Eletromagnetismo I

Prof. Raul Abramo - 2° Semestre 2015

Preparo: Gilson Ronchi

Aula 25

Nesta aula veremos:

- Energia do campo magnético
- Difusão magnética
- A "pele" dos materiais.

Energia do campo magnético

A lei de Faraday nos diz que

$$\varepsilon = \oint_C d\vec{\ell} \cdot \vec{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \Phi = \int_{S(C)} d\vec{S} \cdot \vec{B}$$

Ou sejam ao alterarmos o fluxo num dado caminho, geramos uma força eletromotriz e consequentemente, uma corrente. Mas essa força eletromotriz realiza um trabalho sobre as cargas do circuito. De fato:

$$\left(I d\vec{\ell}\right) \cdot \vec{E} = \left(dq\vec{v}\right) \cdot \vec{E} = \underbrace{\left(dq\vec{E}\right)}_{d\vec{F}} \cdot \vec{v}$$

Ou seja, o trabalho gasto para manter a corrente I constante deve compensar o trabalho de ε, portanto,

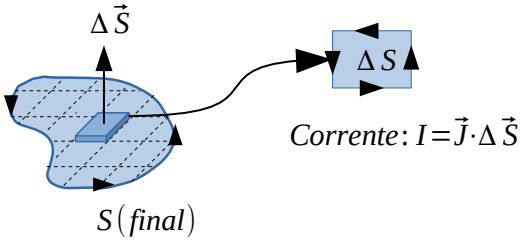
$$\delta W = \left(-I d\vec{\ell} \cdot \vec{E}\right) dt$$

Para o circuito completo,

$$\frac{dW}{dt} = -I \oint_C d\vec{\ell} \cdot \vec{E} = I \frac{d\Phi}{dt}$$

ou seja, o trabalho realizado pela força eletromotriz induzida quando o fluxo magnético muda por $\delta\Phi$ é

$$\begin{aligned} \delta W &= I\delta\Phi = \int I d\vec{S} \cdot \delta\vec{B} = \int I d\vec{S} \cdot \left(\nabla \times \delta\vec{A}\right) \\ &= \oint I d\vec{\ell} \cdot \vec{A} \end{aligned}$$



$$\delta W = \int d^3x \vec{J}\cdot\delta\vec{A}$$

Mas agora podemos invocar a lei de Ampère, que, num meio material qualquer, nos diz que

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \delta W &= \int dV \delta\vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right) \\
&= \int dV \left\{\vec{H}\cdot\left(\nabla\times\delta\vec{A}\right) + \nabla\cdot\left(\vec{H}\times\delta\vec{A}\right)\right\} \\
&= \int dV \vec{H}\cdot\delta\vec{B} + \oint_{S(fora)} d\vec{S}\cdot\cancel{\left(\vec{H}\times\delta\vec{A}\right)}
\end{aligned}$$

Agora, se supusermos que os campos $\vec{H}$ e $\vec{B}$ guardam alguma <u>proporcionalidade</u>

$$\delta\left(\vec{H}\cdot\vec{B}\right) = \delta\vec{H}\cdot\vec{B} + \vec{H}\cdot\delta\vec{B} = 2\vec{H}\cdot\delta\vec{B}$$

e

$$\delta W = \delta\int dV \frac{\vec{H}\cdot\vec{B}}{2}$$

então

$$\boxed{W_B = \frac{1}{2}\int dV \vec{H}\cdot\vec{B}}$$

e, de fato

$$\boxed{W_{total} = \frac{1}{2}\int dV \left[\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right]}$$

Difusão magnética

Vamos supor que um campo magnético varia de modo suave, de tal modo que os campos elétricos induzidos não são muito fortes – nem variam muito rápido. Além disso, vamos supor que as correntes geradas são proporcionais ao campo elétrico induzido, segundo a Lei de Ohm:

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}}$$

Então temos

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad \leftrightarrow \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Assim temos,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} &= \mu\sigma\vec{E} \\
\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) &= \mu\sigma\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \\
\nabla \cdot \left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} &= -\mu\sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
\therefore \quad & \boxed{\nabla^2 \vec{A} = \mu\sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}
\end{aligned}$$

que é a **equação de difusão magnética**.

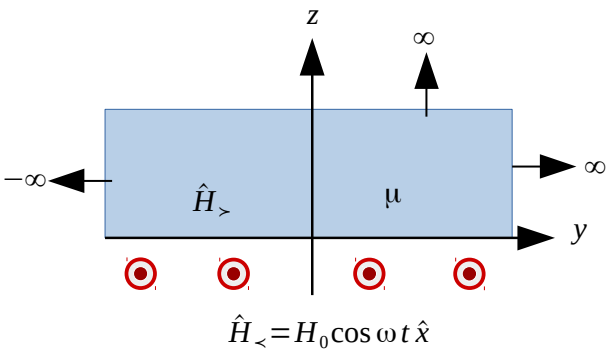
Essa equação nos diz que, num meio material com μ e σ, o campo magnético (representado pelo potencial vetor), assim como o campo elétrico, e a densidade de corrente, vão se "difundindo" pelo meio. Para um objeto de tamanho L

$$\nabla^2 \vec{A} \sim \frac{\vec{A}}{L^2}$$

e, nesse caso, os campos tardam um tempo $\tau \sim L^2\mu\sigma$ para penetrar totalmente no objeto, ou para deixá-lo, caso os campos externos sejam desligados.

Exemplo

Suponha um meio material que com permeabilidade μ e condutância σ preenchendo todo espaço em $z \geq 0$, e que haja um campo magnético com a forma $\vec{H}_< = H_0 \cos\omega t \hat{x}$ para $z < 0$. Qual é o campo dentro desse material?



Condições de contorno

$$
\begin{aligned}
\Delta \vec{H}_{\parallel} &= \vec{K} \times \hat{n} \\
\Delta B_{\perp}\left(z \to 0^{+}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Por simplicidade vamos escrever

$$\vec{H}_{<} = H_0 e^{i\omega t} \hat{x}$$

(e, ao final, tomamos a parte real da solução).

Em $z > 0$, $\vec{H}_{>}$ obedece a mesma equação que $\vec{A}$:

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Vamos tomar como *ansatz:*

$$
\begin{aligned}
\vec{H}_{>} &= h(z)\, e^{i\omega t} \hat{x} \\
&\to \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(h(z)\, e^{i\omega t}\right) = \mu\sigma\,(i\omega)\, h(z)\, e^{i\omega t} \\
&\to \frac{\partial^2}{\partial z^2} h = i\omega\mu\sigma h \\
&\to h(z) = h_{+} e^{+kz} + h_{-} e^{-kz}
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
k &\equiv \left(i\omega\mu\sigma\right)^{1/2} = \left(e^{i\pi/2} i\omega\mu\sigma\right) \\
&= e^{i\pi/4}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+i}{2}\sqrt{\omega\mu\sigma}
\end{aligned}
$$

É claro que apenas a exponencial com $-z$ faz sentido físico. Assim, usando $\delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$, temos

$$
\begin{aligned}
h(z) &= h_{-} \exp\left[-(1+i)\frac{z}{\delta}\right] \\
\therefore \vec{H} &= h_{-} \exp\left[-(1+i)\frac{z}{\delta}\right] e^{i\omega t} \hat{x}
\end{aligned}
$$

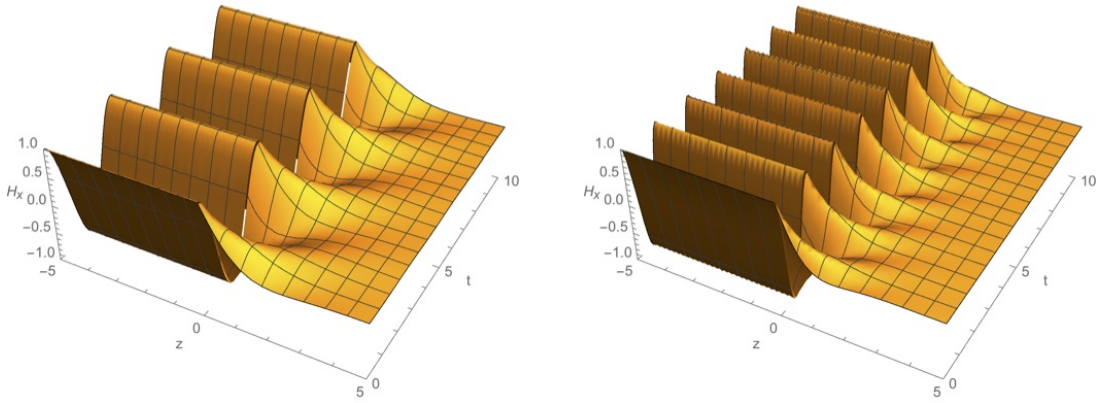
Por continuidade em $t = 0$ (quando $\vec{H}_{<}$ é aproximadamente constante), temos

$$\vec{H}_{>}(t,z) = H_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \hat{x}$$

Tomando a parte real, temos

$$\boxed{\vec{H}_{>}(t,z) = H_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)\, \hat{x}}$$

O campo $\vec{H}$ penetra no material até uma profundidade efetiva δ chamada de "skin depth" (espessura da pele do material).



Campo magnético $H_x(t,z)$ para dois valores de ω.

<u>Exercícios</u>: Mostre que o campo elétrico induzido é dado por

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{\mu\omega\delta}{\sqrt{2}} H_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)\,\hat{y} \\
\vec{J} &= \sigma \vec{E} \\
\vec{K}_y &= \int_0^\infty dz J_y(z,t) = -H_0 \cos\omega t
\end{aligned}$$

e a potência

$$P = \langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \mu\omega H_0^2 e^{-2z/\delta}$$