sempre independentes, não importando quão próximas elas estejam.

Processos gaussianos em sistemas lineares

- Voltando ao nosso processo $y(t)$ na saída do sistema $h(t)$, temos que

$$m_y(t) = m_x(t) * h(t) \quad \text{e} \quad R_y(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) * h(t_1) * h(t_2)$$

- Se $x(t)$ for estacionário, então

$$m_y = m_x H(0) \quad \text{e} \quad R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

- Vemos, então, que:
 - as estatísticas da saída de um sistema linear, tendo como entrada um processo aleatório gaussiano, podem ser facilmente determinadas;
 - se o processo gaussiano $x(t)$ for estacionário, então $y(t)$ também o será;
 - se um dado sistema é não linear, então sua saída $y(t)$ não será um processo aleatório gaussiano. Neste caso, as estatísticas de $y(t)$ serão determinadas como visto anteriormente.

Densidade espectral de potência de tempo discreto

- Dado um processo de tempo discreto $\mathbf{x}(n)$, com função de autocorrelação $R_x(m)$, define-se a densidade espectral de potência de tempo discreto desse processo como sendo

$$S_x(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) e^{-j 2\pi f m T}$$

- onde o período T está relacionado com o período de amostragem, no caso de se amostrar um processo de tempo contínuo, podendo ser considerado unitário quando não houver essa correspondência. Note que essa função é periódica com período $1/T$.
- A função de autocorrelação pode ser obtida a partir da transformada inversa dessa função, ou seja

$$R_x(m) = T \int_{-1/2T}^{1/2T} S_x(f) e^{j 2\pi f m T} df$$

Densidade espectral de potência de tempo discreto

- Pode-se definir, também, a densidade espectral de potência em termos da transformada Z da função de autocorrelação, ou seja,

$$S_x(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m) z^{-m}$$

- Note que

$$S_x(f) = S_x(e^{j 2\pi f T})$$

e o termo espectro de potência será usado para nos referirmos a ambas funções.

Exemplo

- Seja

$$R_x(m) = a^{|m|} \quad |a| < 1$$

- Temos, então, que

$$\begin{aligned} S_x(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a^{|m|} z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{-1} a^{-m} z^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} a^m z^{-m} = \frac{a z}{1 - a z} + \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \\ &= \frac{a^{-1} - a}{(a^{-1} + a) - (z^{-1} + z)} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$S_x(f) = \frac{a^{-1} - a}{(a^{-1} + a) - 2 \cos(2 \pi f T)}$$

Amostragem

- Seja $\mathbf{x}_c(t)$ um processo aleatório de tempo contínuo, com autocorrelação $R_c(\tau)$ e densidade espectral de potência $S_c(f)$. Vamos amostrar esse processo nos instantes de tempo nT , formando, então, o processo de tempo discreto $\mathbf{x}(n) = \mathbf{x}_c(nT)$, para um período T arbitrário.
- Sendo $R(m)$ e $S(f)$ a função de autocorrelação e a densidade espectral de potência desse novo processo, vamos determinar a relação entre essas funções e as correspondentes de tempo contínuo.
- Inicialmente, para a autocorrelação, temos

$$R(m) = E\{\mathbf{x}(n+m)\mathbf{x}(n)\} = E\{\mathbf{x}_c(nT+mT)\mathbf{x}_c(nT)\} = R_c(mT)$$

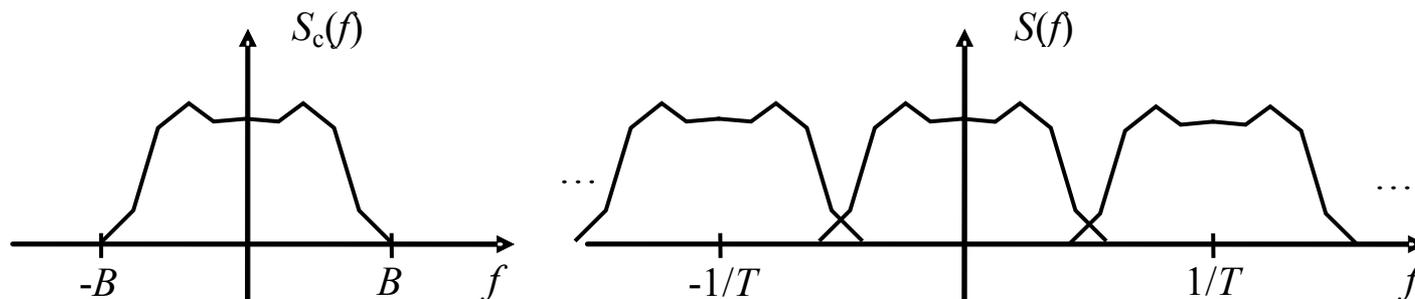
ou seja, a função de autocorrelação do processo amostrado é igual à função de autocorrelação do processo contínuo, amostrada.

Amostragem

- Já para a densidade espectral de potência, teremos

$$\begin{aligned} S(f) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) e^{-j 2\pi f m T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_c(mT) e^{-j 2\pi f m T} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\alpha) e^{j 2\pi \alpha m T} d\alpha e^{-j 2\pi f m T} = \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\alpha) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j 2\pi(\alpha-f)mT} d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\alpha) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\alpha - f - \frac{n}{T}\right) d\alpha = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_c\left(f - \frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

- Essa expressão pode ser melhor interpretada através da figura abaixo:



Amostragem

- Vemos que, ao se fazer a amostragem, a densidade espectral de potência torna-se periódica pela repetição da densidade de tempo contínua em frequências múltiplas de $1/T$.
- Assim, se a banda do processo contínuo for B , e a amostragem for feita a uma taxa $1/T > 2B$, a densidade espectral do processo amostrado, entre $-1/2T$ e $1/2T$, será idêntica à do processo contínuo (a menos de um fator de escala).
- Porém, se a taxa de amostragem for menor, haverá sobreposição de componentes espectrais, fenômeno esse conhecido por “aliasing”.

Sistemas Lineares Discretos

- Os conceitos vistos anteriormente para sistemas contínuos valem, mutatis mutandis, para sistemas discretos.
- Assim, dado um sistema linear e invariante a deslocamento, com resposta impulsiva $h(n)$, e correspondente transformada

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

temos que sua resposta, ao se aplicar em sua entrada o processo $\mathbf{x}(n)$ será dada pela convolução discreta entre $\mathbf{x}(n)$ e $h(n)$, ou seja,

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{x}(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(n-k) h(k)$$

Sistemas Lineares Discretos

- Dessa expressão segue que

$$m_y = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = m_x \mathbf{H}(1) = m_x H(0)$$

$$R_{xy}(m) = R_x(m) * h^*(-m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(m-k) h^*(-k)$$

$$R_{yx}(m) = R_x(m) * h(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(m-k) h(k)$$

$$R_y(m) = R_x(m) * h(m) * h^*(-m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} R_x(m-k-p) h^*(-p) h(k)$$

e

$$S_{xy}(f) = S_x(f) \mathbf{H}^*(e^{j 2\pi f T})$$

$$S_y(f) = S_{xy}(f) \mathbf{H}(e^{j 2\pi f T})$$

$$S_y(f) = S_x(f) \left| \mathbf{H}(e^{j 2\pi f T}) \right|^2$$

processos
reais
⇒

$$\mathbf{S}_y(z) = \mathbf{S}_x(z) \mathbf{H}(z) \mathbf{H}(z^{-1})$$

Estimação espectral

- Trataremos, agora, do problema de se estimar a densidade espectral de potência de um processo estocástico, estacionário e ergódico (pelo menos no sentido amplo), a partir de um segmento de uma de suas funções amostras.
- Consideraremos o caso de processos de tempo contínuo para a estimação por processos clássicos (que pode ser estendida por analogia para processos de tempo discreto) e o caso de processos de tempo discreto para a estimação paramétrica (a densidade espectral de um processo de tempo contínuo amostrado acima da taxa de Nyquist é igual à do processo de tempo contínuo não amostrado).

Estimação espectral clássica

- Dado um segmento de uma amostra do processo $\mathbf{x}(t)$, conhecida entre os instantes $-T$ e T , vamos estimar a densidade espectral de potência desse processo a partir dessa amostra.
- Seja dado o seguinte estimador para a função de autocorrelação desse processo:

$$\hat{\mathbf{R}}(\tau) = \frac{1}{2T - |\tau|} \int_{-T + |\tau|/2}^{T - |\tau|/2} \mathbf{x}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \mathbf{x}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt$$

- Temos que:

$$E\{\hat{\mathbf{R}}(\tau)\} = \frac{1}{2T - |\tau|} \int_{-T + |\tau|/2}^{T - |\tau|/2} E\left\{\mathbf{x}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \mathbf{x}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\} dt = R(\tau), \quad \text{para } |\tau| < 2T$$

Estimação espectral clássica

- Portanto esse estimador é não viciado.
- Para a sua variância temos:

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{\mathbf{R}}(t)}^2 &= E\left\{|\hat{\mathbf{R}}(\tau) - R(\tau)|^2\right\} = E\left\{|\hat{\mathbf{R}}(\tau)|^2 - 2\hat{\mathbf{R}}(\tau)R(\tau) + |R(\tau)|^2\right\} = \\ &= E\left\{|\hat{\mathbf{R}}(\tau)|^2\right\} - |R(\tau)|^2\end{aligned}$$

com

$$E\left\{|\hat{\mathbf{R}}(\tau)|^2\right\} = \frac{1}{(2T - |\tau|)^2} \int_{-T+|\tau|/2}^{T-|\tau|/2} \int_{-T+|\tau|/2}^{T-|\tau|/2} E\left\{\mathbf{x}\left(t_1 + \frac{\tau}{2}\right) \mathbf{x}\left(t_1 - \frac{\tau}{2}\right) \mathbf{x}\left(t_2 + \frac{\tau}{2}\right) \mathbf{x}\left(t_2 - \frac{\tau}{2}\right)\right\} dt_1 dt_2.$$

Estimação espectral clássica

- A média anterior envolve o conhecimento de estatísticas de quarta ordem para ser calculada, porém pode ser demonstrado que, no caso de processos gaussianos, se a função de autocorrelação for de energia finita e para um valor de τ fixo (muito menor que T),

$$\sigma_{\hat{R}(\tau)}^2 \leq \frac{\int_{-2T}^{2T} R^2(\alpha) d\alpha}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

ou seja, esse estimador é um estimador consistente.

- Note, porém, que para $\tau \rightarrow 2T$, a variância acima não tende a zero:

$$\lim_{\tau \rightarrow 2T} \sigma_{\hat{R}(\tau)}^2 \simeq R^2(0)$$

Estimação espectral clássica

- Para se obter um estimador para a densidade espectral de potência poder-se-ia pensar em, simplesmente, tomar a transformada do estimador anterior,

$$\hat{S}_1(f) = \int_{-2T}^{2T} \hat{R}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

- Porém esse estimador é claramente viciado,

$$E\{\hat{S}_1(f)\} = \int_{-2T}^{2T} E\{\hat{R}(\tau)\} e^{-j2\pi f \tau} d\tau = S(f) * 4T \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{4T}\right)$$

e, ainda pior, não é nem consistente pois como a variância de $\hat{R}(\tau)$ é grande para τ tendendo a $2T$, a variância de $\hat{S}_1(f)$ será grande para qualquer f .

Estimação espectral clássica

- Para minimizar-se esse problema pode-se multiplicar $\hat{\mathbf{R}}(\tau)$ por uma janela de forma a minimizar-se o peso de seus valores próximos a suas pontas.
- Usando-se, por exemplo, uma janela triangular obteremos um novo estimador

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}_P(f) &= \int_{-2T}^{2T} \hat{\mathbf{R}}(\tau) \Lambda\left(\frac{\tau}{2T}\right) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-2T}^{2T} \frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|/2}^{T-|\tau|/2} \mathbf{x}(t+\tau/2) \mathbf{x}(t-\tau/2) dt e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \\ &= \int_{-2T}^{2T} \frac{1}{2T} \mathbf{x}_T(\tau) * \mathbf{x}_T(-\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \frac{1}{2T} |\mathbf{X}_T(f)|^2\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{x}_T(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_T(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T}^T \mathbf{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Estimação espectral clássica

- Esse estimador é denominado periodograma, e note que ele é sempre positivo (como se espera que a densidade espectral de potência real seja).
- A média desse estimador é,

$$\begin{aligned} E\{\hat{S}_P(f)\} &= \int_{-2T}^{2T} E\{\hat{\mathbf{R}}(\tau)\} \Lambda\left(\frac{\tau}{2T}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \Lambda\left(\frac{\tau}{2T}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= S(f) * 2T \operatorname{sinc}^2(2Tf) \end{aligned}$$

e ele é, portanto, viciado.

- Note, porém, que o vício decresce quanto T cresce, pois o $\operatorname{sinc}^2()$ tende a um impulso de Dirac.
- Quanto à sua variância, pode ser demonstrado que

$$\sigma_{\hat{S}_P(f)}^2 \approx \{S(f)\}^2$$

ou seja, ele também não é um estimador consistente.

Estimação espectral clássica

- Para fazer essa variância decrescer podemos adotar o procedimento de Bartlett, ou seja, dividiremos o processo amostrado, em k sub-amostras

$$\mathbf{x}_{T_M}^i(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t) & -T + 2(i-1)T_M < t \leq -T + 2i T_M; \quad i=1, \dots, k; \quad T_M = \frac{T}{k} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

calculamos o periodograma de cada uma delas e, então, tomamos sua média aritmética:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_B(f) &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{2T_M} |\mathbf{X}_{T_M}^{(i)}(f)|^2 \\ E\{\hat{\mathbf{S}}_B(f)\} &= S(f) * 2T_M \text{sinc}(2T_M f) \\ \sigma_{\hat{\mathbf{S}}_B(f)}^2 &= \frac{\sigma_{\hat{\mathbf{S}}_P(f)}^2}{k} \approx \frac{S^2(f)}{k} \end{aligned}$$

Estimação espectral clássica

- Note que ao se aumentar o valor de k , para T mantido constante, diminui-se a variância do estimador mas perde-se, em contrapartida, resolução espectral.
- Um outro procedimento equivalente a esse, seria o de se multiplicar o estimador da autocorrelação por uma janela triangular de extensão T_M , e então tomar-se sua transformada de Fourier, o que sugere que outras janelas (de extensão T_M mas com outros formatos) possam ser igualmente utilizadas para esse fim.
- Perceba, no entanto, que, janelas cuja transformada de Fourier não seja real e positiva para todas as frequências, podem dar origem a uma densidade espectral de potência estimada que pode assumir valores negativos em algumas frequências

Estimação espectral paramétrica

- Vamos considerar, agora, processos de tempo discreto, ergódicos pelo menos no sentido amplo. Vamos admitir, como hipótese, que o processo seja Markov- p , ou seja

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{k=1}^p a_k \mathbf{x}(n-k) + \mathbf{w}(n)$$

onde $\mathbf{w}(n)$ é um processo ruído branco discreto com média nula e potência σ_w^2 .

- Como visto anteriormente, aumentando-se a ordem p do modelo acima ele se aproxima do comportamento do processo real, pois, em geral, há uma maior dependência entre as amostras mais próximas do que entre as mais distantes.
- Vamos, inicialmente, obter uma estimativa do valor do processo no instante n como combinação linear das p amostras anteriores.
- Então vamos mostrar que os coeficientes dessa estimativa correspondem aos coeficientes a_k da expressão anterior, e aí calcularemos a expressão da densidade espectral de potência em função desses coeficientes.

Estimação espectral paramétrica

- Seja
$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \sum_{k=1}^p b_k \mathbf{x}(n-k)$$
 um estimador linear do valor do processo no instante n , a partir de suas amostras anteriores (preditor linear).
- Vamos determinar os coeficientes b_k que tornam mínimo o erro quadrático médio

$$\varepsilon^2 = E\{|\hat{\mathbf{x}}(n) - \mathbf{x}(n)|^2\}$$

- Para isso, vamos igualar a zero a derivada de ε^2 em relação a b_j , $j=1, \dots, p$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial b_j} &= E\left\{\frac{\partial [(\hat{\mathbf{x}}(n) - \mathbf{x}(n))^2]}{\partial b_j}\right\} = E\{2(\hat{\mathbf{x}}(n) - \mathbf{x}(n)) \mathbf{x}(n-j)\} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^p b_k E\{\mathbf{x}(n-k) \mathbf{x}(n-j)\} - 2 E\{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}(n-j)\} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^p b_k R_x(k-j) - 2 R_x(j) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^p b_k R_x(k-j) = R_x(j) \end{aligned}$$

Estimação espectral paramétrica

- ou seja,

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \cdots & R_x(p-1) \\ R_x(-1) & R_x(0) & \cdots & R_x(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(1-p) & R_x(2-p) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x(1) \\ R_x(2) \\ \vdots \\ R_x(p) \end{bmatrix}$$

- A equação matricial acima nos fornece os coeficientes b_k que melhor estimam o processo $\mathbf{x}(n)$ a partir de suas p últimas amostras:

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \sum_{k=1}^p b_k \mathbf{x}(n-k)$$

Estimação espectral paramétrica

- Vamos mostrar agora que se $\mathbf{x}(n)$ for Markov- p então $b_k = a_k$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= E \left\{ \left| \sum_{k=1}^p b_k \mathbf{x}(n-k) - \sum_{k=1}^p a_k \mathbf{x}(n-k) - \mathbf{w}(n) \right|^2 \right\} = \\ &= E \left\{ \left| \sum_{k=1}^p (b_k - a_k) \mathbf{x}(n-k) \right|^2 - \sum_{k=1}^p (b_k - a_k) \mathbf{x}(n-k) \mathbf{w}^*(n) - \sum_{k=1}^p (b_k - a_k)^* \mathbf{x}^*(n-k) \mathbf{w}(n) + |\mathbf{w}(n)|^2 \right\} = \\ &= E \left\{ \left| \sum_{k=1}^p (b_k - a_k) \mathbf{x}(n-k) \right|^2 \right\} - E \left\{ \sum_{k=1}^p (b_k - a_k) \mathbf{x}(n-k) \mathbf{w}^*(n) \right\} - \\ &\quad - E \left\{ \sum_{k=1}^p (b_k - a_k)^* \mathbf{x}^*(n-k) \mathbf{w}(n) \right\} + E \left\{ |\mathbf{w}(n)|^2 \right\} = \\ &= E \left\{ \left| \sum_{k=1}^p (b_k - a_k) \mathbf{x}(n-k) \right|^2 \right\} + E \left\{ |\mathbf{w}(n)|^2 \right\}\end{aligned}$$

já que $\mathbf{x}(n-k)$ e $\mathbf{w}(n)$ são não correlacionados para $k > 0$.

Estimação espectral paramétrica

- Vemos assim que ε^2 será mínimo quando $b_k = a_k$.
- Sendo o processo Markov- p , uma vez obtidos os parâmetros a_k , podemos determinar a função de transferência entre a entrada, $\mathbf{w}(n)$, e a saída, $\mathbf{x}(n)$, como:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n) &= \sum_{k=1}^p a_k \mathbf{x}(n-k) + \mathbf{w}(n) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{X}(f) &= \sum_{k=1}^p a_k \mathbf{X}(f) e^{-j2\pi f kT} + \mathbf{W}(f) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\mathbf{X}(f)}{\mathbf{W}(f)} &= \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^p a_k e^{-j2\pi f kT}} = H(f)\end{aligned}$$

Estimação espectral paramétrica

- Portanto, a densidade espectral de potência, de tempo discreto, pode ser obtida por

$$S_{\mathbf{x}}(f) = S_{\mathbf{w}}(f) |H(f)|^2 = \frac{\sigma_w^2}{\left| 1 - \sum_{k=1}^p a_k e^{-j2\pi f kT} \right|^2}$$

- No caso específico de se estimar a densidade espectral de potência a partir de uma função amostra do processo $\mathbf{x}(n)$ para $n=1,2,\dots,N$, tem-se o seguinte procedimento:
 - Estima-se a função de autocorrelação como:

$$\hat{\mathbf{R}}_x(m) = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=\max(1, 1-m)}^{\min(N, N-m)} \mathbf{x}(n+m) \mathbf{x}^*(n)$$

Estimação espectral paramétrica

- Estima-se os coeficientes da série Markov- p :

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_x(0) & \hat{\mathbf{R}}_x(1) & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_x(p-1) \\ \hat{\mathbf{R}}_x(-1) & \hat{\mathbf{R}}_x(0) & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_x(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{R}}_x(1-p) & \hat{\mathbf{R}}_x(2-p) & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_x(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_x(1) \\ \hat{\mathbf{R}}_x(2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{R}}_x(p) \end{bmatrix}$$

- Estima-se a potência do ruído branco:

$$\hat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N |\hat{\mathbf{w}}(n)|^2, \quad \hat{\mathbf{w}}(n) = \mathbf{x}(n) - \sum_{k=1}^p \hat{\mathbf{a}}_k \mathbf{x}(n-k)$$

Estimação espectral paramétrica

- Constrói-se a expressão final da estimativa da D.E.P. do processo:

$$\hat{S}_x(f) = \frac{\hat{\sigma}_w^2}{\left| 1 - \sum_{k=1}^p \hat{\mathbf{a}}_k e^{-j2\pi f k T} \right|^2}$$

- Note que essa é a estimativa da densidade espectral de potência de tempo discreto do processo $\mathbf{x}(n)$, que está relacionada com a densidade espectral de potência do respectivo processo de tempo contínuo $\mathbf{x}_c(t)$ pela expressão:

$$S(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_c\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

CAPÍTULO VI – TÓPICOS ESPECIAIS

- **Processos passa-baixas.**
- **Processos passa-faixa.**
- Decomposições ortogonais: processos periódicos, não periódicos e Kahrunen-Loève.
- Filtro ótimo (Wiener-Hopf) não causal.
- Filtro ótimo causal.

Processos passa-baixas

- Dizemos que um processo é passa-baixas se seu espectro $S(f)$ é nulo para $|f| > f_c$.
- *Teorema da amostragem*
 - Como $S(f) = 0$ para $|f| > f_c$ temos que sua função de autocorrelação pode ser amostrada a uma taxa igual a $2f_c$ e, assim, $R(\tau)$ pode ser escrita como:

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(nT) \operatorname{sinc}(2f_c \tau - n), \quad T = \frac{1}{2f_c}$$

- ou, de forma mais geral,

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(nT - a) \operatorname{sinc}(2f_c (\tau + a) - n), \quad T = \frac{1}{2f_c}$$

Processos passa-baixas

- *Teorema:* se $\mathbf{x}(t)$ é um processo aleatório passa-baixas, então,

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(nT) \cdot \text{sinc}(2f_c t - n)$$

- **Prova:**

Vamos mostrar que

$$E\left\{|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)|^2\right\} = 0$$

com

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(nT) \cdot \text{sinc}(2f_c t - n)$$

Processos passa-baixas

- Inicialmente calculamos a seguinte média:

$$\begin{aligned} E\{[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)]\mathbf{x}(mT)\} &= R(t - mT) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(nT - mT) \operatorname{sinc}(2f_c t - n) = \\ &= R(t - mT) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(kT) \operatorname{sinc}(2f_c t - k - m) = \\ &= R(t - mT) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(kT) \operatorname{sinc}(2f_c (t - mT) - k) = R(t - mT) - R(t - mT) = 0 \end{aligned}$$

- Portanto, $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ é ortogonal a $\mathbf{x}(mT)$ para qualquer m , o que implica que $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ é ortogonal a $\hat{\mathbf{x}}(t)$ pois este é uma combinação linear das variáveis aleatórias $\mathbf{x}(mT)$.

Processos passa-baixas

- Assim,

$$E\{[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] \hat{\mathbf{x}}(t)\} = 0$$

- Além disso,

$$\begin{aligned} E\{[\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] \mathbf{x}(t)\} &= R(0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(nT - t) \operatorname{sinc}(2f_c t - n) = \\ &= R(0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(nT - t) \operatorname{sinc}[2f_c(0 + t) - n] = R(0) - R(0) = 0 \end{aligned}$$

- Assim,

$$E\{|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)|^2\} = 0$$

e o teorema está provado.

Processos passa-baixas ideal

- Dizemos que um processo é passa-baixas ideal se

$$S(f) = \begin{cases} S_0 & |f| < f_c \\ 0 & |f| > f_c \end{cases}$$

e sua autocorrelação é, então, dada por

$$R(\tau) = 2 f_c S_0 \operatorname{sinc}(2 f_c \tau)$$

- Com $T=1/2f_c$ observa-se que $R(nT) = 0$ para $n \neq 0$, ou seja

$$E \{ \mathbf{x}(t+nT) \mathbf{x}(t+mT) \} = R((n-m)T) = 0, \quad n \neq m$$

o que implica que as variáveis aleatórias $\mathbf{x}(nT)$ são ortogonais entre si.

Processos passa-baixas ideal

- O inverso também é verdadeiro, ou seja, se um processo é passa baixas e as variáveis aleatórias $\dots, \mathbf{x}[(n-1)T], \mathbf{x}[nT], \mathbf{x}[(n+1)T], \dots$ são ortogonais entre si, então o processo é um processo passa baixas ideal.

Estimativa da variação

- Considere um processo passa-baixas $\mathbf{x}(t)$ com autocorrelação $R_x(\tau)$ e densidade espectral de potência $S_x(f)$. Vamos mostrar que, se $S_x(f)=0$ para $|f| > f_c$, então

$$E\left\{\left[\mathbf{x}(t+\tau)-\mathbf{x}(t)\right]^2\right\}\leq 4\pi^2 f_c^2 \tau^2 E\left\{\mathbf{x}(t)^2\right\}$$

e como

$$E\left\{\left[\mathbf{x}(t+\tau)-\mathbf{x}(t)\right]^2\right\}=2\left[R(0)-R(\tau)\right]$$

isso equivale a

$$R(0)-R(\tau)\leq 2\pi^2 f_c^2 \tau^2 R(0)$$

Estimativa da variação

- **Prova:**

- Como $|\operatorname{sen} \varphi| \leq |\varphi|$, concluímos que

$$1 - \cos(\omega \tau) = 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \leq \frac{\omega^2 \tau^2}{2}$$

- Então,

$$\begin{aligned} R(0) - R(\tau) &= \int_{-f_c}^{f_c} S(f) [1 - \cos(2\pi f \tau)] df \leq \int_{-f_c}^{f_c} S(f) \frac{4\pi^2 f^2 \tau^2}{2} df \leq \\ &\leq 2\pi^2 f_c^2 \tau^2 \int_{-f_c}^{f_c} S(f) df = 2\pi^2 f_c^2 \tau^2 R(0) \end{aligned}$$

Estimativa da variação

- **Comentários:**

- *Vemos que se $\tau \ll 1/f_c$ então a variação quadrática média de $\mathbf{x}(t)$ num intervalo de duração τ é muito menor que a potência média de $\mathbf{x}(t)$ e, usando-se a desigualdade de Tchebychev:*

$$P\{|\mathbf{x} - \eta| \geq k \sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$$

temos que

$$P\{|\mathbf{x}(t+\tau) - \mathbf{x}(t)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\{|\mathbf{x}(t+\tau) - \mathbf{x}(t)|^2\}}{\varepsilon^2} \leq \frac{4\pi^2 f_c^2 \tau^2 E\{\mathbf{x}^2(t)\}}{\varepsilon^2}$$

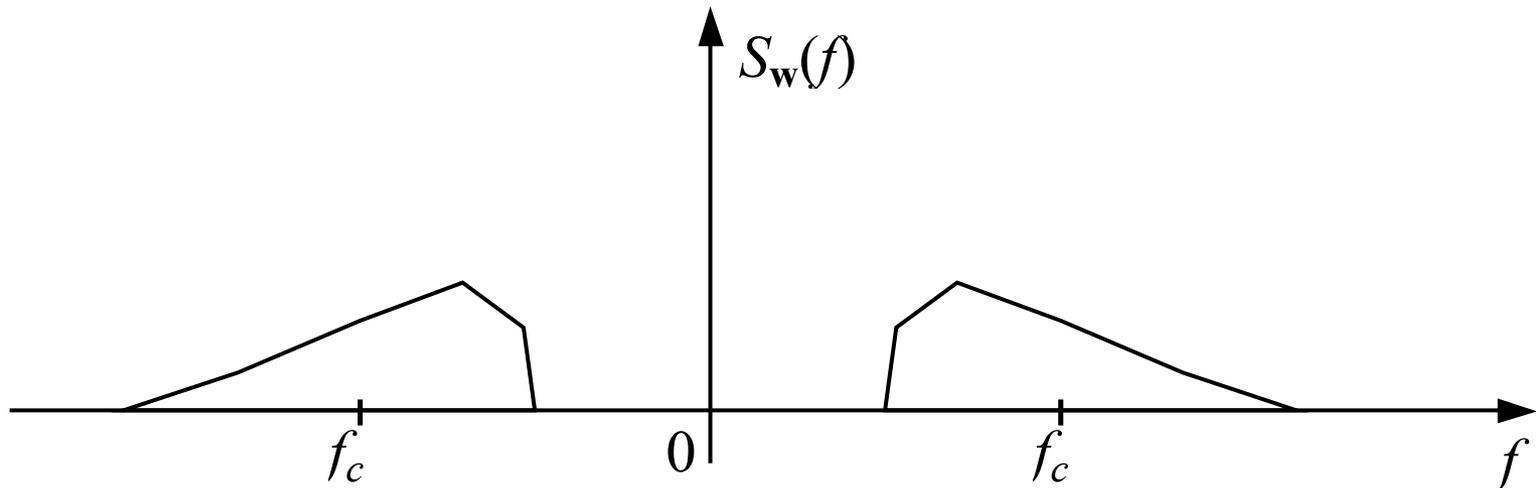
ou seja, a probabilidade da diferença entre $\mathbf{x}(t+\tau)$ e $\mathbf{x}(t)$ exceder, em módulo, um valor ε é desprezível para τ suficientemente pequeno.

Processos Passa-Faixa

- Um sinal é denominado passa-faixa se sua densidade espectral de potência for não nula apenas numa determinada faixa do espectro de frequências.
- Uma forma de se obter sinais passa-faixa é multiplicar-se um sinal passa-baixas (sinal com densidade espectral de potência nula acima de uma determinada frequência) por uma senóide (modulação). Esse processo irá transladar o espectro do sinal, da frequência zero para a frequência da senóide.
- Outra maneira de se obter sinais passa-faixa é aplicar-se um sinal na entrada de um sistema linear passa-faixa.
- Um sistema passa-faixas é um sistema que tem resposta, $H(f)$, nula para frequências fora de uma determinada faixa de frequências.

Processos Passa-Faixa

- De forma análoga, se a densidade espectral de potência de um processo é confinada a uma determinada faixa de frequências, o processo é denominado processo aleatório passa-faixa:



Processos Passa-Faixa

- Da mesma forma que um sinal passa-faixa pode ser representado em termos de componentes em quadratura, podemos expressar um processo passa-faixa $w(t)$ em termos de componentes em quadratura como:

$$w(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) + y(t) \sin(2\pi f_c t)$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são processos passa-baixas conjuntamente estacionários com

$$S_x(f) = S_y(f) = S_w^+(f + f_c) + S_w^-(f - f_c)$$
$$S_{yx}(f) = j[S_w^+(f + f_c) - S_w^-(f - f_c)]$$

Processos Passa-Faixa

- Sendo

$$S_w^+(f) = \begin{cases} S_w(f) & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad S_w^-(f) = \begin{cases} 0 & f > 0 \\ S_w(f) & f < 0 \end{cases} \Rightarrow S_w(f) = S_w^+(f) + S_w^-(f)$$

- É fácil ver que se $S_w^+(f)$ for simétrica em relação a f_c , então $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ serão ortogonais.
- **Prova:**

Seja

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{w}(t) \cos \omega_c t + \tilde{\mathbf{w}}(t) \sin \omega_c t$$

$$\mathbf{y}(t) = -\tilde{\mathbf{w}}(t) \cos \omega_c t + \mathbf{w}(t) \sin \omega_c t$$

onde o “til” representa a transformada de Hilbert:

$$\tilde{\mathbf{w}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{w}(\alpha)}{t - \alpha} d\alpha = \mathbf{w}(t) * h(t), \quad h(t) = \frac{1}{\pi t} \Rightarrow H(f) = \begin{cases} -j & f > 0 \\ j & f < 0 \end{cases}$$

Processos Passa-Faixa

- Note que

$$\tilde{\mathbf{w}}(t) = -\mathbf{w}(t) \quad \text{pois } H(f)H(f) = -1$$

$$R_{\tilde{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{w}}}(\tau) = R_{\mathbf{w}}(\tau) * h(\tau) = \tilde{R}_{\mathbf{w}}(\tau) \Rightarrow S_{\tilde{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{w}}}(f) = jS_{\mathbf{w}}^-(f) - jS_{\mathbf{w}}^+(f)$$

$$R_{\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}}(\tau) = R_{\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w}}(-\tau) = -\tilde{R}_{\mathbf{w}}(\tau)$$

$$R_{\tilde{\mathbf{w}}}(\tau) = R_{\mathbf{w}}(\tau)$$

- Temos assim que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) \cos \omega_c t + \mathbf{y}(t) \sen \omega_c t &= \mathbf{w}(t) \\ -\mathbf{y}(t) \cos \omega_c t + \mathbf{x}(t) \sen \omega_c t &= \tilde{\mathbf{w}}(t) \end{aligned}$$

Processos Passa-Faixa

- A prova será, então, dividida em 3 partes:
- **Parte 1:** $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ são conjuntamente estacionários no sentido amplo:
 - Calculemos suas médias:

$$E\{\mathbf{x}(t)\} = E\{\mathbf{w}(t)\} \cos \omega_c t + E\{\tilde{\mathbf{w}}(t)\} \sin \omega_c t = 0$$

$$E\{\mathbf{y}(t)\} = -E\{\tilde{\mathbf{w}}(t)\} \cos \omega_c t + E\{\mathbf{w}(t)\} \sin \omega_c t = 0$$

- E suas correlações:

$$R_{\mathbf{x}}(t + \tau, t) = E\{\mathbf{x}(t + \tau) \mathbf{x}^*(t)\}$$

$$R_{\mathbf{y}}(t + \tau, t) = E\{\mathbf{y}(t + \tau) \mathbf{y}^*(t)\}$$

$$R_{\mathbf{y}\mathbf{x}}(t + \tau, t) = E\{\mathbf{y}(t + \tau) \mathbf{x}^*(t)\}$$

Processos Passa-Faixa

- Para $\mathbf{x}(t)$ temos:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}}(t + \tau, t) &= E\{\mathbf{x}(t + \tau)\mathbf{x}^*(t)\} = \\ &= E\{\mathbf{w}(t + \tau)\mathbf{w}^*(t)\} \cos \omega_c(t + \tau) \cos \omega_c(t) + \\ &+ E\{\tilde{\mathbf{w}}(t + \tau)\tilde{\mathbf{w}}^*(t)\} \sin \omega_c(t + \tau) \sin \omega_c(t) + \\ &+ E\{\mathbf{w}(t + \tau)\tilde{\mathbf{w}}^*(t)\} \cos \omega_c(t + \tau) \sin \omega_c(t) + \\ &+ E\{\tilde{\mathbf{w}}(t + \tau)\mathbf{w}^*(t)\} \sin \omega_c(t + \tau) \cos \omega_c(t) = \\ &= \frac{R_{\mathbf{w}}(\tau)}{2} [\cos \omega_c(\tau) + \cos \omega_c(2t + \tau)] + \frac{R_{\tilde{\mathbf{w}}}(\tau)}{2} [\cos \omega_c(\tau) - \cos \omega_c(2t + \tau)] + \\ &+ \frac{R_{\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}}(\tau)}{2} [-\sin \omega_c(\tau) + \sin \omega_c(2t + \tau)] + \frac{R_{\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w}}(\tau)}{2} [\sin \omega_c(\tau) + \sin \omega_c(2t + \tau)] = \\ &= R_{\mathbf{w}}(\tau) \cos \omega_c(\tau) + R_{\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w}}(\tau) \sin \omega_c(\tau) \end{aligned}$$

Processos Passa-Faixa

- e, analogamente,

$$R_y(t + \tau, t) = E\{y(t + \tau)y^*(t)\} = R_w(\tau) \cos \omega_c(\tau) + R_{\tilde{w}w}(\tau) \sin \omega_c(\tau)$$

$$R_{yx}(t + \tau, t) = E\{y(t + \tau)x^*(t)\} = R_w(\tau) \sin \omega_c(\tau) - R_{\tilde{w}w}(\tau) \cos \omega_c(\tau)$$

- Ou seja, os processos $x(t)$ e $y(t)$ são conjuntamente estacionários no sentido amplo.

Processos Passa-Faixa

- **Parte 2:** Densidades espectrais de potência:
 - A partir das expressões anteriores para as correlações, temos:

$$S_x(f) = \frac{1}{2}[S_w(f - f_c) + S_w(f + f_c)] + \frac{1}{2j}[S_{\tilde{w}w}(f - f_c) - S_{\tilde{w}w}(f + f_c)] =$$

$$= \frac{1}{2}[S_w^+(f - f_c) + S_w^-(f - f_c) + S_w^+(f + f_c) + S_w^-(f + f_c)] +$$

$$+ \frac{1}{2j}[-jS_w^+(f - f_c) + jS_w^-(f - f_c) + jS_w^+(f + f_c) - jS_w^-(f + f_c)] =$$

$$= S_w^+(f + f_c) + S_w^-(f - f_c) = S_y(f)$$

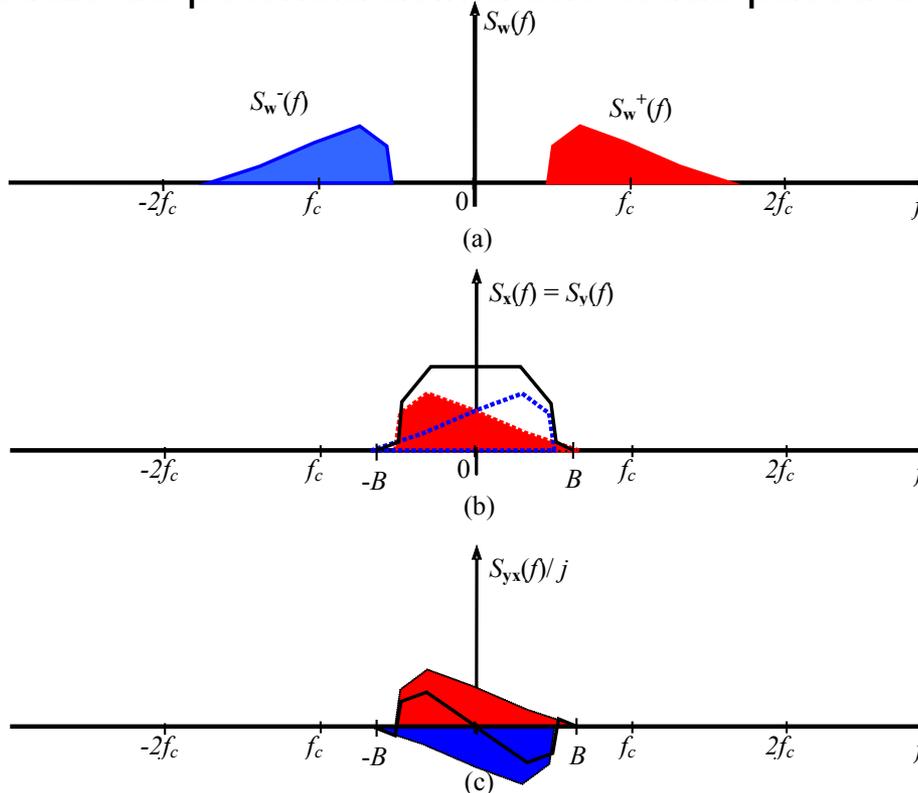
$$S_{yx}(f) = \frac{1}{2j}[S_w^+(f - f_c) + S_w^-(f - f_c) - S_w^+(f + f_c) - S_w^-(f + f_c)] +$$

$$- \frac{1}{2}[-jS_w^+(f - f_c) + jS_w^-(f - f_c) - jS_w^+(f + f_c) + jS_w^-(f + f_c)] =$$

$$= j[S_w^+(f + f_c) - S_w^-(f - f_c)]$$

Processos Passa-Faixa

- **Parte 3:** eles são passa-baixas:
 - Como S_w^+ e S_w^- só têm componentes espectrais próximos às frequências $+f_c$ e $-f_c$ respectivamente, então as densidades espectrais de potência acima são todas passa-baixas:



Processos Passa-Faixa

- Podemos ver também, pela figura, que as áreas sob as densidades $S_w(f)$, $S_x(f)$ e $S_y(f)$ são iguais. Portanto, segue-se que

$$\overline{\mathbf{x}^2(t)} = \overline{\mathbf{y}^2(t)} = \overline{\mathbf{w}^2(t)}$$

- Assim, as potências, ou valores quadráticos médios, de $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ são idênticas à de $\mathbf{w}(t)$. Pode ser mostrado, também, que

$$\overline{\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t)} = R_{xy}(0) = 0$$

ou seja, as amplitudes de \mathbf{x} e \mathbf{y} , em qualquer instante de tempo, são não correlacionadas.

- Também, pela demonstração apresentada, fica claro que a escolha da frequência da portadora é totalmente arbitrária, resultando, para diferentes valores de f_c , diferentes processos $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ (inclusive com bandas diferentes).

Processos passa-faixa gaussianos

- Considere a passagem de um processo gaussiano por um filtro passa-faixa. O processo obtido em sua saída será também gaussiano e passa-faixa. Sendo $w(t)$ esse processo, podemos escrever

$$w(t) = x(t) \cos(2 \pi f_c t) + y(t) \sin(2 \pi f_c t)$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são dois processos (também gaussianos). Como visto anteriormente, as variáveis aleatórias $x(t)$ e $y(t)$ são não correlacionadas, sendo também gaussianas, elas são, portanto, independentes, tendo mesma variância.

- Sendo

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad \text{e} \quad \tan[\theta(t)] = \frac{y(t)}{x(t)}$$

tem-se $w(t) = A(t) \cos(2 \pi f_c t - \theta(t))$

Processos passa-faixa gaussianos

- Vemos então que, pelo que foi visto anteriormente, para um dado instante t as variáveis aleatórias $\mathbf{A}(t)$ (envoltória do processo aleatório passa-faixa) e $\theta(t)$ são independentes, sendo que $\theta(t)$ é uniformemente distribuída no intervalo $(-\pi, \pi)$ e $\mathbf{A}(t)$ tem distribuição de Rayleigh,

$$f_{\mathbf{A}}(a) = \frac{a}{R(0)} \exp\left(-\frac{a^2}{2R(0)}\right) \quad a \geq 0$$

- sendo

$$E\{\mathbf{A}(t)\} = \sqrt{\frac{\pi R(0)}{2}} \quad \text{e} \quad \sigma_A^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)R(0)$$

Sinal senoidal somado a ruído branco gaussiano

- Interpretando-se o sinal $w(t)$ como ruído, soma-se a ele um sinal senoidal $S \cos \omega_c t$, obtendo-se então

$$z(t) = [x(t) + S] \cos(2\pi f_c t) + y(t) \sin(2\pi f_c t) = e(t) \cos(2\pi f_c t - \varphi(t))$$

com

$$e(t) = \sqrt{[x(t) + S]^2 + y^2(t)} \quad \text{e} \quad \tan[\varphi(t)] = \frac{y(t)}{x(t) + S}$$

- Temos então que

$$f_{e\varphi}(e, \varphi) = \frac{e}{2\pi\sigma_w^2} \exp\left\{-\left[\frac{(e \cos \varphi - S)^2 + (e \sin \varphi)^2}{2\sigma_w^2}\right]\right\}; \quad e > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

onde $\sigma_w^2 = R_w(0)$.

Sinal senoidal somado a ruído branco gaussiano

- Vemos que, neste caso, e e φ não são independentes, e tem densidades marginais dadas por

$$f_e(e) = \frac{e}{\sigma_w^2} \exp\left\{-\left[(e^2 + S^2)/2\sigma_w^2\right]\right\} I_0\left[\frac{eS}{\sigma_w^2}\right] u(e)$$

(densidade de Rice) e

$$f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-S^2/2\sigma_w^2\right] \cdot \left\{1 + \frac{S\sqrt{2\pi}}{\sigma_w} \cos\varphi \exp\left[-S^2 \cos^2\varphi/2\sigma_w^2\right] \left[1 - Q\left(\frac{S \cos\varphi}{\sigma_w}\right)\right]\right\}$$

Nessas expressões, $I_0(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de ordem 0.

Sinal senoidal somado a ruído branco gaussiano

- Densidade de Rice para diferentes valores de $a=S/\sigma_w$.

