# ACH2024

# Aula - Árvores B (parte 3)

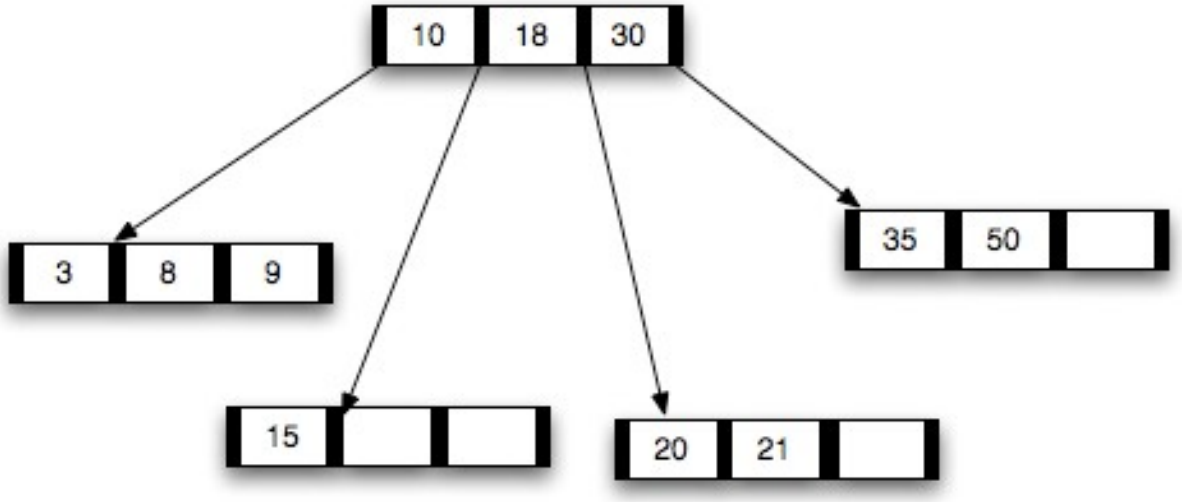
Prof. Helton Hideraldo Bíscaro

# Nas aulas passadas...

# Árvore B - Definição

- Uma *árvore* $B$ é uma árvore com as seguintes propriedades:

  1. Cada nó $x$ contém os seguintes campos:
     - $n[x]$, o número de chaves atualmente armazenadas no nó $x$;
     - as $n[x]$ chaves, armazenadas em ordem não decrescente, de modo que $key_1[x] \leq key_2[x] \leq \ldots \leq key_{n[x]}[x]$;
     - $leaf[x]$, um valor booleano indicando se $x$ é uma folha (TRUE) ou um nó interno (FALSE).
     - se $x$ é um nó interno, $x$ contém $n[x] + 1$ ponteiros $c_1[x], c_2[x], \ldots c_{n[x]+1}[x]$ para seus filhos.



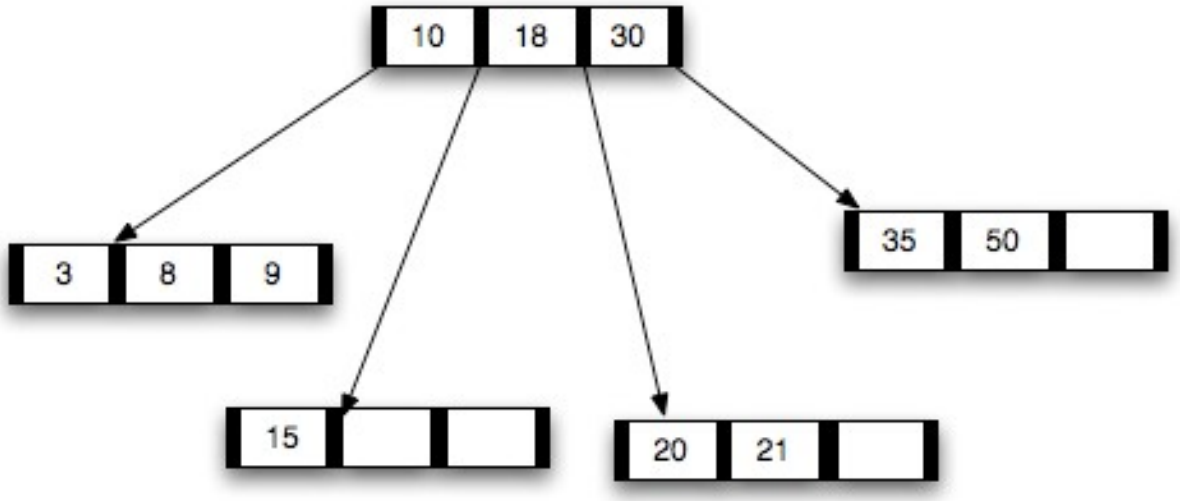
# Estrutura de uma árvore B

```
#define t 2
typedef  int  TipoChave;
typedef struct no {
    TipoChave chaves[2*t-1];
    struct no* filhos[2*t];
    int numChaves;
    bool folha;
} NO;
```

# Árvore B - Definição

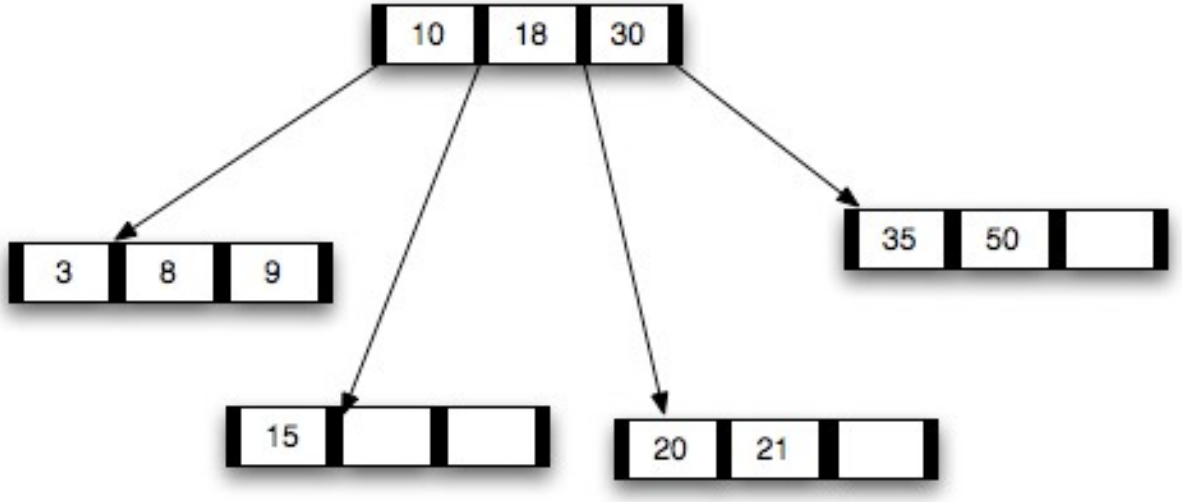
2. As chaves $key_i[x]$ separam as faixas de valores armazenados em cada subárvore: denotando por $k_i$ uma chave qualquer armazenada na subárvore com nó $c_i[x]$, tem-se

$$k_1 \leq key_1[x] \leq k_2 \leq key_2[x] \leq \ldots \leq key_{n[x]}[x] \leq k_{n[x]+1}$$



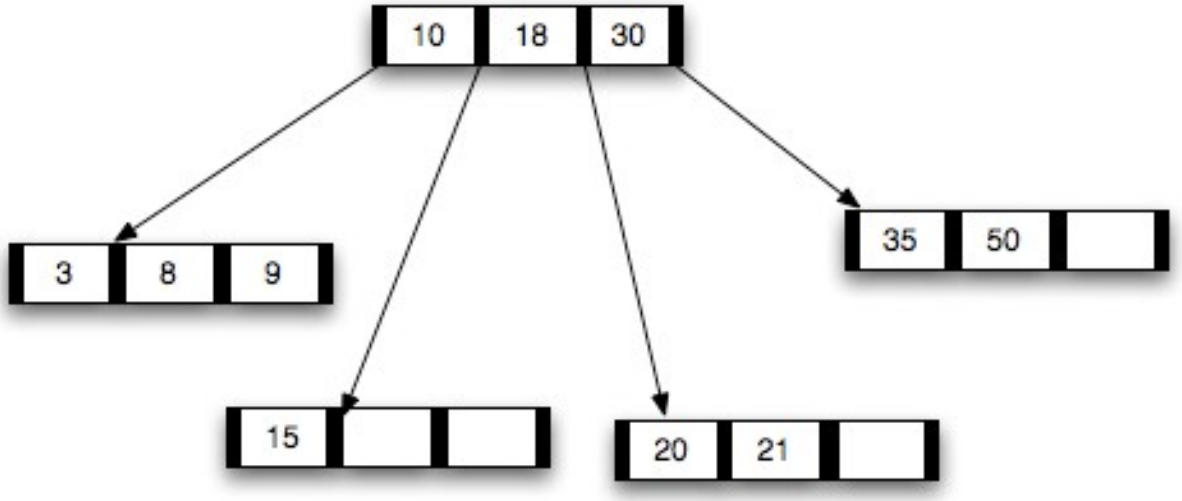
# Árvore B - Definição

3. Todas as folhas aparecem no mesmo nível, que é a altura da árvore, $h$.



# Árvore B - Definição

4. Há um limite inferior e superior no número de chaves que um nó pode conter, expressos em termos de um inteiro fixo $t \geq 2$ chamado o *grau mínimo* (ou *ordem*) da árvore.
   - Todo nó que não seja a raiz deve conter pelo menos $t - 1$ chaves. Todo nó interno que não seja a raiz deve conter pelo menos $t$ filhos.
   - Todo nó deve conter no máximo $2t - 1$ chaves (e portanto todo nó interno deve ter no máximo $2t$ filhos). Dizemos que um nó está *cheio* se ele contiver exatamente $2t - 1$ chaves



# Árvore B – altura máxima

- **Teorema:** Para toda árvore B de grau mínimo $t \geq 2$ contendo $n$ chaves, sua altura $h$ máxima será:

$$h \leq log_t \frac{n+1}{2}$$

**Demonstração:** Se uma árvore B tem altura $h$:

– Sua raiz contem pelo menos uma chave e todos os demais nós contêm pelo menos $t-1$ chaves.

– Logo, há pelo menos 2 nós no nível 1, pelo menos $2t$ nós no nível 2, etc, até o nível $h$, onde haverá pelo menos $2t^{h-1}$ nós.

– Assim, o número $n$ de chaves satisfaz a desigualdade:

$$n \geq 1 + (t-1)\sum_{i=1}^{h} 2t^{i-1} = 1 + 2(t-1)\frac{t^h - 1}{t-1} = 2t^h - 1$$

Obs: Usamos acima a igualdade: $\sum_{i=1}^{h} t^{i-1} = \frac{t^h - 1}{t-1}$.

– Logo,

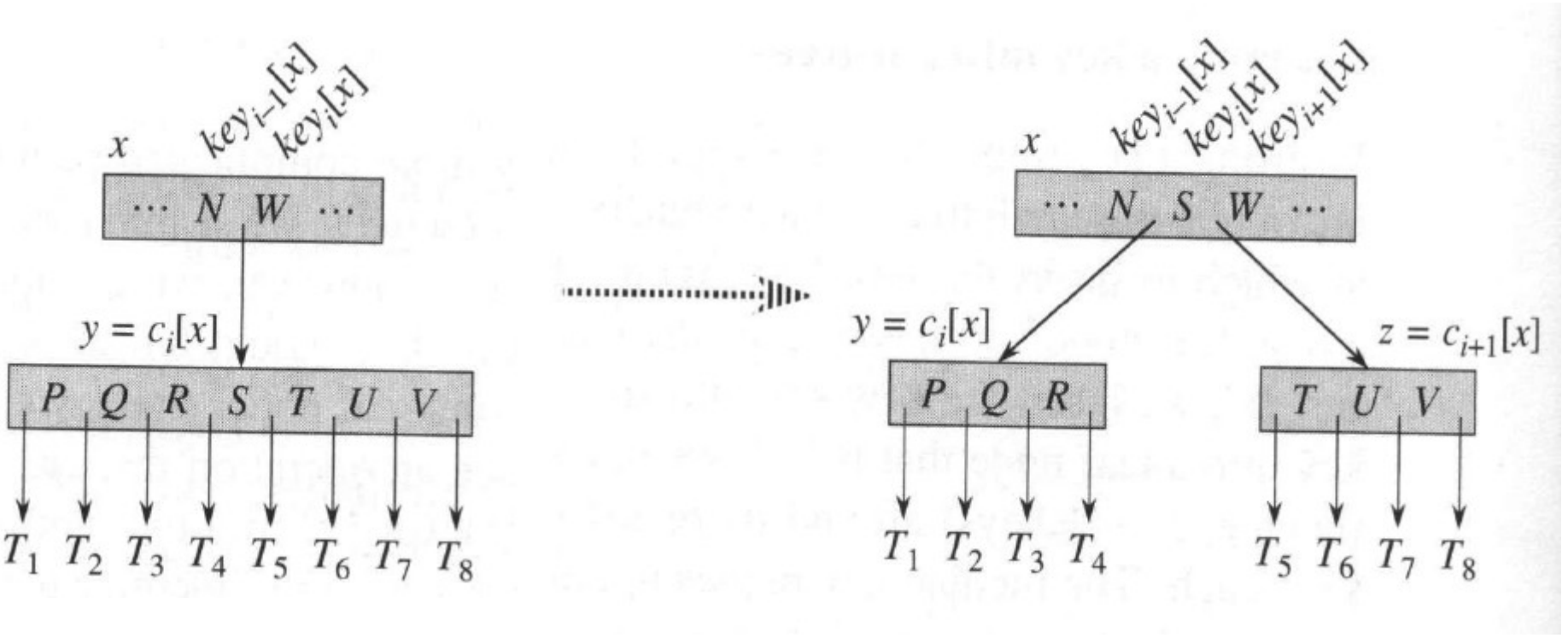
$$t^h \leq (n+1)/2 \Rightarrow h \leq log_t(n+1)/2.$$

# Inserção em árvore B

## As inserções ocorrem sempre nas folhas

Ex: Como inserir o nó “O” nesta árvore (t = 4)?

Antes, precisa resolver o problema do nó cheio...

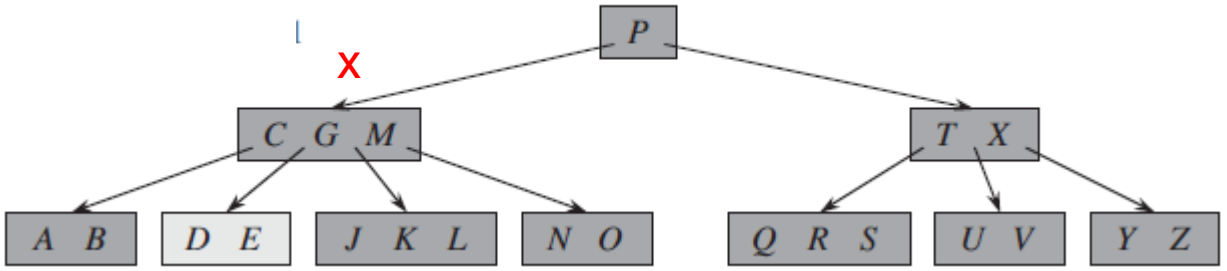


# Aula de hoje...

# Remoção em árvores B

- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

  2. Se a chave $k$ está no nó $x$ e $x$ é um nó interno, faça:



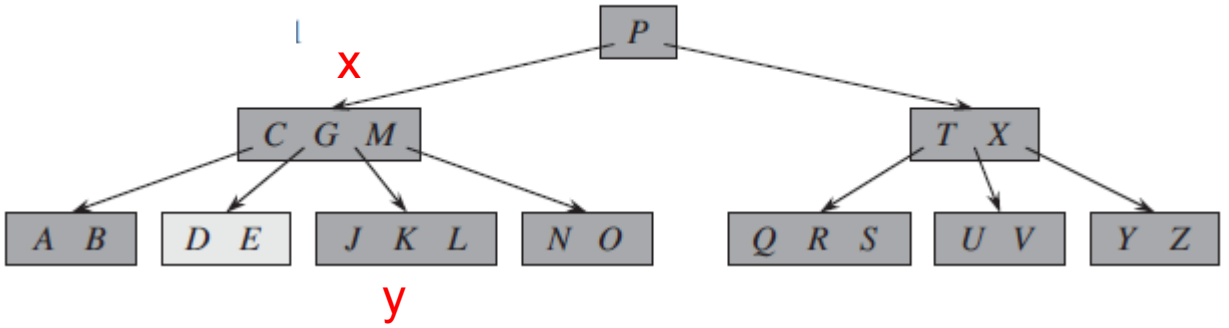

(c) $M$ deleted: case 2a

# Remoção em árvores B

- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

  2. Se a chave $k$ está no nó $x$ e $x$ é um nó interno, faça:

     a) Se o filho $y$ que precede $k$ no nó $x$ tem pelo menos $t$ chaves, então



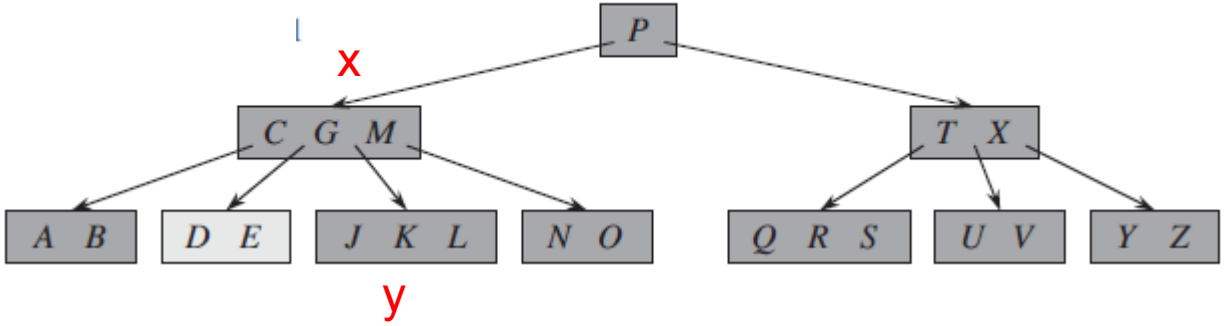

(c) *M* deleted: case 2a

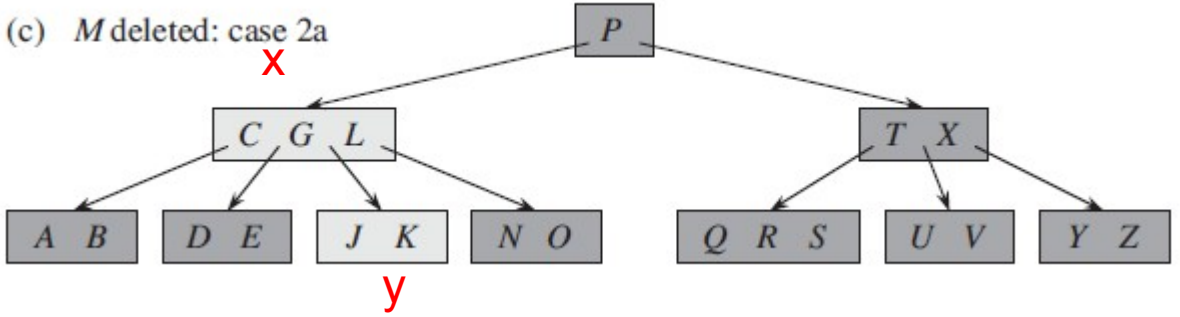
# Remoção em árvores B

- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

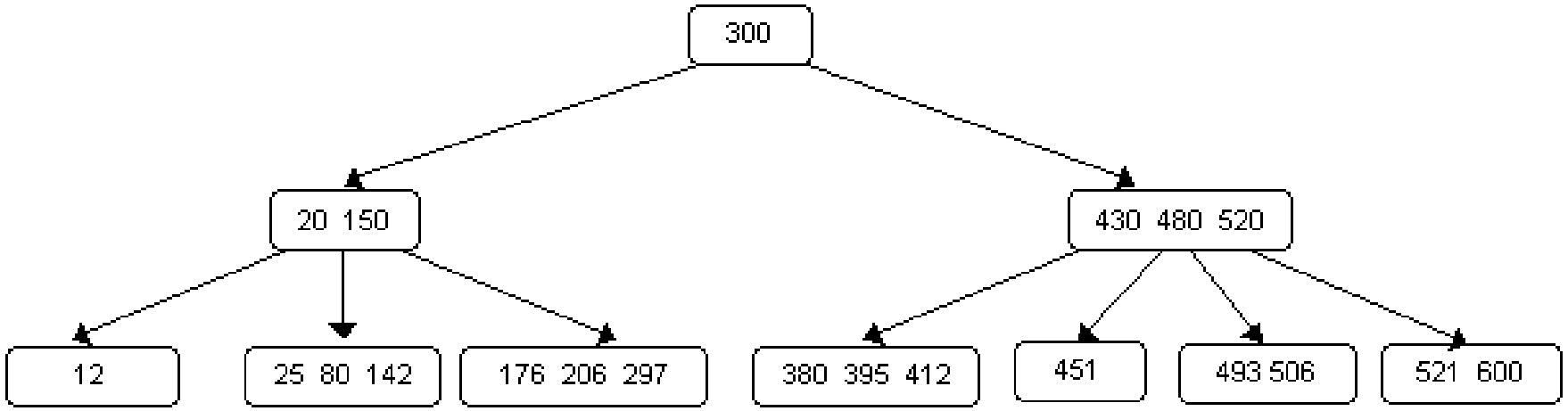
  2. Se a chave $k$ está no nó $x$ e $x$ é um nó interno, faça:

     a) Se o filho $y$ que precede $k$ no nó $x$ tem pelo menos $t$ chaves, então encontre o predecessor $k'$ de $k$ na subárvore com raiz $y$. Delete recursivamente $k'$, e substitua $k$ por $k'$ em $x$.

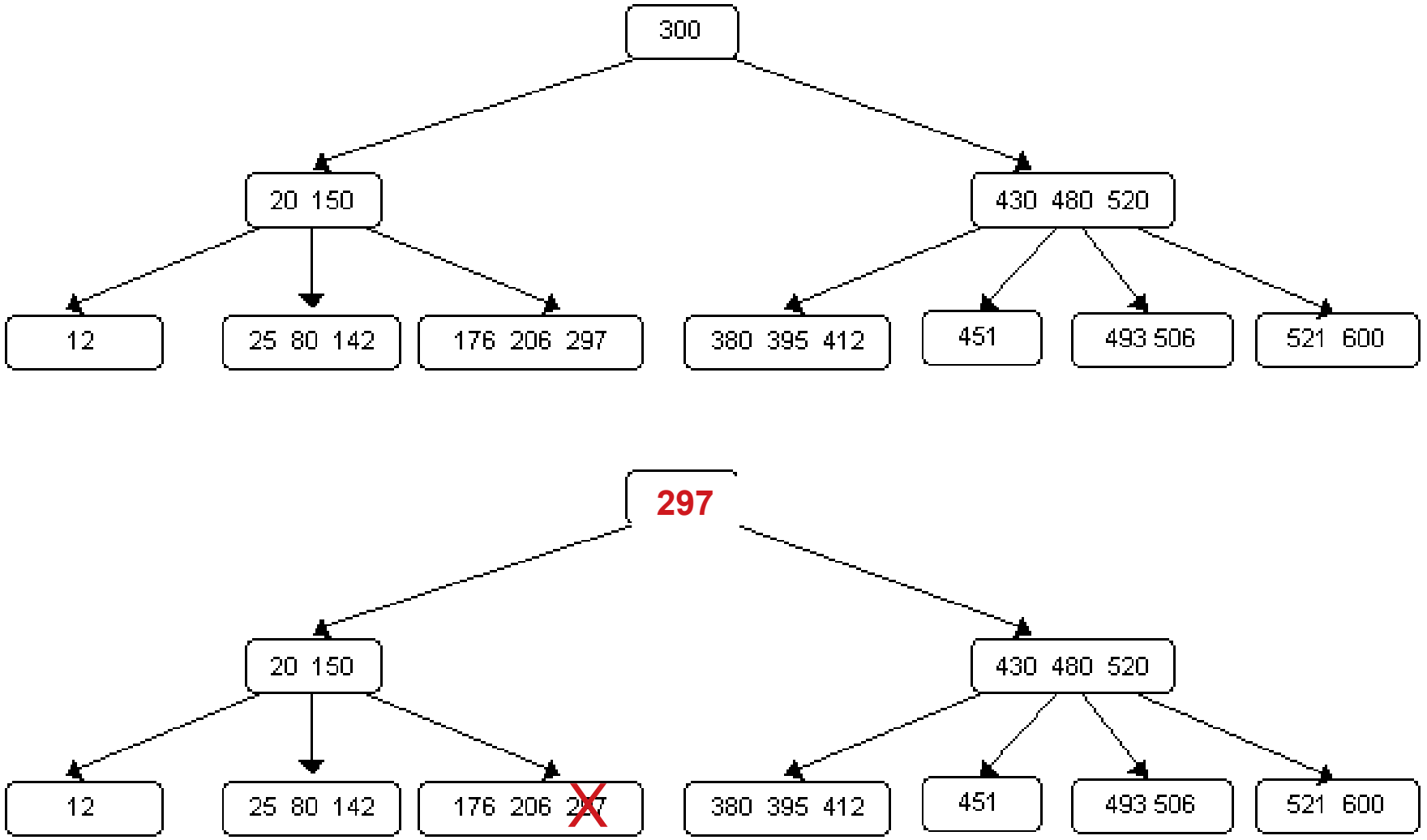


# Ex: remoção da chave 300 (t=2)



# Ex: remoção da chave 300 (t=2)



# Remoção em árvores B

- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

  2. Se a chave $k$ está no nó $x$ e $x$ é um nó interno, faça:

     a) Se o filho $y$ que precede $k$ no nó $x$ tem pelo menos $t$ chaves, então encontre o predecessor $k'$ de $k$ na subárvore com raiz $y$. Delete recursivamente $k'$, e substitua $k$ por $k'$ em $x$.

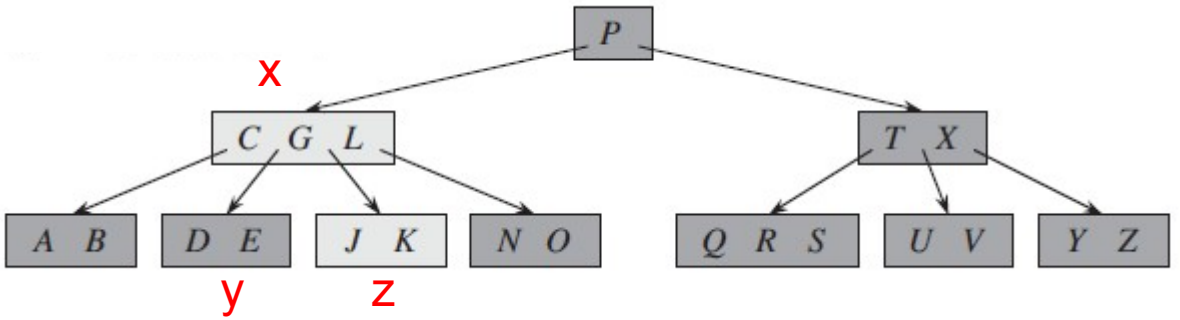
     b) Simetricamente, se o filho $z$ imediatamente após $k$ no nó $x$ tem pelo menos $t$ chaves, então encontre o sucessor $k'$ de $k$ na subárvore com raiz $z$. Delete recursivamente $k'$, e substitua $k$ por $k'$ em $x$.

# Remoção em árvores B

- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

  2. Se a chave $k$ está no nó $x$ e $x$ é um nó interno, faça:

     c) Caso contrário, se ambos $y$ e $z$ possuem apenas $t - 1$ chaves, faça a



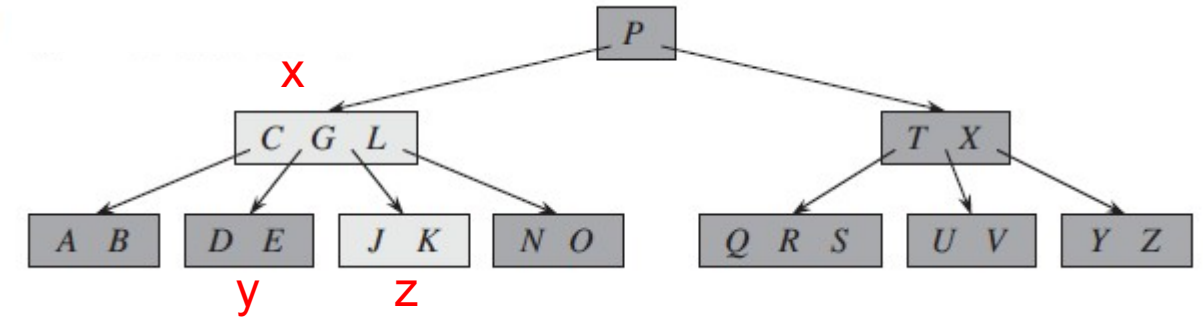
(d) *G* deleted: case 2c

# Remoção em árvores B

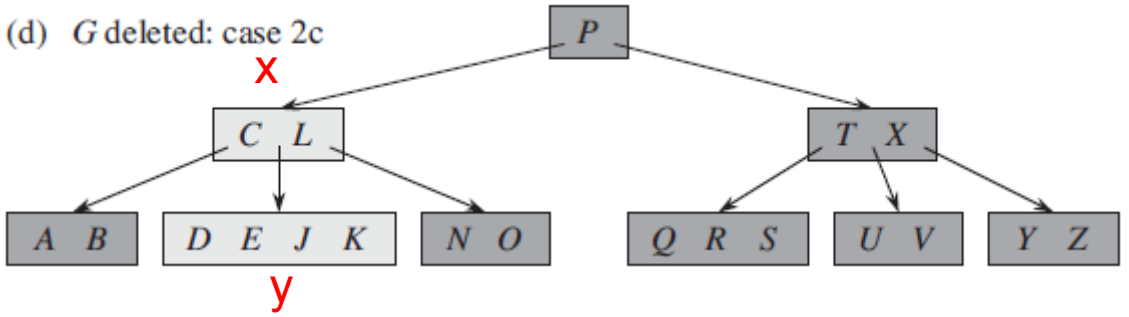
- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

  2. Se a chave $k$ está no nó $x$ e $x$ é um nó interno, faça:

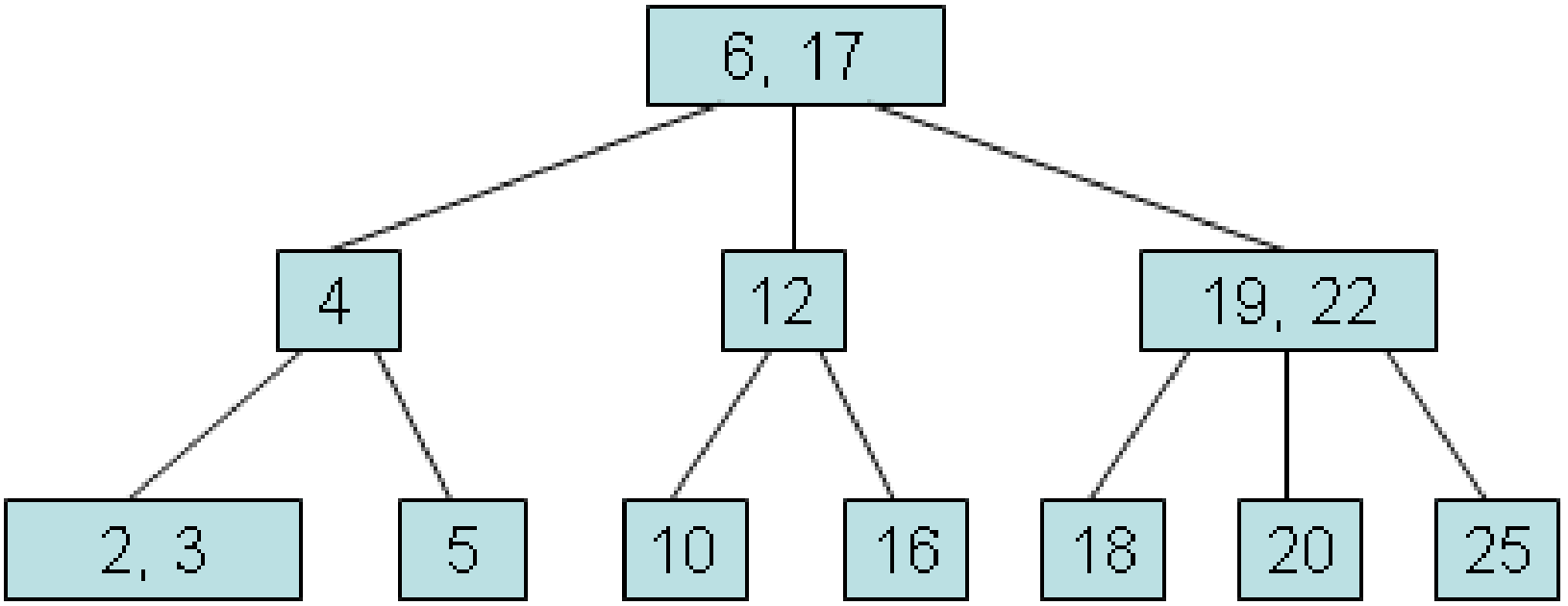
     c) Caso contrário, se ambos $y$ e $z$ possuem apenas $t-1$ chaves, faça a junção de $k$ e todas as chaves de $z$ em $y$, de forma que $x$ perde tanto a chave $k$ como o ponteiro para $z$, e $y$ agora contém $2t-1$ chaves. Então, libere $z$ e delete recursivamente $k$ de $y$.




(d) *G* deleted: case 2c



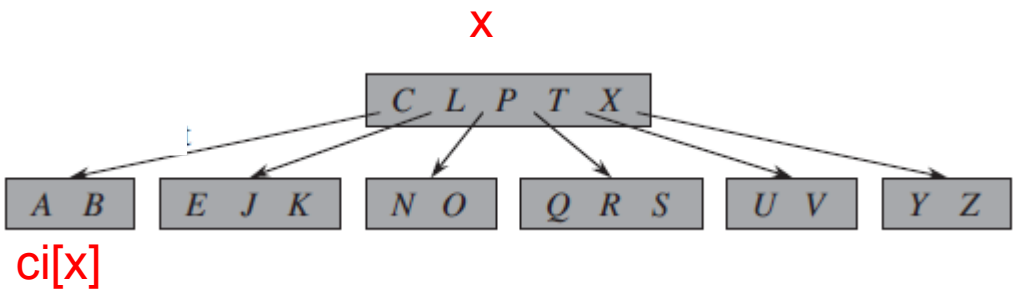
# Outro exemplo deste último caso: remoção do 6 (t=2) : exercício



# Remoção em árvores B

- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

  3. Se a chave $k$ não está presente no no interno $x$,



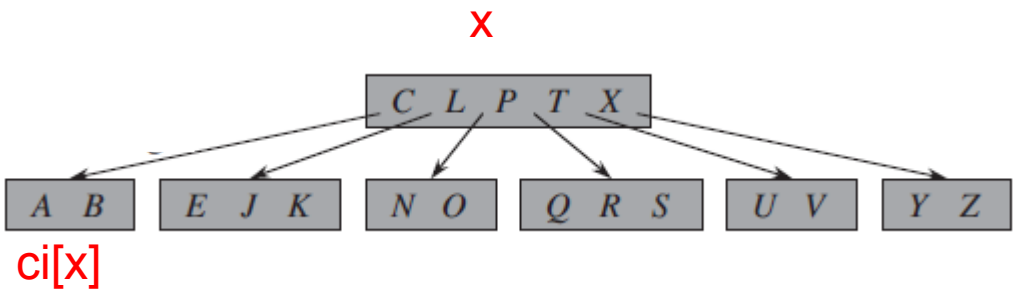

Deletar B:

# Remoção em árvores B

- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

  3. Se a chave $k$ não está presente no no interno $x$, determine a raiz $c_i[x]$ da subárvore apropriada que deve conter $k$ (se $k$ estiver presente na árvore).

Algum problema?



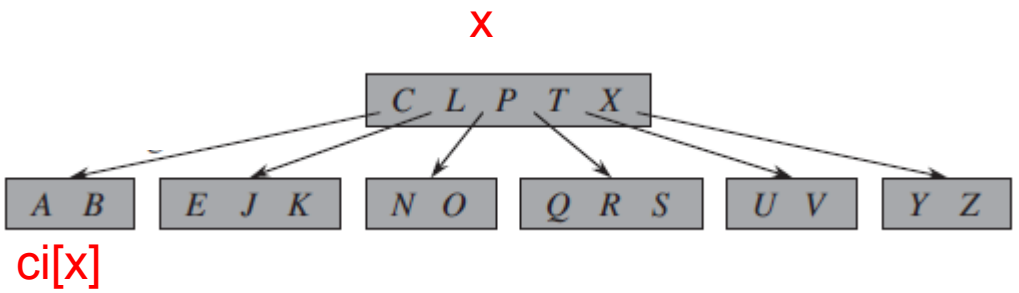

Deletar B:

# Remoção em árvores B

- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

  3. Se a chave $k$ não está presente no no interno $x$, determine a raiz $c_i[x]$ da subárvore apropriada que deve conter $k$ (se $k$ estiver presente na árvore).

Algum problema?
Se ci[x] tem o nr mínimo de chaves,
se tiver que deletar desse nó vai dar problema...

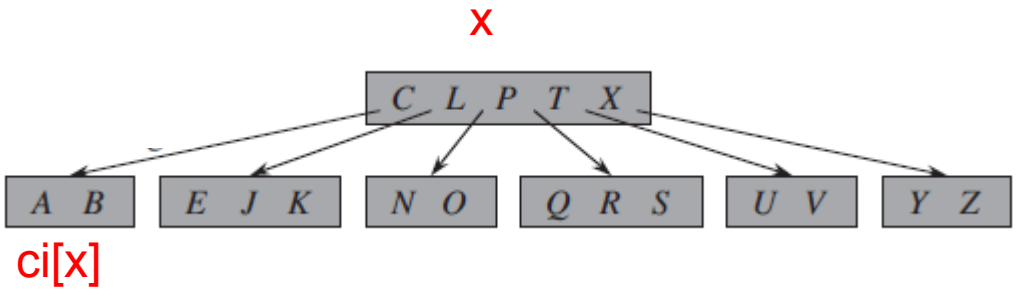



Deletar B:

# Remoção em árvores B

- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

  3. Se a chave $k$ não está presente no no interno $x$, determine a raiz $c_i[x]$ da subárvore apropriada que deve conter $k$ (se $k$ estiver presente na árvore). Se $c_i[x]$ tem apenas $t - 1$ chaves,

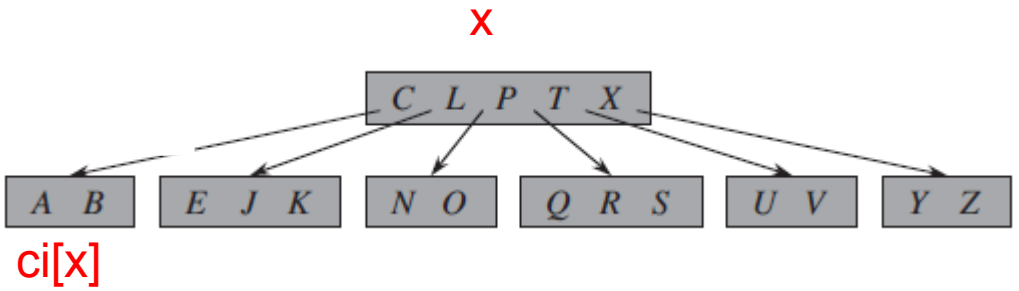



Deletar B:

# Remoção em árvores B

- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

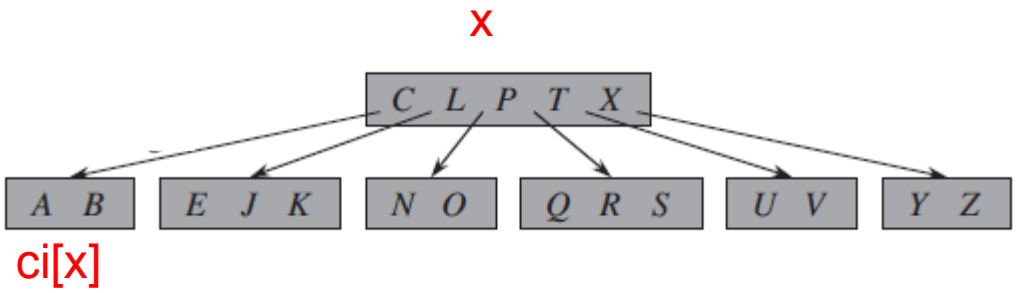
  3. Se a chave $k$ não está presente no no interno $x$, determine a raiz $c_i[x]$ da subárvore apropriada que deve conter $k$ (se $k$ estiver presente na árvore). Se $c_i[x]$ tem apenas $t-1$ chaves, execute o passo 3a ou 3b conforme necessário para garantir que o algoritmo desça para um nó contendo pelo menos $t$ chaves. Então, continue no filho apropriado de $x$.

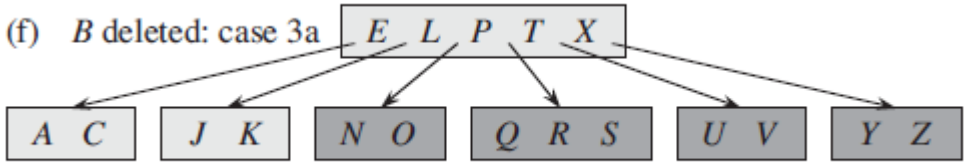



Deletar B:

a) Se $c_i[x]$ contém apenas $t-1$ chaves mas tem um irmão imediato com pelo menos $t$ chaves, dê para $c_i[x]$ uma chave extra movendo uma chave de $x$ para $c_i[x]$, movendo uma chave do irmão imediato de $c_i[x]$ à esquerda ou à direita, e movendo o ponteiro do filho apropriado do irmão para o nó $c_i[x]$.

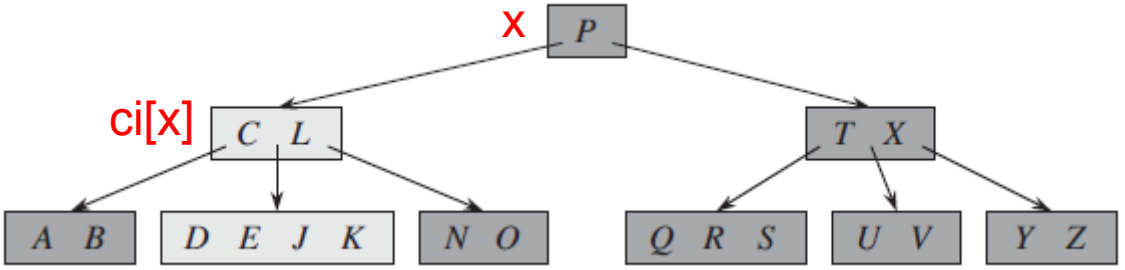
b)



a)

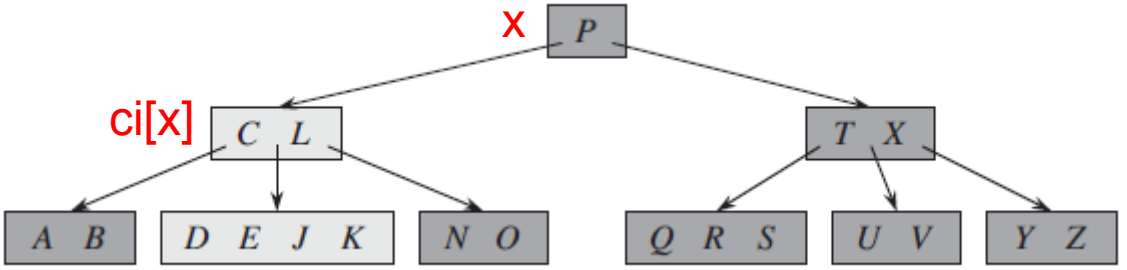
b) Se $c_i[x]$ e ambos os irmãos imediatos de $c_i[x]$ contêm $t - 1$ chaves,

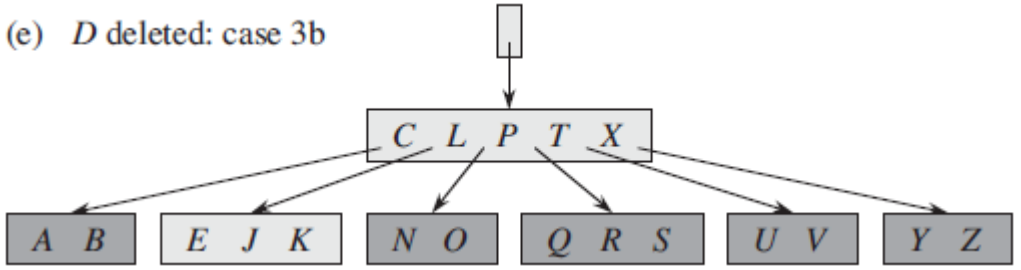


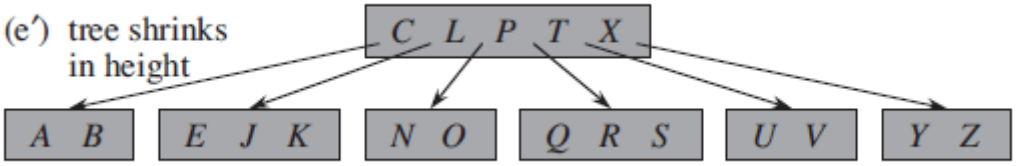

(e) *D* deleted: case 3b

a)

b) Se $c_i[x]$ e ambos os irmãos imediatos de $c_i[x]$ contêm $t - 1$ chaves, faça a junção de $c_i[x]$ com um de seus irmãos. Isso implicará em mover uma chave de $x$ para o novo nó fundido (que se tornará a chave mediana para aquele nó).



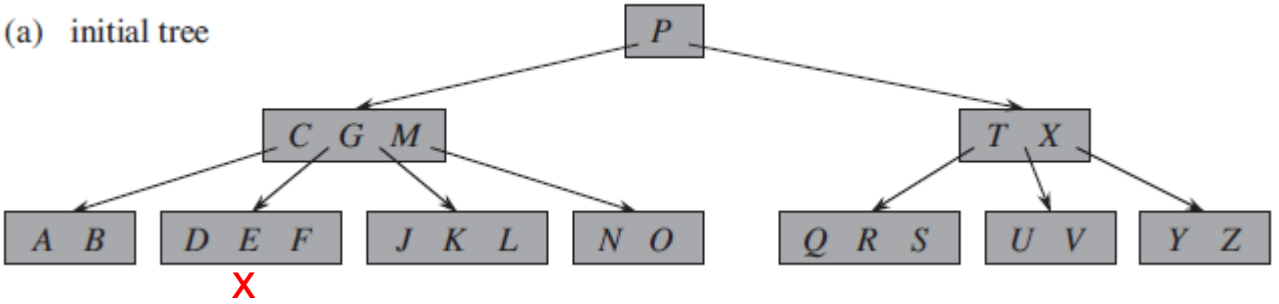



# Remoção em árvores B

- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

1. Se a chave $k$ está no nó $x$ e $x$ é uma folha,

(a) initial tree



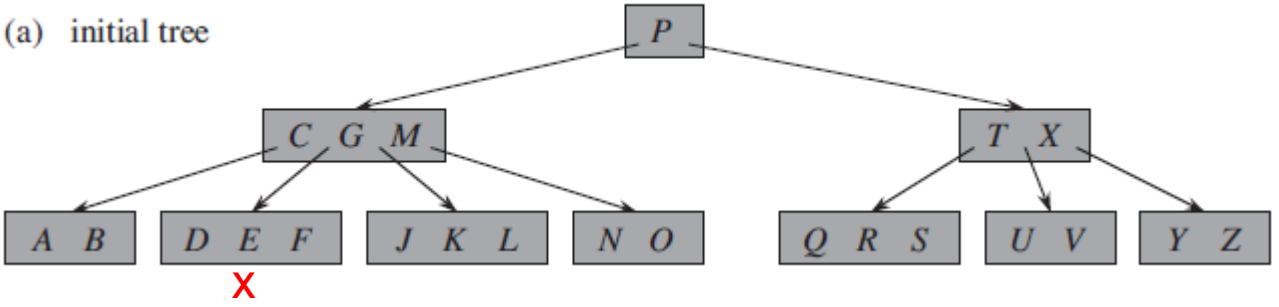

(b) *F* deleted: case 1

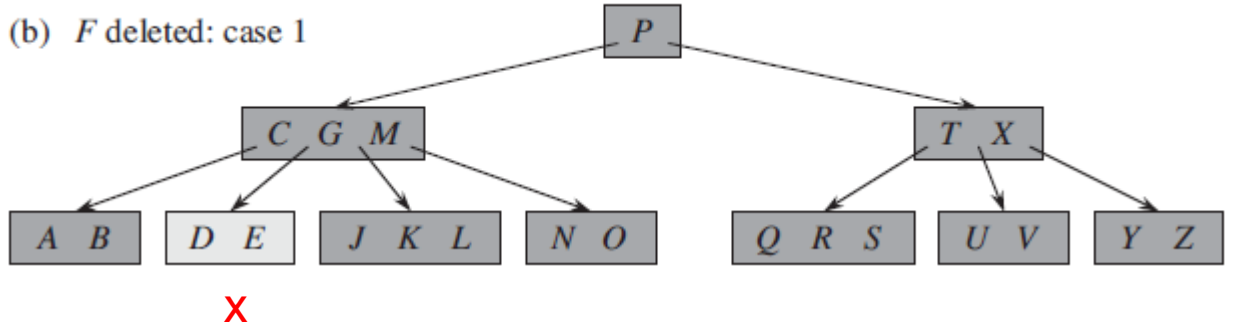
# Remoção em árvores B

- B-Tree-Delete($x$,$k$): remoção da chave $k$ da subárvore com raiz $x$.

1. Se a chave $k$ está no nó $x$ e $x$ é uma folha, exclua a chave $k$ de $x$.

(pelos procedimentos anteriores, já sei que o nó x tem pelo menos t chaves)



# Remoção em árvores B

- Atenção quando um dos nós for a raiz:
  - Ela pode ter menos do que t-1 chaves
  - Se ficar com zero chaves precisa desalocar o bloco e atualizar quem é a nova raiz.
  - Precisa de uma camada extra sobre a chamada da deleção:

# Remoção em árvores B

```
B-Tree-Delete-From-Root(T, k){
        r ← raiz[T];
        se (n[r] = 0) retorna;
        senão B-Tree-Delete(r,k);
        se (n[r] = 0  E  (! leave[r]){
                raiz[T] ← c1[r];
                desaloca(r);
        }
}
```

# Remoção em árvores B

Exercício: IMPLEMENTEM EM CASA!!!!

Vai cair na prova P2

Vai precisar para o EP 2

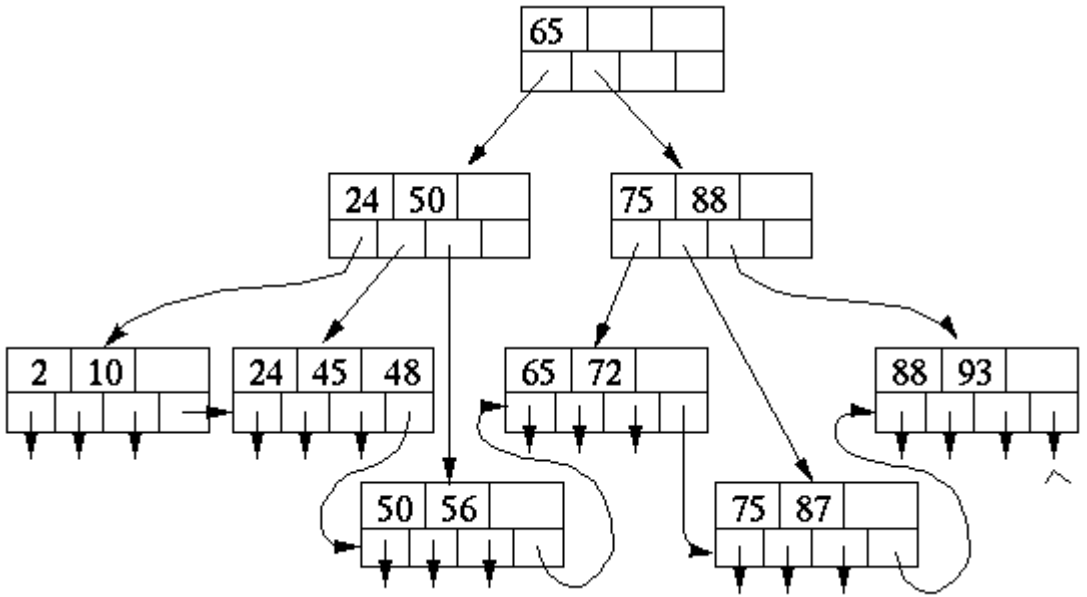
Cuidado quando os nós internos se tornam folhas!

# ÁRVORES B+

Variação da árvore B, na qual:

- os nós internos armazenam apenas os índices (ponteiros de filhos e chaves)
- as folhas armazenam os registros de dados (conectadas da esquerda para a direita, permitindo acesso sequencial ordenado mais eficiente)

- Blocagem menor (cabem mais registros nos nós internos → altura menor)




Nós internos (de índices)

Nós folhas (de dados)

# Comentários sobre árvores B+

Adaptações dos algoritmos:

- Busca: tem sempre que descer às folhas
- Inserção:
  - Split :
    - mediana de uma folha é COPIADA para o pai
    - Mediana de um nó interno é MOVIDO para o pai
- Remoção: nas folhas
  - Se k (chave a ser removida) ocorrer em um nó interno, o valor deve ser substituído pelo valor predecessor nas folhas

# Outras variações

- Árvores B*:
  - Propostas por Knuth em 1973
  - Preenchimento mínimo de 2/3 (mais precisamente (2*t-1)/3)
  - Split postergado até que dois nós irmãos (imediatos) estejam cheios → split desses 2 nós em 3 nós

# Referências

Livro do Cormen: cap 18 (3ª ed.)

Livro do Drozdek (4ª ed) cap 7

Sobre árvores B+:

SILBERSCHATZ A. et al. Database System Concepts. 6th ed. Ed. McGrawHill. Seção 11.3