Eletromagnetismo I

Prof. Raul Abramo - 2° Semestre 2015

Preparo: Gilson Ronchi

Aula 20

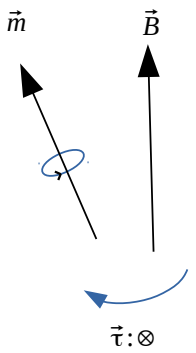
Nessa aula veremos:

- Campos magnéticos na matéria
- O campo $\vec{H}$
- Condições de contorno

Dipolos:

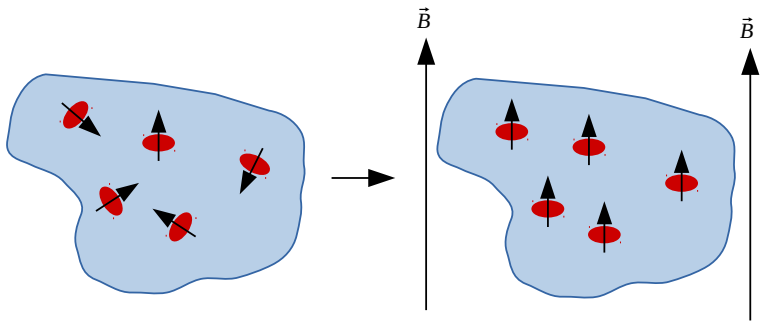
Dipolos magnéticos tendem a se alinhar com o campo magnético externo $\vec{B}$ (assim como os dipolos elétricos que se alinham com $\vec{E}$), pois o campo magnético gera um torque sobre o dipolo:

$$\tau = \vec{m} \times \vec{B}$$



Materiais magnéticos

No caso de matérias magnéticos, os momentos dos dipolos intrínsecos do materiais tendem a se alinhar (ou contra-alinhar) com o campo magnético aplicado.



Como essa "magnetização" do meio altera o campo magnético dentro e fora do material?

Em um dipolo temos

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

Então, a magnetização de um meio é:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \quad \rightarrow \quad \vec{A}_M(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\vec{M}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Vamos agora usar as mesmas ferramentas que usamos no caso de materiais dielétricos:

$$\nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \nabla\times(f\vec{F}) = f\nabla\times\vec{F} + (\nabla f)\times\vec{F}$$

Então

$$\begin{aligned}
\vec{A}_M(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\nabla'\times\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\nabla'\times\left[\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\nabla'\times\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \frac{\mu_0}{4\pi}\oint d\vec{S}'\times\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}
\end{aligned}$$

Que é quase a mesma expressão para o potencial vetor gerado por densidade de corrente:

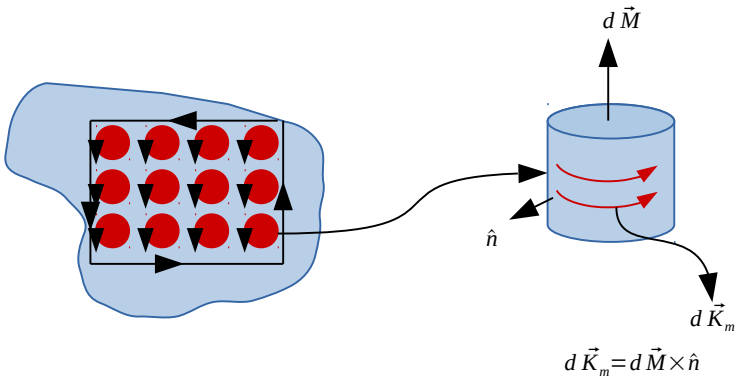
$$\begin{aligned}
\vec{J}_M &\equiv \nabla\times\vec{M} \\
\vec{K}_M &\equiv \vec{M}\times\hat{n}
\end{aligned}$$

então

$$\vec{A}_M(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\vec{J}_M(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint d\vec{S}'\times\frac{\vec{K}_M(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

A interpretação dessa "densidade de corrente de magnetização" $\vec{J}_M$ e dessa "corrente superficial de magnetização" $\vec{K}_M$ são muito parecidas com as que fazemos no caso de materiais dielétricos, e as "cargas de polarização" e "densidade superficial de cargas de polarização".

Macroscopicamente temos



Quando as microcorrentes não se cancelam exatamente dentro do meio, então há uma denis-

dade de corrente associadda: $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$. Note que $\nabla \cdot \vec{J}_M = 0$.

O campo $\vec{H}$

Suponha que temos uma certa configuração na qual existem correntes "genuínas" (ou "livres") e um meio magnetizável. A discussão acima nos mostra que o potencial vetor pode ser escrito em termos de

$$\vec{J} = \vec{J}_\ell + \vec{J}_M$$

A Lei de Ampère fica então

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} = \vec{J}_\ell + \vec{J}_M = \vec{J}_\ell + \nabla \times \vec{M}$$

Portanto, podemos escrever:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\right) = \vec{J}_\ell$$

ou

$$\boxed{\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}} \qquad \boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_\ell}$$

ou seja,

$$\boxed{\oint_c d\vec{\ell} \cdot \vec{H} = I_l(c)}$$

Note, entretanto, que

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\cancel{\nabla \cdot \vec{B}} - \nabla \cdot \vec{M}$$

Há uma lei fundamental da natureza, que diz que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, mas não há nada que nos diga que, por princípio, $\nabla \cdot \vec{M}$ deva se anular! Portanto, não assuma que $\nabla \cdot \vec{H} \to 0$.

Condições de contorno

$$H_\perp \to \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\Delta H_\perp = -\Delta M_\perp}$$

$$\boxed{\Delta B_\perp = 0}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_\ell \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\Delta \vec{H}_\parallel = \vec{K}_\ell \times \hat{n}}$$

Meios Magnéticos Lineares

Vamos supor que um determinado meio adquire uma magnetização proporcional ao campo magnético:

$$\vec{M} \propto \vec{B} \qquad \Rightarrow \qquad \text{meio linear}$$

Como definimos $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$, podemos fazer

$$\boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{H}}$$

onde χ_m é a **susceptibilidade magnética**, um valor adimensional que depende do material, sendo positiva para materiais paramagnéticos e negativa para materiais diamagnéticos. Daí

$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}} \qquad \text{onde} \qquad \boxed{\mu \equiv \mu_0 \left(1 + \chi_m\right)}$$

e

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}}$$

onde μ é a **permeabilidade magnética** do material.

O potencial magnético escalar

Digamos que $\vec{J} = 0$ em alguma região do espaço, de modo que nessa região $\nabla \times \vec{H} = 0$. Como $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, nos meios lineares existe então um potencial escalar magnético ϕ_m tal que

$$\vec{H} = -\nabla \phi_m$$

e, assim

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla^2 \phi_m = -\nabla \cdot \vec{M}$$

Agora, basta utilizar as condições de contorno apropriadas, e usar os métodos conhecidos para a equação de Poisson

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_m &= -\rho_m \\ \rho_m &= -\nabla \cdot \vec{M} \end{aligned}$$

Podemos então definir uma "densidade de carga superficial magnética" $\sigma_m = \vec{M} \cdot \hat{n}$, e assim, por analogia com o problema de eletrostática:

$$\boxed{\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{\rho_m\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int dS' \frac{\sigma_m\left(\vec{r}'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$