MA22 - Unidade 4 - Resumo 2

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

20 de Março de 2013

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Limites no Infinito

Definição (Limite em $+\infty$) Sejam f uma função definida em algum intervalo da forma $(d, +\infty)$ e L um número real. Diz-se que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ se, para qualquer sequência (x_n) de elementos de $(d, +\infty)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, tem-se que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

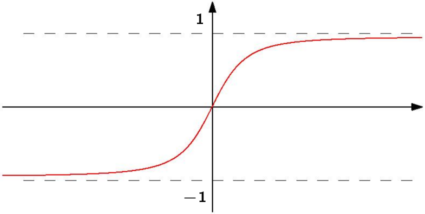
Definição (Limite em $-\infty$) Seja f uma função definida em algum intervalo da forma $(-\infty, d)$ e seja L um número real. Diz-se que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ se, para qualquer sequência (x_n) de elementos de $(-\infty, d)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, tem-se que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Se o limite L existe, ele é único. Neste caso, dizemos que a reta $y = l$ é uma *assíntota horizontal* ao gráfico de f.

Limites no Infinito

A interpretação geométrica da assíntota horizontal é a seguinte: o gráfico de f se aproxima indefinidamente da reta horizontal $y = L$ à medida que x se afasta da origem ilimitadamente para a esquerda ou para a direita.

Exemplo Seja f definida em $\mathbb{R}$ por, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.



Qualquer sequência (x_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, vemos que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$. Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Por outro lado, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Limites Infinitos no Infinito

Definição (Limites Infinitos no Infinito) Seja f uma função definida em algum intervalo da forma $(d, +\infty)$. Diz-se que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (respectivamente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$) se, para qualquer sequência (x_n) de elementos de $(d, +\infty)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, tem-se que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ (respectivamente $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$).

Definição (Limites Infinitos no Menos Infinito) Seja f uma função definida em um intervalo da forma $(-\infty, d)$. Diz-se que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (respectivamente, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$) se, para qualquer sequência (x_n) de elementos de $(-\infty, d)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, tem-se que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ (respectivamente $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$).

Limites Infinitos no Infinito

Exemplo Consideremos a função polinomial
$p(x) = 3x^3 - 25x^2 + 4x - 7$.
Colocando o termo de maior grau do polinômio em evidência, obtemos

$$p(x) = 3x^3\big(1 - \frac{25}{3x} + \frac{4}{3x^2} - \frac{7}{3x^3}\big).$$

Seja (x_n) uma sequência de números reais não nulos tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{25}{3x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3x_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{3x_n^3} = 0,$$

segue que

$$\lim_{n\to\infty} \big(1 - \frac{25}{3x_n} + \frac{4}{3x_n^2} - \frac{7}{3x_n^3}\big) = 1.$$

Como $\lim_{n\to\infty} x_n^3 = +\infty$, segue que $\lim_{n\to\infty} p(x_n) = +\infty$. Uma vez que (x_n) é uma sequência arbitrária que tende a $+\infty$, temos que $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$.
O mesmo raciocínio mostra que $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$.

Funções Polinomiais

Exemplo Seja $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial, em que $m \geq 1$ e $a_m \neq 0$. Então

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_m x^m.$$

Considere $x \to +\infty$. Para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, temos

$$p(x) = a_m x^m \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_m}\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m}\frac{1}{x^m}\right).$$

Seja (x_n) uma sequência com $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
Então,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m}\frac{1}{x_n} + \cdots + \frac{a_1}{a_m}\frac{1}{{x_n}^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m}\frac{1}{{x_n}^m}\right) = 1.$$

Funções Polinomiais

Suponhamos $a_m > 0$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n) = +\infty$. Como (x_n) é arbitrária tendendo a $+\infty$, segue que $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$.
Usando o mesmo raciocínio, obtemos $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$ se $a_m < 0$.
A justificativa do fato de que

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} a_m x^m$$

é completamente análoga.

Funções Racionais

Seja

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \ ,$$

onde m e n são inteiros positivos, $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$, definida em $\mathbb{R} \setminus D$, onde D é o conjunto das raízes do denominador de f.
Vamos estudar $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.
Temos então três casos a considerar.
1^0 caso: $m > n$.
Neste caso, $\frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$ é um polinômio de grau $m - n \geq 1$, e recaímos nas situações já vistas segundo $\frac{a_m}{b_n}$ é positivo ou negativo.
2^0 caso: $m = n$.
Neste caso, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{a_m}{b_n}$.

Funções Racionais

3^0 caso: $m < n$

Neste caso temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Em particular, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5 - 8x^2 + 4x}{7x^4 + 5x + 6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{7}x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5 - 8x^2 + 4x}{7x^4 + 5x + 6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{7}x = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^6 - 5x^2 + 10x - 2}{3x^6 + 7x^2 + 10} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{50x^4 + 12x^3 + x - 4}{3x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 8} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{50}{3x} = 0.$$