Equação da Energia

1)Equação da Energia Total

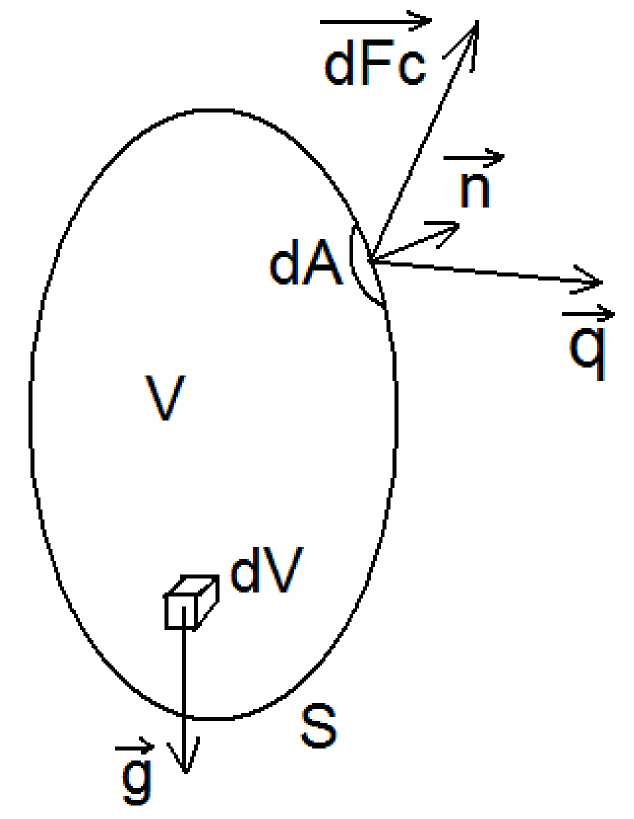
Se temos um corpo fluido em movimento, a sua energia total será dada pela soma da energia interna com a energia cinética:

$$e = \hat{u} + \frac{u_k u_k}{2} \tag{1.1}$$

Onde $\hat{u}$ é a energia interna. A derivada material da energia total será:

$$\int_V \rho \frac{De}{Dt} dV = \dot{W}_{ext} - \dot{Q} \tag{1.2}$$

Onde $\dot{W}_{ext}$ é a potência das forças externas e $\dot{Q}$ é o fluxo de calor que deixa o corpo através de sua superfície. Neste caso, estamos ignorando geração interna.



O fluxo de calor saindo pela superfície será dado por:

$$\dot{Q} = \int_S \vec{q} . \vec{n} \, dA = -\int_S k \nabla T . \vec{n} \, dA \qquad (1.3)$$

Onde k é a condutividade térmica do fluido. Já a potência das forças externas envolverá as potências das forças de campo e de contato. A potência das forças de campo será:

$$\dot{W}_{campo} = \int_V \rho \, \vec{g} . \vec{u} \, dV \qquad (1.4)$$

A potência das forças de contato, se em um elemento de área dA temos uma força de campo $d\vec{F}_c$:

$$\dot{W}_{contato} = \int_S \vec{u} \, . d\vec{F}_c \; = \int_S u_k \, \sigma_{jk} \, n_j \, dA \tag{1.5}$$

Obtemos então a <u>Equação Integral da Energia Total</u>:

$$\boxed{\int_V \rho \frac{De}{Dt} dV = \int_V \rho \, u_k \, g_k \, dV + \int_S u_k \, \sigma_{jk} \, n_j \, dA + \int_S k \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \, dA} \tag{1.6}$$

Usando o teorema da Gauss:

$$\int_V \rho \frac{De}{Dt} dV = \int_V \rho u_k \, g_k \, dV + \int_V \frac{\partial \left(u_k \, \sigma_{jk} \right)}{\partial x_j} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) dV \qquad (1.7)$$

Fazendo $V \rightarrow dV$, obtemos a <u>Equação Diferencial da Energia Total</u>:

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = \rho u_k \, g_k + \frac{\partial \left(u_k \, \sigma_{jk} \right)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)} \qquad (1.8)$$

2)Equação da Energia Interna

A equação (1.8) pode ser transformada, substituindo a energia total pela soma das energias cinética e interna, e aplicando a regra da cadeia no termo de potência das forças de contato:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{u_k u_k}{2}\right) = \rho u_k\, g_k + u_k \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} + \sigma_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) \quad (2.1)$$

O termo de derivada material da energia cinética é dado por:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{u_k u_k}{2}\right) = u_k \frac{Du_k}{Dt} \quad (2.2)$$

Pondo em evidência o vetor da velocidade:

$$\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} + u_k \left(\underbrace{\rho \frac{Du_k}{Dt} - \rho\, g_k - \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j}}_{0} \right) = \sigma_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \tag{2.3}$$

O termo entre parênteses é igual a zero pois se trata da própria equação da Quantidade de Movimento:

$$\rho \frac{Du_k}{Dt} = \rho \, g_k + \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} \qquad (2.4)$$

Assim, obtemos a <u>Equação Diferencial da Energia Interna</u>:

$$\boxed{\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \sigma_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)} \qquad (2.5)$$

3)Função Dissipação para um Fluido Newtoniano

Para um fluido newtoniano, o tensor das tensões é dado por:

$$\sigma_{jk} = -p\,\delta_{jk} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) - \frac{2}{3}\mu\,\delta_{jk}\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \qquad (3.1)$$

Temos então:

$$\sigma_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = -p\,\delta_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\mu\,\delta_{jk}\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \qquad (3.2)$$

Isso resulta:

$$\sigma_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = -p\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)^2 \tag{3.3}$$

Isso é comumente escrito:

$$\boxed{\sigma_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = -p\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu\Phi} \tag{3.4}$$

Onde Φ é a chamada <u>Função Dissipação</u>:

$$\boxed{\Phi = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)^2} \tag{3.5}$$

Fica para o leitor demonstrar que:

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}(\nabla.\vec{u})^2 \tag{3.6}$$

Substituindo a expressão da Função Dissipação, a equação da energia interna para um fluido newtoniano fica:

$$\boxed{\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu \Phi} \qquad (3.7)$$

4)Equação da Entalpia para Fluido Newtoniano

A energia interna é relacionada com a entalpia através da expressão:

$$\hat{u} = h - \frac{p}{\rho} \tag{4.1}$$

Desta expressão obtemos:

$$\frac{D\hat{u}}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} \tag{4.2}$$

Substituindo na Equação da Energia Interna para um fluido newtoniano:

$$\rho\frac{Dh}{Dt}-\frac{Dp}{Dt}+\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)-p\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\mu\Phi \qquad (4.3)$$

Colocando p/ρ em evidência:

$$\rho\frac{Dh}{Dt}-\frac{Dp}{Dt}+\frac{p}{\rho}\left(\underbrace{\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{0}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)+\mu\Phi \qquad (4.4)$$

O termo entre parênteses é nulo pois se trata da própria equação da continuidade escrita na forma menos conhecida. Assim, a Equação Diferencial da Entalpia para um Fluido Newtoniano fica:

$$\boxed{\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \Phi} \tag{4.5}$$

Usando o calor específico c_p, pode-se escrever uma equação de transporte para a própria temperatura, chamada eventualmente de equação da energia térmica:

$$\boxed{\rho \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{c_p} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\mu}{c_p} \Phi} \tag{4.6}$$

5)Equação de Energia Cinética para um Fluido Newtoniano

A equação diferencial de energia cinética para um fluido newtoniano é obtida subtraindo da equação (1.8) da energia total a equação (3.7) da energia interna, resultando:

$$\boxed{\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{u_k u_k}{2}\right) = \rho u_k g_k + \frac{\partial\left(u_k \sigma_{jk}\right)}{\partial x_j} + p\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \mu \Phi} \tag{5.1}$$

Bibliografia:

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Mase, G.T.; Mase, G.E., “Continuum Mechanics for Engineers”, third edition, CRC Press, 1999.

Munson, B., “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos, Ed. Edgard Blucher, 4ª edição, 1999.