MA22 - Unidade 1 - Resumo 1

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

SOCIEDADE BRASILEIRA
DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Sequências de Números Reais

Definição (Sequência)

Uma *sequência* de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$, chamado o n-ésimo termo da sequência.

Denotamos por $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$, ou por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente por (x_n), a sequência $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemplos

1. (n);
2. $\left(\frac{1}{2^n}\right)$;
3. $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$;

Operações com sequências

Como as sequências são funções reais, elas podem ser somadas, subtraídas e multiplicadas.
Dadas as sequências (x_n) e (y_n), podemos formar as sequências $(x_n \pm y_n)$, $(x_n y_n)$ e $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, desde que, nesta última, $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sequências Limitadas

Definições (Sequência Limitadas)

1. Uma sequência (x_n) é dita *limitada superiormente* (respectivamente, inferiormente), se existe $c > 0$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente, $x_n \geq c$), para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Dizemos que x_n é *limitada* quando é limitada inferiormente e superiormente, isto é, se existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sequências crescentes e decrescentes

Definições

1. Uma sequência (x_n) será dita *decrescente* se $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Diremos que a sequência é *não crescente*, se $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Uma sequência (x_n) será dita *crescente* se $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in N$.
4. Diremos que a sequência é *não decrescente*, se $x_{n+1} \geq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes ou não crescentes são chamadas de *sequências monótonas*.

Subsequências

Definição (Subsequência)

Dada uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, uma subsequência de (x_n) é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots\}$.

Denotamos a subsequência por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$, ou $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ou ainda $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$.

Exemplos

As sequências $(x_n) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ e $(y_n) = \left(n^{(-1)^n}\right)$ admitem as seguintes subsequências:

1. $(x_{2n}) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \cdots \frac{-1}{2n}, \cdots\right)$;
2. $(y_{2n-1}) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots, \frac{1}{2n-1}, \cdots\right)$;
3. $(x_{n^2}) = \left(1, \frac{-1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{16}, \cdots\right)$.

Séries

Dada uma sequência (x_n), podemos considerar uma nova sequência, denotada por (s_n), cujo termo geral é a soma dos n primeiros termos da sequência original (x_n):

$$s_n \;=\; x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i\,.$$

A sequência s_n é o que chamamos uma *série*.

Exemplo

Se $x_n \;=\frac{1}{2^n}$, temos

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \quad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \ldots$$

Exercício

Descubra o termo geral da série associada as sequências $\left(x_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$ e $(y_n = 2n - 1)$.

Definição Educada de Subsequência

Pode-se definir a noção de subsequência de uma sequência como a composição de duas sequências. De fato, suponha dada uma sequência $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e uma sequência crescente $n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A subsequência $(x_{n_i}) = \big(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\big)$ é precisamente $x \circ n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Exercício

Seja $(x_n = \frac{(-1)^n}{n})$ e $n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida por $n \mapsto 2n+1$.
Descreva as subsequências obtidas por $x \circ n$ e $x \circ n \circ n$.