MA22 - Unidade 4 - Exercícios

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

20 de Março de 2013

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Limites de Funções

Exercícios

1) Seja $f(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

1. Calcule $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$.
2. A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f?

2) Seja $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Calcule $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.
2. A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f?

3) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ se $x \leq 0$ e $f(x) = -\frac{1}{x^4}$ se $x > 0$.

1. Calcule $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.
2. A reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f?

Exercícios

4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$ se $x < 2$, $f(2) = 0$ e $f(x) = \frac{1}{(2-x)^3}$ se $x > 2$.

1. Calcule $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.
2. A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f?

5) Seja a um número real arbitrário e defina $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{x^2-a^2}{x-a}$.

1. Calcule $\lim_{x \to a^-} f(x)$, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a} f(x)$.
2. A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f?

6) Ache as assíntotas verticais ao gráfico de f, caso existam, para as funções f indicadas abaixo:

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$; (b) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}$; (c) $f(x) = \frac{x^2-1}{1-x}$;

(d) $f(x) = \frac{x^2-5}{x-\sqrt{5}}$; (e) $f(x) = \frac{x^2}{x-\sqrt{5}}$; (f) $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$.

7) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{2}{x^3}\right)$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5+9x}{4x^5-50x^3}$; (d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5+5x}{4x^5-50x^3}$;

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^7+500x}{x^8+1}$; (f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^7+500x}{x^6-900x^3}$;

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^7+500x}{x^6-900x^3}$; (h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}-8}$;

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^3-7}}$; (j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{9x^2+1}{x^2+50}}$;

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1}$; (m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$;

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$; (o) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$;

Limites de Funções

Sugestões:

Para (l): Para $x > -\frac{1}{2}$,

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+1} = \sqrt{\frac{x^2+2}{(2x+1)^2}} = \sqrt{\frac{x^2+2}{4x^2+4x+1}}.$$

Para (n): Para $x \in \mathbb{R}$,

$$x - \sqrt{x^2+1} = \frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}.$$

Para (o): Para $x \geq 0$,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Para (p): Para $x > 0$,

$$\frac{\sqrt{x}+2}{x+1} = \frac{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

Para (q): Para $x > 0$,

$$x-\sqrt{x+1} = \frac{(x-\sqrt{x+1})(x+\sqrt{x+1})}{x+\sqrt{x+1}} = \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \frac{x-1+\frac{1}{x}}{1+\frac{\sqrt{x+1}}{x}}.$$

Determine os valores de α e β para que:

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta\right] = 0;$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\alpha x^3+\beta x^2+x+1}{3x^2-x+2} = 1\ .$

Decida se os gráficos das funções dos itens (a), (c), (e), (g), (i), (l), (n) e (p), do Exercício 1, possuem assíntotas horizontais, justificando a sua resposta.