MA22 - Unidade 4 - Resumo 1

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

20 de Março de 2013

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

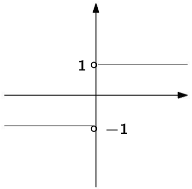
Limites de Laterais

Definição (Limite Lateral Esquerdo) Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que para todo $r > 0$, o intervalo $(a - r, a)$ intersecta D. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda é igual a L, escrevendo $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, se para toda sequência (x_n), com $x_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, tem-se que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Definição (Limite Lateral Direito) Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que para todo $r > 0$, o intervalo $(a, a + r)$ intersecta D. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita é igual a L, escrevendo $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, se para toda sequência (x_n), com $x_n > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, tem-se que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Limites Laterais

Exemplo Seja f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por, $f(x) = -1$ se $x < 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$.



Qualquer sequência (x_n) convergindo para 0, com $x_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $(f(x_n)) = -1$. Assim, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$. Por outro lado, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

Limites Laterais

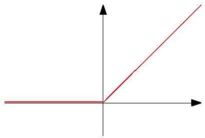
Teorema Sejam $f \colon D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que para todo $r > 0$, os intervalos $(a - r, a)$ e $(a, a + r)$ intersectam D. Então, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Demonstração A demonstração da parte que falta segue das definições, repartindo os termos de uma sequência que converge para a em dois grupos: os termos menores do que a e os termos maiores do que a.

Limites Laterais

Exemplo Consideremos a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ se $x < 0$ e $f(x) = x$ se $x > 0$, cujo gráfico esboçamos na figura a seguir.



Seja (x_n) uma sequência com $x_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Então, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$. Por outro lado, se (x_n) é uma sequência com $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, teremos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Assim,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \text{ e}, \ \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

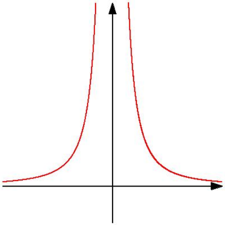
Limites Infinitos

Definição (Limite $+\infty$) Sejam $f: D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecte $D \setminus \{a\}$. Diz-se que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ se, para toda sequência (x_n) de elementos de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.

Definição (Limite $-\infty$) Sejam $f: D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecte $D \setminus \{a\}$. Diz-se que $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ se, para toda sequência (x_n) de elementos de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$.

Limites Infinitos

Exemplo Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, definida para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, cujo gráfico esboçamos na figura a seguir.



Se tomarmos qualquer sequência (x_n) de números diferentes de zero tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, teremos $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{{x_n}^2} = +\infty$
Então, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Limites Infinitos

De maneira completamente análoga ao feito anteriormente, podemos definir sem dificuldade o que se entende por

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty,$$

e por

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$$

Por exemplo,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Assíntotas

A reta vertical $x = a$ é uma ***assíntota vertical*** ao gráfico de uma função f se for satisfeita uma qualquer das condições abaixo:

$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$,

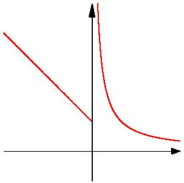
$\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.

Basta que uma das condições mencionadas acima se cumpra para se concluir que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de uma função f. Observe também que se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, então $x = a$ não será uma assíntota vertical.
Portanto, se a reta vertical $x = a$ for uma assíntota vertical, o gráfico de f se aproxima cada vez mais dessa reta (para cima ou para baixo), à medida que x tende a a pela direita ou pela esquerda.

Assíntotas

Exemplo Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$



Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, segue da definição que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f, embora tenhamos $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.