MA22 - Unidade 5 - Resumo

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

24 de Março de 2013

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

O Teorema do Confronto

Observação Importante A noção de limite de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ em um ponto a, com a propriedade que todo intervalo da forma $(a - r, a + r)$ intersecta $D \setminus \{a\}$, leva apenas em conta o comportamento de f na proximidade de a, mas não em a. Isto, em particular, implica que se $g : D' \to \mathbb{R}$ é uma outra função, com a propriedade que todo intervalo da forma $(a - r, a + r)$ intersecta $D' \setminus \{a\}$, tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \neq a$ em algum intervalo da forma $(a - r', a + r')$ e em $D \cap D'$, então $\lim_{x \to a} g(x)$ existe se e somente se $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e, neste caso, os limites coincidem. Esta propriedade esclarece ainda mais uma afirmação do tipo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1),$$

que fizemos anteriormente.

O Teorema do Confronto

O próximo Teorema, conhecido como *propriedade do confronto*, é muito útil para o cálculo de certos limites.
Suponhamos que sejam dadas três funções $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D' \to \mathbb{R}$ e $h: D'' \to \mathbb{R}$ e um número real a tais que todo intervalo da forma $(a - r, a + r)$ intersecta $D \setminus \{a\}$, $D' \setminus \{a\}$ e $D'' \setminus \{a\}$.

Teorema (Propriedade do Confronto) Sejam f, g, h e a como acima e tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq a$ em algum intervalo da forma $(a - r', a + r')$ e em $D \cap D' \cap D''$. Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

O Teorema do Confronto

Exemplo Vamos usar o Teorema do Confronto para calcular $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$.

Não podemos utilizar a regra do produto do limite, pois $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ não existe.

Apesar disso, o limite do produto existe e vale zero. De fato, como $|\cos\frac{1}{x}| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, segue que

$$\left|x\cos\frac{1}{x}\right| = |x|\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq |x|, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Isto significa que

$$-|x| \leq x\cos\frac{1}{x} \leq |x|, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

O Teorema do Confronto

No exemplo anterior utilizamos o fato de $\lim_{x\to 0} x = 0$ e da função $\cos\frac{1}{x}$ ser limitada. O resultado a seguir mostra que esse fato é geral e decorre diretamente da Proposição do Anulamento, para sequências, citado no slide 5 do Resumo 1 da Unidade 2.

Corolário (Teorema do Anulamento) Se $f,\ g\colon D \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada (na vizinhança de a) e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to a}(fg)(x) = 0$.

Realmente, se $(x_n) \to a$, $(g(x_n)) \to 0$, pois $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Além disso, f limitada em torno de a garante que $(f(x_n)$ é limitada. A Propriedade do Anulamento, para sequências, garante que a sequência produto $(f(x_n)\cdot g(x_n))$ converge para zero. Assim, $\lim_{x\to a}(fg)(x) = 0$.

O Limite Trigonométrico Fundamental

Este limite é tão significativo que merece um slide todo um slide:

Teorema (O Limite Trigonométrico Fundamental)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

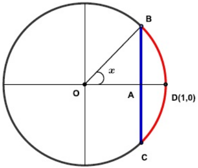
Mas, por razões de economia, vamos incluir mais algumas coisas...
Antes de mostrar a argumentação que garante esse resultado, veremos um limite mais simples, mas também importante:

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a.$$

O Limite Trigonométrico Fundamental

Lema Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $|\mathrm{sen}\ x| \leq |x|$.

Prova Suponhamos $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Pela figura a seguir, temos que o segmento de reta BC tem comprimento menor do que o arco BC.



Portanto, $2\ \mathrm{sen}\ x \leq 2x$ e, logo, $|\mathrm{sen}\ x| \leq |x|$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
Agora, se $x > \frac{\pi}{2}$, temos que $|\mathrm{sen}\ x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} < x$.
Por outro lado, se $x < 0$, então $-x > 0$ e pelo que acabamos de mostrar, $|\mathrm{sen}\ (-x)| \leq |-x|$. Mas como $\mathrm{sen}(-x) = -\mathrm{sen}\ x$, deduz-se que $|\mathrm{sen}\ x| \leq |x|$ mesmo para $x < 0$.

O Limite Trigonométrico Fundamental

Teorema $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$.

Prova A identidade trigonométrica garante

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 2 \cos \frac{x+a}{2} \operatorname{sen} \frac{x-a}{2}$$

e pelo Lema,

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = 2 \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \left| \operatorname{sen} \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \left| \operatorname{sen} \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a|.$$

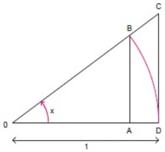
Consequentemente, se (x_n) é uma sequência qualquer que tende para a, a sequência $(\operatorname{sen} x_n)$ tende para $\operatorname{sen} a$.

O Limite Trigonométrico Fundamental

Teorema (Limite Fundamental)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Prova Provemos que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
De fato, consideremos $0 < x < \frac{\pi}{2}$, e comparemos as áreas dos triângulos OAB e ODC e do setor circular ODB (ver a Figura).



Área do triângulo OAB $= \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2}$,
Área do setor circular ODB $= \frac{x}{2}$,
Área do triângulo ODC $= \frac{\operatorname{tg} x}{2} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

O Limite Trigonométrico Fundamental

Obtemos

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Como $\operatorname{sen} x > 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, segue que

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Mas, pela propriedade dos limites de quocientes, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0^+} \cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Agora, pela propriedade do confronto, obtemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

O Limite Trigonométrico Fundamental

Exemplo Vamos usar o Limite Fundamental para calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Realmente, como $1 + \cos x \neq 0$ para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, podemos escrever

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x}$$

para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$.

Portanto, pelo limite fundamental,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \\ &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\right) = \\ &= 1 \times 1 \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$