MA22 - Unidade 2 - Resumo 2

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Limites Infinitos de Sequências

Definição (Limite infinito)

Dizemos que uma sequência de números reais (x_n) tende para $+\infty$ e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

se, dado arbitrariamente um número real $A > 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo $n > n_0$, tem-se que $x_n > A$.

Exemplo

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n}\right) = +\infty$. Veja que $x_n = n - \frac{1}{n}$. Dado $A > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > A + 1$ e $1 - \frac{1}{n_0} > 0$. Assim,

$$x_{n_0} = n_0 - \frac{1}{n_0} > A + 1 - \frac{1}{n_0} > A.$$

Logo, se $n > n_0$, temos que $x_n > x_{n_0} = n_0 - \dfrac{1}{n_0} > A$, pois a sequência é crescente.

Limites Infinitos de Sequências

Definição (Limite Menos Infinito)

Dizemos que uma sequência de números reais (x_n) tende para $-\infty$ e escrevemos $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ se, dado arbitrariamente um número real $A > 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo $n > n_0$, tem-se que $x_n < -A$.

Fatos úteis:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} (-x_n) = -\infty$.

b) Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ e $c > 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} c x_n = +\infty.$$

e

Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ e $c > 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} c x_n = -\infty.$$

c) Se $x_n \geq y_n$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$
e
Se $x_n \geq y_n$ para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

d) Se $x_n > 0$ para todo n, então

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty.$$

Se $x_n < 0$ para todo n, então

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty.$$

Proposição

a) Se $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, então

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty \text{ para } L > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty \text{ para } L < 0.$$

b) Se $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$, então

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty \text{ para } L > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty \text{ para } L < 0.$$