MA22 - Unidade 3 - Resumo

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

17 de Março de 2013

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Limites de Funções

Definição Sejam $f: D \to \mathbb{R}$, onde D é o domínio de f, $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecte $D \setminus \{a\}$ e $L \in \mathbb{R}$. Diz-se que $f(x)$ *tende* para L *quando* x *tende* para a, e escreve-se

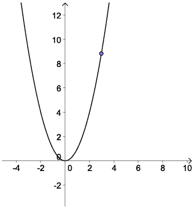
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ ,$$

quando, para toda sequência (x_n) de elementos de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, tem-se $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Segue diretamente da unicidade de limite de sequências que, se existe o limite de uma função, então ele é único.
A exigência feita sobre a, na definição acima, significa que há pontos de D diferentes de a tão próximos de a quanto queiramos. Isto ocorre, por exemplo, se D é um intervalo não trivial (isto é, quando não se reduz a um único elemento) e $a \in D$ ou a é um extremo de D (caso $D \neq \mathbb{R}$).

Limites de Funções

Exemplo Consideremos a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, por $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{x-3}$. Então, $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2}{x-3} = 9$.



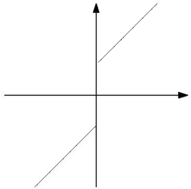
Isto é, qualquer sequência (x_n) convergindo para 3, com $x_n \neq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $(f(x_n))$ converge para 9.
De fato,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{{x_n}^3 - 3{x_n}^2}{x_n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{{x_n}^2(x_n-3)}{x_n-3} = \lim_{n\to\infty} {x_n}^2 = 9.$$

Limites de Funções

Quando não houver um número real L satisfazendo a propriedade acima, diz-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ não existe.

Exemplo Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = x - 1$ se $x \leq 0$ e $f(x) = x + 1$ se $x > 0$, cujo gráfico é como na figura.



Esta função não admite limite se $x \to 0$. Por exemplo, se tomarmos $x_n = -\frac{1}{n}$, segue que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{n} - 1 \right) = -1$.

Por outro lado, se tomarmos $x_n = \frac{1}{n}$ segue que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) = 1$.

Propriedades dos Limite de Funções

Teorema Sejam $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecte $D \setminus \{a\}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, então,

(a) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L_1 + L_2$.

(b) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = L_1 L_2$.

(c) Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$ e $L_2 \neq 0$, tem-se que $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2}$.

Corolário Sejam $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ como no enunciado do Teorema.

(a) Se $c \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x\to a} cf(x) = c(\lim_{x\to a} f(x)) = cL_1$.

(b) $\lim_{x\to a}(f-g)(x) = L_1 - L_2$.

Propriedades dos Limite de Funções

Exemplo $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$.

Sejam $p(x) = x^3 - 2x + 1$ e $q(x) = x^2 - 1$ definidos em $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Então, se $x \in D$. $\frac{p}{q}(x) = \frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$, e $q(x) \neq 0$. Como $\lim_{x\to 1} p(x) = p(1) = 0$ e $\lim_{x\to 1} q(x) = q(1) = 0$, não podemos aplicar o Teorema, pois o limite do denominador é igual a zero.

Devemos proceder de outra maneira para calcular o limite.

Veja que $x = 1$ é raiz de ambos os polinômios e
$p(x) = (x-1)(x^2+x-1)$ e $q(x) = (x-1)(x+1)$.

$$\frac{p}{q}(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x+1)},$$

donde

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

Propriedades dos Limite de Funções

Note que, como $x = 1 \notin D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, temos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-1}{x+1}.$$

Como $\lim\limits_{x \to 1} x^2 + x - 1 = 1$ e $\lim\limits_{x \to 1} x + 1 = 2 \neq 0$, podemos aplicar o Teorema e concluir que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-1}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} x^2 + x - 1}{\lim\limits_{x \to 1} x + 1} = \frac{1}{2}.$$

Propriedades dos Limite de Funções

Um ponto muito importante a ser observado, é que a igualdade (1) acima se verifica, pois ao tomarmos o limite quando x tende para 1, o fazemos tomando valores de $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e de fato, para qualquer desse valores, ao substituirmos no numerador e denominador do primeiro membro da igualdade os termos $(x-1)$ do numerador e denominador se cancelam. Não é verdade que as funções $\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$ e $\frac{(x^2+x-1)}{(x+1)}$ sejam iguais; a primeira tem como domínio o conjunto $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e a segunda tem como domínio o conjunto $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, mas para efeito do cálculo do limite, isto não importa.