CAPÍTULO 7

ESTIMAÇÃO DE MODELOS ARIMA

INTRODUÇÃO

Após a identificação do modelo provisório, o próximo passo é estimar seus parâmetros. Consideremos um modelo $ARIMA\,(p, d, q)$ e coloquemos seus $p + q + 1$ parâmetros em $\xi = (\phi, \theta, \sigma_a^2)$, onde $\phi = \left(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p\right), \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$. Vamos supor quando $d > 0, \mu_\omega = 0$. Caso contrário, μ será incluído como mais um parâmetro a ser estimado e teremos $p + q + 2$ parâmetros.

Seja $\eta = (\phi, \theta)$.

Dadas as N observações $Z_1, \dots, Z_n$, o método de MV considera a função de verossimilhança $L(\xi | Z_1, \dots, Z_n)$ como uma função de ξ. Os EMV de ξ serão os valores que maximizam $L\ ou\ l(= \log L)$.

Inicialmente, vamos supor que $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$. Nessas condições, os EMV serão aproximadamente EMQ.

Se tomarmos d diferenças para tornar a série estacionária obteremos $n = N - d$ observações $W_1, \dots, W_n$, onde $W_t = \Delta^d Z_t$. Podemos escrever o modelo resultante, estacionário e invertível, como:

$$a_t = \widetilde{W}_t - \phi_1 \widetilde{W}_{t-1} - \cdots - \phi_p \widetilde{W}_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \cdots + \theta_q a_{t-q} \quad (1)$$

onde $\widetilde{W}_t = W_t - \mu_\omega$.

MÉTODO DOS MOMENTOS (MM)

Este método consiste em substituir, nas equações que relacionam as autocorrelações (ou autocovariâncias) e os parâmetros do modelo, os momentos teóricos pelos correspondentes momentos amostrais e resolver as equações resultantes.

A. MODELO AR($\boldsymbol{p}$)

Lembrando que $\mu = \frac{\theta_0}{1-\phi_1-\phi_2-\cdots-\phi_p}$, obtemos:

$$\hat{\theta}_{0_{MM}} = \bar{W}(1 - \hat{\phi}_{1_{MM}} - \cdots - \hat{\phi}_{p_{MM}})$$

Lembrando que: $(eq.YW)$

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}$$

E considerando:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{r}_1 & \cdots & \mathrm{r}_{p-1} \\ \mathrm{r}_1 & 1 & \cdots & \mathrm{r}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{r}_{p-1} & \mathrm{r}_{p-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{1_{MM}} \\ \hat{\phi}_{2_{MM}} \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{\rho_{MM}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{r}_p \end{bmatrix}$$

$$R_p . \hat{\phi}_{MM} = \mathrm{r}_p$$

$$\rightarrow \hat{\phi}_{MM} = R_p^{-1} . \mathrm{r}_p$$

Lembrando que: $Var(Z_t) = \gamma_0 = \sigma_Z^2 = \frac{\delta^2 a}{1-\phi_1\rho_1-\cdots-\phi_\rho\rho_0}$

Então:

$$\sigma_{MM}^2 \quad = c_0\left[1 - \mathrm{r}_p' \hat{\phi}_{MM}\right] = c_0[1 - \mathrm{r}_p' R_p^{-1} \mathrm{r}_p]$$

Para o caso particular em que $p = 1$, temos:

$$\begin{cases} \hat{\phi}_{MM} = \mathrm{r}_1 \\ \hat{\theta}_{0MM} = \bar{W}(1 - \hat{\phi}_{MM}) \\ \sigma^2_{MM} = c_0(1 - \mathrm{r}_1^2) \end{cases}$$

B. MODELO MA(q)

Lembrando que:

$$r_j = \begin{cases} \dfrac{-\theta_j + \theta_1\theta_{j+1}\theta_2\theta_{j+2} + \cdots + \theta_{q-j}\theta_q}{1 + \theta_1^2\theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2}, j = 1,2, \ldots, q \\ 0 \quad , j > q \end{cases}$$

Os estimadores dos MM de θ são obtidos pelas equações:

$$\mathrm{r}_j = \frac{\hat{\theta}_{j,MM} + \hat{\theta}_{1,MM}\hat{\theta}_{j+1,MM} + \hat{\theta}_{2,MM}\hat{\theta}_{j+2,MM} + \cdots + \hat{\theta}_{q-j,MM}\hat{\theta}_{q,MM}}{1 + \hat{\theta}^2_{1,MM} + \hat{\theta}^2_{2,MM} + \cdots + \hat{\theta}^2_{q,MM}}$$

Para $j = 1,2, \ldots, q$

$$\sigma^2_{MM} = \frac{c_0}{1 + \hat{\theta}^2_{1,MM} + \cdots + \hat{\theta}^2_{q,MM}}$$

Para $q = 1$ temos:

$$\mathrm{r}_1 = -\frac{\hat{\theta}_{MM}}{1 + \hat{\theta}^2{}_{MM}} \; e \; \hat{\sigma}^2_{MM} = \frac{c_0}{1 + \hat{\theta}^2{}_{MM}}$$

Com solução dada por:

$$\hat{\theta}_{MM} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mathrm{r}_1}[1 - (1 - 4\mathrm{r}_1^2)]^{\frac{1}{2}}, & 0 < |\mathrm{r}_1| < 0{,}5 \\ -1, & \mathrm{r}_1 < -0{,}5 \\ 1, & \mathrm{r}_1 > 0{,}5 \\ 0, & \mathrm{r}_1 = 0 \end{cases}$$

C. MODELO ARMA (p, q)

Os estimadores de θ e ϕ pelo MM são obtidos em duas etapas:

i. obtemos o estimador de $\boldsymbol{\phi}$ resolvendo:

$$\mathrm{r}_j = \hat{\phi}_{1,MM}.\mathrm{r}_{j-1} + \cdots + \hat{\phi}_{p,MM} + \mathrm{r}_{j-p}, \qquad j = q+1, \dots, q+p$$

ii. obtemos o estimador de $\boldsymbol{\theta}$ resolvendo:

$$\gamma_j = \phi\gamma_{j-1} + \cdots + \phi_p\gamma_{j-p} + \gamma_{za}(j) - \theta_1\gamma_{za}(j-1) - \cdots - \theta_q\gamma_{za}(j-q)$$

E utilizando as autocorrelações amostrais e os estimadores de ϕ obtidos no passo anterior.

No caso em que $p = q = 1$, temos:

$$\begin{cases} \mathrm{r}_2 = \hat{\phi}_{MM}.\mathrm{r}_1 \\ \mathrm{r}_1 = \dfrac{(1-\hat{\phi}_{MM}\hat{\theta}_{MM})(\hat{\phi}_{MM}-\hat{\theta}_{MM})}{1+\hat{\theta}^2{}_{MM} - 2\hat{\phi}_{MM}\hat{\theta}_{MM}} \end{cases}$$

MÉTODO DE MV

Na expressão:

$$a_t = \widetilde{W}_t - \phi_1\widetilde{W}_{t-1} - \cdots - \phi_p\widetilde{W}_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \cdots + \theta_q a_{t-q}$$

Para calcular os $a_t's$ é necessário obter os valores iniciais para os $\widetilde{W}'s$ e para os $a's$. Os valores iniciais podem ser resolvidos por meio de dois procedimentos:

i) Procedimento Condicional

Neste procedimento, os valores iniciais desconhecidos são substituídos por valores que supomos serem razoáveis.

Sob a suposição de normalidade de a_t, temos que a função densidade conjunta de $a_1, \dots, a_n$ será dada por:

$$f(a_1, \dots, a_n) = [\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}}]^n exp.\{-\sum_{t=1}^{n} \frac{a_t^2}{2\sigma_a^2}\}$$

Para calcular $a_1, \dots, a_n$ vamos supor que existam p valores de W_t e q valores de a_t, denotados por W_t^* e a_t^*.

A função de verossimilhança condicional é dada por:

$$L(\xi|W, W^*, a^*)$$

$$= (2\pi)^{\frac{-n}{2}}.(\sigma_a)^{-n}.\exp\{-\frac{1}{2\sigma_a^2}\sum(\widetilde{W}_t - \phi_1\widetilde{W}_{t-1} - \dots - \phi_p\widetilde{W}_{t-p}$$

$$+ \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q})^2\}$$

Tomando o log:

$$l(\xi|W, W^*, a^*)\alpha - n\log\sigma_a - \frac{S(\eta|W, W^*, a^*)}{2\sigma_a^2}$$

Onde: $S(\eta|W, W^*, a^*) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2(\eta|W, W^*, a^*)$, chamada de <u>"soma de quadrados condicional"</u>(SQ).

Segue que maximizar $l(\xi|W, W^*, a^*) = l^*(\xi)$ é equivalente a minimizar $S(\eta|W, W^*, a^*) = S^*(\eta)$ e estimadores de MV serão estimadores de MQ;

As escolhas dos valores de W^* e a^* podem ser feita de duas maneiras:

i) Fazer os elementos desses valores iguais as suas esperanças, $E(a_t)$ e $E(W_t)$. Se $E(W_t) \neq 0$ cada elemento de W^* é substituído por $\overline{W}$;

ii) No entanto, se alguma raiz de $\phi(B) = 0$ estiver próxima do círculo unitário, i) pode não ser adequado, nesse caso, podemos utilizar (1) para calcular $a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots$,colocando os valores anteriores de a_t iguais a zero.

$$a_{p+1} = \widetilde{W}_{p+1} - \phi_1 \widetilde{W}_p - \cdots - \phi_p \widetilde{W}_1 - \theta_1 a_p + \cdots + \theta_q a_{p-q+1}$$

Exemplo: ARIMA(0,1,1)

Supondo $\theta = 0{,}8$, então podemos escrever:

$$a_t = W_t + 0{,}8 a_{t-1}$$

Sejam:

t	Z_t	$W_t = \Delta^{Z_t}$	$a_t = W_t + 0{,}8a_{t-1}$
0	150	-	0
1	147	-3	-3
2	143	-4	-6,4
3	148	5	-0,12
4	153	5	4,9
5	149	-4	-0,08
6	155	6	5,9
7	162	7	11,7
8	170	8	17,4
9	172	2	15,9

Assim: $a_1 = W_1 + 0{,}8a_0,\ a_0 = 0\ e\ Z_0 = 150$

$$a_1 = -3 + 0{,}8.0 = -3$$

$$a_2 = -4 + 0{,}8(-3) = -6{,}4$$

$$a_3 = 5 + 0{,}8(-6{,}4) = -0{,}12$$

.

.

.

$a_9 = 2 + 0{,}8.17{,}4 = 15{,}9$

A soma condicional fica: $S^*(0{,}8) = \sum_{t=1}^{q} a_t^2(0{,}8|a_0 = 0) = 801{,}26$

Calculamos $S^*(\theta)$ para diversos valores de θ no intervalo (-1,1) e escolhemos o parâmetro que minimiza seu valor.

OBS: Procedimento não condicional (pg.184)

VARIÂNCIA DOS ESTIMADORES

Seja $\eta = (\phi, \theta)$, de ordem $kx1$, onde $k = p + q$. A distribuição assintótica para $n \to \infty$ pode ser escrita como:

$\hat{\eta} \to N_k(\eta, V)$

Onde

$$V = 2\sigma_a^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial \eta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial \eta_1 \partial \eta_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial \eta_k \partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial {\eta^2}_k} \end{bmatrix}$$

Substituindo σ_a^2 em V por $\hat{\sigma}_a^2 = \frac{S(\eta)}{n}$ e calculando as derivadas $\frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial \eta_i \partial \eta_j}$ numericamente, obteremos estimativas das variâncias dos estimadores e covariâncias entre estimadores.

Em seguida podemos obter os IC para os parâmetros $\eta_i, i = 1, \ldots, k$.

Modelo	Variância
AR(1)	$Var(\hat{\phi}) \simeq \frac{1-\phi^2}{n}$
AR(2)	$Var(\hat{\phi}_1) = Var(\hat{\phi}_2) \simeq \frac{1-\phi_2^2}{n}$
MA(1)	$Var(\hat{\theta}) \simeq \frac{1-\theta^2}{n}$
MA(2)	$Var(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_2) \simeq \frac{1-\theta_2^2}{n}$
ARMA(1,1)	$Var(\hat{\phi}) \simeq \frac{(1-\phi^2)(1-\phi\theta)^2}{n(\phi-\theta)^2}$
	$Var(\hat{\theta}) \simeq \frac{(1-\theta^2)(1-\phi\theta)^2}{n(\phi-\theta)^2}$

Aplicações →R