

1

SEQUÊNCIAS REAIS E SEUS LIMITES

Sumário

1.1	Introdução	2
1.2	Sequências de Números Reais	3
1.3	Exercícios	8
1.4	Limites de Sequências de Números Reais	9
1.5	Textos Complementares	18

1.1 Introdução

O conceito de limite é o mais fundamental do Cálculo Diferencial e Integral, pois é nele que se baseiam na Matemática atual as definições de convergência, divergência, continuidade, derivada e integral.

A falta de compreensão da noção de limite, no passado, levou a vários paradoxos, sendo os mais antigos que se tem notícia devidos a Zenão de Eléia, datando de aproximadamente 2.450 anos. Um dos problemas propostos por Zenão era equivalente ao seguinte:

Imagine que um atleta deva correr, em linha reta, de um ponto a outro distando 1km. Quando o atleta chegar na metade do caminho, ainda faltará 0,5 km para chegar ao seu destino. Quando ele percorrer a metade dessa metade do caminho, ainda faltará 0,25 km e quando percorrer a metade dessa distância ainda faltará 0,125 km e assim, sucessivamente. Repetindo esse raciocínio indefinidamente, argumentava Zenão, o atleta nunca chegaria ao destino, pois não importando a distância percorrida, sempre restaria alguma distância a ser percorrida.

Note que a distância que separa o atleta da sua meta se tornará tão próxima de zero quanto ele quiser, bastando para isso que ele repita os deslocamentos acima descritos um número suficientemente grande de vezes.

O paradoxo de Zenão só se sustentava pois não levava em conta o fator tempo, subjacente a qualquer movimento, e o fato de que, ao somar sucessivamente as distâncias percorridas,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

o resultado é limitado por 1 e dele se aproxima o quanto quisermos.

São essas ideias intuitivas de *estar tão próximo quanto se quiser* que encerra o conceito de limite.

Embora fundamental, esse conceito demorou mais de dois milênios para finalmente ser rigorosamente definido pelos matemáticos do século XIX.

1.2 Sequências de Números Reais

A experiência fictícia de Zenão, gera a infinidade de números:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots,$$

que correspondem aos pontos da imagem da função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x(n) = \frac{1}{2^n}$.

Isto nos reconduz ao conceito fundamental de sequência que já encontramos em MA11 e MA12 e que relembremos a seguir, juntamente com as propriedades a ele relacionadas.

Uma *sequência* de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$, chamado o n -ésimo termo da sequência.

DEFINIÇÃO 1
SEQUÊNCIA

Denotaremos por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, ou por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente por (x_n) , a sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

É importante fazer a distinção entre o conjunto formado pelos termos da sequência e a sequência em si. De fato, a sequência $(1, 1, 1, \dots)$ tem como conjunto dos seus termos o conjunto unitário $X = \{1\}$. Neste caso, a função x é a função constante definida por $x_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Em geral, chamaremos de *sequência constante* a toda sequência cujos termos são iguais entre si.

A sequência $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$ corresponde à função $x(n) = 1$ se n é ímpar e $x(n) = 2$ se n é par; o conjunto de seus termos é o conjunto $X = \{1, 2\}$, ou seja, uma sequência tem sempre infinitos termos, embora o conjunto formado pelos seus termos possa ser um conjunto finito.

EXEMPLO 1

Considere os seguintes exemplos de sequências:

EXEMPLO 2

1. $(\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$;
2. $(\frac{1}{2^n}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots)$;



$$3. \left(\frac{1}{n^n}\right) = \left(1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{4^4}, \dots, \frac{1}{n^n}, \dots\right);$$

$$4. \left(\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots);$$

$$5. (n) = (1, 2, 3, \dots, n, \dots);$$

$$6. (2^n) = (2, 4, 8, 16, \dots).$$

Uma observação importante a ser feita, é que as sequências, como particulares funções reais, podem ser somadas, subtraídas, multiplicadas ou quocientadas. Ou seja, dadas as sequências (x_n) e (y_n) , podemos formar as sequências $(x_n \pm y_n)$, $(x_n y_n)$ e $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, desde que, nesta última, $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observe que nas sequências dos Exemplos 1, 2, 3 e 4, acima, tem-se que $x_n \in [0, 1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que não ocorre para as sequências dos Exemplos 5 e 6, visto que para qualquer intervalo limitado escolhido, sempre existirão termos de ambas as sequências que “escaparão” desse intervalo.

O fato de que todo intervalo limitado está contido e contém um intervalo da forma $(-c, c)$, com $c > 0$, nos ajudará bastante a simplificar as nossas argumentações. Por outro lado, a sentença $x \in (-c, c)$ se traduz algebricamente na sentença $|x_n| < c$.

Assim, nos Exemplos 1, 2, 3, e 4, dado que $x_n \in [0, 1] \subset (-2, 2)$ para todo n , temos que $|x_n| < 2$, para todo n ; enquanto que nos Exemplos 5 e 6, não existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

O que acabamos de ver é que todos os termos das sequências dos quatro primeiros exemplos estão confinados em um intervalo limitado, enquanto os termos das sequências dos dois últimos exemplos não estão confinados em nenhum intervalo limitado, o que nos conduz á seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2 SEQUÊNCIA LIMITADA

Uma sequência (x_n) é dita *limitada*, se existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando uma sequência (x_n) não é limitada, dizemos que ela é *ilimitada*.

Note também que as sequências dos três primeiros exemplos têm a propriedade que seus elementos decrescem, isto é,

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots$$



Ou seja, a medida que n cresce, os termos da sequência decrescem. Na verdade, observe que ao se escolher quaisquer dois números naturais $m > n$, os respectivos termos x_n e x_m da sequência satisfarão a desigualdade $x_m < x_n$. Em particular, no Exemplo 1, se tomarmos $n = 50$ e $m = 60$, teremos $x_{60} = \frac{1}{60} < \frac{1}{50} = x_{50}$.

Do mesmo modo, no Exemplo 2, temos $\frac{1}{2^{60}} < \frac{1}{2^{50}}$, visto que $2^{60} > 2^{50}$.

As sequências dos dois últimos exemplos têm comportamento oposto, ou seja, os seus termos são crescentes, isto é, $x_{n+1} > x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Formalizemos estes tipos de comportamentos das sequências nas definições a seguir.

Uma sequência (x_n) será dita **decrescente** se $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diremos que a sequência é **não crescente**, se $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

DEFINIÇÃO 3
SEQUÊNCIA DECRESCENTE

No caso das sequências não crescentes, como a própria expressão diz, à medida que n cresce, os termos da sequência não crescem, ou seja, um termo é menor ou igual do que o antecede.

Por exemplo, a sequência $(1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots)$ é não crescente, pois tem a propriedade $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n , mas não é decrescente, pois não satisfaz a propriedade $x_{n+1} < x_n$ para todo n .

Uma sequência (x_n) será dita **crescente** se $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diremos que a sequência é **não decrescente**, se $x_{n+1} \geq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

DEFINIÇÃO 4
SEQUÊNCIA CRESCENTE

As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes ou não crescentes são chamadas de **sequências monótonas**.

Note, porém, que a sequência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ do Exemplo 4 não é monótona: se n é ímpar, tem-se $x_n > x_{n+1}$, enquanto $x_{n+1} < x_{n+2}$.

Vejamos se existe alguma relação entre os conceitos de sequências monótonas e de sequências limitadas, que acabamos de introduzir.

A sequência monótona crescente $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$ dos números naturais (Exemplo 5) é não limitada (esta é a chamada Propriedade Arquimediana dos números reais). O mesmo acontece com a sequência do Exemplo 6: $(2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots)$.



Por outro lado, a sequência $(x_n) = (1 - \frac{1}{n})$ é monótona crescente e limitada, visto que em cada passo subtrai-se de 1 um número cada vez menor e, portanto, em cada passo o correspondente termo da sequência aumenta. Ao mesmo tempo que nenhum termo da sequência ultrapassa 1, donde $x_n \in (0, 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, embora as sequências dos três primeiros exemplos sejam decrescentes e limitadas, a sequência $(-n) = (-1, -2, -3, -4, \dots, -n, \dots)$ é também decrescente, mas não limitada.

Assim, vemos que os dois conceitos não guardam nenhuma relação entre si.

EXEMPLO 3

Considere a sequência cujo n -ésimo termo é

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Assim,

$$x_1 = 1 + 1, \quad x_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \dots$$

Note que essa sequência é monótona crescente, pois $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)!}$. Além disso, ela também é limitada.

Para ver isso, considere a progressão geométrica $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots)$. A soma S_n dos seus n primeiros termos é dada pela fórmula

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

o que nos mostra que $S_n < 2$.

Como, para todo $n \geq 3$, temos $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ (exercício fácil), segue-se, para todo $n \geq 3$, que

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$


Como $x_1 < 3$ e $x_2 < 3$, temos que $0 < x_n < 3$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que mostra que a sequência é limitada.

 Para Saber Mais - Somas de termos de PGs com Razão Entre 0 e 1 -

[Clique para ler](#)

Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, uma subsequência de (x_n) é a restrição da função x que define (x_n) a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots\}$. Denotamos a subsequência por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$, ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ ou ainda $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$.

DEFINIÇÃO 5
SUBSEQUÊNCIA

 Para Saber Mais - Definição Educada de Subsequência - [Clique para ler](#)

Consideremos o subconjunto $\mathbb{N}_1 = \{3n; n \in \mathbb{N}\}$ do conjunto \mathbb{N} . Se olharmos a restrição da sequência $x(n) = \frac{1}{2^n}$ ao subconjunto \mathbb{N}_1 de \mathbb{N} , obtemos a subsequência $(\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^6}, \frac{1}{2^9}, \dots, \frac{1}{2^{3n}}, \dots)$.

Se considerarmos a restrição da sequência $(\frac{1}{n^n})$ ao subconjunto $\mathbb{N}_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n-1, \dots\}$, ou seja, o conjunto dos números ímpares, obteremos a subsequência $(1, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{5^5}, \dots, \frac{1}{(2n-1)^{2n-1}}, \dots)$.

EXEMPLO 4

Para finalizar esta seção, relembremos os axiomas que caracterizam o conjunto dos números reais que foi um dos principais objetos de estudo de MA11, e do qual decorrem todas as suas demais propriedades.

O conjunto dos números reais forma um corpo ordenado completo.

AXIOMA 6
AXIOMAS DOS REAIS

A noção de corpo ordenado já foi bastante explorada e detalhada em MA11. A noção central de completeza (ou completude) dos números reais que utilizaremos está relacionada com a noção de convergência de sequências, assunto que desenvolveremos na próxima seção.

1.3 Exercícios

1. Mostre que as sequências abaixo são limitadas e monótonas. Descreva o tipo de monotonicidade de cada uma delas.

(a) $x_n = \frac{2n-1}{n}$;

(b) $x_n = 1 + \frac{1}{3^n}$;

(c) $x_n = \frac{1}{n^2}$;

(d) $x_n = \frac{n}{n+1}$;

(e) $x_n = \frac{n^2+1}{3n^2}$.

2. Para cada uma das sequências do exercício anterior, exiba três subsequências.

3. Existe um número finito ou infinito de subsequências da sequência $((-1)^{n+1})$? Justifique sua resposta

4. Considere a sequência $(1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$.

- (a) Exiba três subsequências limitadas e três não limitadas,
(b) Exiba três subsequências monótonas crescentes e três monótonas não decrescentes,
(c) Exiba três subsequências monótonas decrescentes e três monótonas não crescentes.

5. Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências dadas. Discuta relativamente aos tipos de monotonicidade dessas sequências, os tipos de monotonicidade que podem ocorrer nas sequências $(x_n \pm y_n)$, $(x_n y_n)$ e $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$

1.4 Limites de Sequências de Números Reais

Observamos na argumentação de Zenão que o atleta nunca chegaria à sua meta, embora fique próximo dela quanto quiser, ou seja, a distância que o separa da meta se torna tão próxima de zero quanto ele quiser.

Vejamos isso com um pouco mais de rigor.

A sequência em questão é $(\frac{1}{2^n})$. Já observamos que dados $n > m$, tem-se

EXEMPLO 5

$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m}$, ou seja, a sequência é decrescente com todos os seus termos positivos.

Consideremos, agora, um intervalo de centro zero e raio pequeno, digamos $(-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9})$, que, convenhamos, é muito pequeno. Agora, como

$$\frac{1}{2^{30}} = \frac{1}{1.073.741.824} < \frac{1}{10^9} < \frac{1}{2^{29}} = \frac{1}{536.870.912},$$

vemos que $\frac{1}{2^{30}} \in (-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9})$.

Na verdade, como para todo $n \geq 30$ temos que $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{30}}$, segue-se que, para todo $n \geq 30$, $\frac{1}{2^n} \in (-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9})$.

Isso nos mostra que a partir de um certo valor de n , a saber, $n = 30$, todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $(-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9})$.

Mostremos agora que o que afirmamos acima não é restrito ao intervalo escolhido $(-\frac{1}{10^9}, \frac{1}{10^9})$. De fato, escolha arbitrariamente um número real $r > 0$ e considere o intervalo $(-r, r)$. Em vista da Propriedade Arquimediana dos números reais, sabemos que existe um inteiro $n_0 \geq 1$ tal que $n_0 > \frac{1}{r}$, logo $\frac{1}{n_0} < r$. Como $2^{n_0} > n_0$, segue-se que $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{1}{n_0} < r$.

Na verdade, como para todo $n > n_0$ tem-se que $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n_0}}$, obtemos que para todo $n > n_0$, $\frac{1}{2^n} < r$.

Vemos, portanto, que a partir de um certo valor n_0 de n , todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $(-r, r)$. Como o número $r > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente, vemos que não importa o quão pequeno ele seja, sempre existirá, para essa escolha de r , um inteiro positivo n_0 a partir do qual todos os termos da sequência pertencerão ao intervalo $(-r, r)$. É nesse sentido que entendemos que os termos da sequência se aproximam de zero quando n cresce. (ver a Figura 1.1).

Figura 1.1: Dois termos da sequência $(\frac{1}{2^n})$

EXEMPLO 6

Consideremos a sequência

$$(x_n) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}, \dots \right),$$

da qual representamos alguns termos na Figura 1.2).

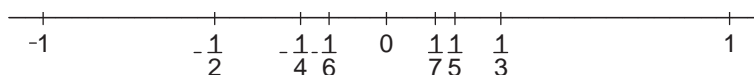
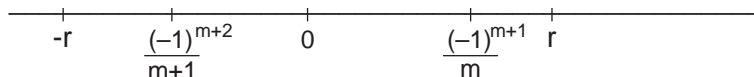


Figura 1.2: Alguns termos da sequência

Todos os elementos desta sequência são diferentes de zero, sendo positivos os elementos correspondentes a n ímpar (por exemplo, $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$), e negativos aqueles correspondentes a n par (por exemplo, $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \dots$).

Vamos mostrar, como no exemplo anterior, que os elementos desta sequência se aproximam de zero quando n cresce. Com efeito, seja r um número real positivo qualquer e seja $n_0 \geq 1$ um número natural tal que $\frac{1}{n_0} < r$, então $\frac{(-1)^{n_0+1}}{n_0} \in (-r, r)$, pois $\left| \frac{(-1)^{n_0+1}}{n_0} \right| = \frac{1}{n_0}$ (note que $\frac{(-1)^{n_0+1}}{n_0}$ estará à esquerda de zero se n_0 for par e à direita de zero se n_0 for ímpar). Além disso, se $n > n_0$, $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < r$.

Em resumo, acabamos de verificar que $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| < r$ para todo $n > n_0$, ou seja, que $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \in (-r, r)$ para todo $n > n_0$ (ver a Figura 1.3).

Figura 1.3: dois termos da sequência, com m ímpar

Podemos então afirmar que, nos dois exemplos acima, para qualquer intervalo aberto I contendo zero, podemos determinar um inteiro $n_0 \geq 1$ de modo que para todo n acima de n_0 , o n -ésimo elemento da sequência pertence a I .

Consideremos a sequência

EXEMPLO 7

$$(x_n) = \left(\frac{n-1}{n} \right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots \right).$$

Vemos que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[0, 1]$. Além disso, como $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, segue-se que a sequência x_n é crescente pois à medida que n cresce, subtraímos de 1 um número cada vez menor.

Seja $r > 0$ um número real positivo qualquer e consideremos o intervalo $(1 - r, 1 + r)$. Como vimos antes, existe um número inteiro positivo n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < r$. Logo, $-\frac{1}{n_0} > -r$ e, portanto, adicionando-se 1 à desigualdade, obtemos que $1 - \frac{1}{n_0} > 1 - r$. Como para todo $n > n_0$ tem-se que $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$, segue que para todo $n > n_0$, $1 - \frac{1}{n} > 1 - \frac{1}{n_0} > 1 - r$, visto que estamos subtraindo de 1 o número $\frac{1}{n}$ que é menor que $\frac{1}{n_0}$.

O que acabamos de ver é que a partir de um certo valor de n , a saber, para valores de n tais que $n > n_0$, obtemos que $x_n \in (1 - r, 1 + r)$. Na verdade, como sempre subtraímos de 1 um número positivo $\frac{1}{n}$, todos os termos da sequência x_n são menores que 1, ou seja para todo $n > n_0$ tem-se que $x_n \in (1 - r, 1) \subset (1 - r, 1 + r)$.

Como o número $r > 0$ é arbitrário, de novo, vemos que para qualquer intervalo aberto I , agora contendo o número 1, podemos determinar um inteiro $n_0 > 0$ de modo que após o n_0 -ésimo termo da sequência, todos os outros termos pertencem ao intervalo I .

Note que nos Exemplos 9 e 10, o intervalo I (por menor que seja) contém o zero, enquanto que no Exemplo 11 o intervalo I contém o número 1. Por outro lado para todos eles sempre se encontra um inteiro positivo n_0 acima do qual todos os termos da sequência pertencem à I . Enfatizamos que como I pode ser tomado tão pequeno quanto se queira, podemos intuir que nos

Exemplos 9 e 10 os termos da sequência ficam tão próximos de zero quanto se queira, enquanto no Exemplo 11 os termos da sequência ficam tão próximos de 1 quanto se queira. O que acabamos de ver nos Exemplos 9 e 10 caracteriza o fato de que em cada um deles a sequência x_n converge para zero, enquanto que no Exemplo 11, a sequência x_n converge para 1.

Precisamente, temos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 7
LIMITE DE SEQUÊNCIA

Sejam (x_n) uma sequência de números reais e l um número real. Dizemos que (x_n) **converge para l** , ou é **convergente**, e escreve-se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, quando para qualquer intervalo aberto I contendo l (por menor que ele seja) é possível encontrar um inteiro $n_0 \geq 1$, de modo que $x_n \in I$ para todo $n > n_0$.

Com o objetivo de tornar mais operacional a nossa definição de convergência, note que, o intervalo I , contendo o número real l , pode ser tomado da forma $(l-r, l+r)$, onde r é um número real positivo. Portanto, dizer que x_n converge para l , isto é, que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, é o mesmo que dizer que:

Para todo número real $r > 0$, existe um inteiro $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se que $x_n \in (l-r, l+r)$.

Observemos ainda que a condição $x_n \in (l-r, l+r)$ para todo $n > n_0$, equivale à condição algébrica $|x_n - l| < r$ para todo $n > n_0$. Em palavras:

A distância de x_n a l se torna arbitrariamente pequena desde que n seja tomado suficientemente grande.

Assim, em relação aos exemplos acima, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

DEFINIÇÃO 8
SEQUÊNCIA DIVERGENTE

Quando não existir um número l para o qual x_n convirja, dizemos que a sequência x_n **diverge**, ou que é **divergente**.

É intuitivo o fato de uma sequência (x_n) não poder convergir para dois números reais l_1 e l_2 distintos, pois, se este fosse o caso, poderíamos achar dois intervalos abertos I_1 e I_2 disjuntos, contendo l_1 e l_2 , respectivamente, de tal modo que para valores de n suficientemente grandes, os termos da sequência estariam dentro de cada um desses intervalos, o que não é possível. A proposição abaixo apenas formaliza esta argumentação.



Se existir um número real l tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, então ele é único.

PROPOSIÇÃO 9

 Para Saber Mais - Demonstração Formal da Proposição - Clique para ler

A seguir, damos dois exemplos de sequências divergentes.

Consideremos a sequência $x_n = (-1)^n, n \geq 1$.

EXEMPLO 8

Temos que $x_n = 1$ para n par e $x_n = -1$ para n ímpar. Seja l um número real arbitrário e tomemos o intervalo $I = (l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2})$. Vemos que não pode ocorrer simultaneamente, $1 \in I$ e $-1 \in I$. Como x_n oscila de -1 para 1 , repetidamente, sempre haverá termos da sequência fora do intervalo I . Como l é arbitrário, segue-se que (x_n) diverge. (ver a Figura 1.4), onde tomamos, por exemplo, $0 < l < 1$).

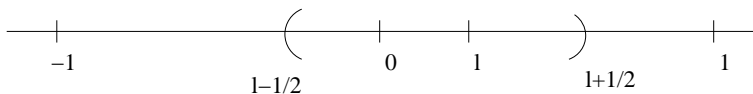


Figura 1.4: Intervalo contendo l

Raciocinando de modo análogo ao exemplo anterior, mostra-se que a sequência $(\sin^2(\frac{n\pi}{2}))$, ou seja, $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$, também diverge. (Faça-o como exercício.)

EXEMPLO 9

As sequências vistas acima, $(\frac{1}{2^n})$, $(\frac{1}{n})$, $(\frac{(-1)^{n+1}}{n})$ e $(\frac{n-1}{n})$, têm uma particularidade em comum, a saber, todas elas convergem e também são todas limitadas. Na verdade, isso é um fato geral. Precisamente,

Toda sequência convergente é limitada.

PROPOSIÇÃO 10

DEMONSTRAÇÃO

Seja (x_n) uma sequência convergente, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$. Pela definição de sequência convergente, temos que dado um intervalo limitado I contendo l , existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo inteiro $n > n_0$, tem-se que $x_n \in I$. Assim, os únicos termos da sequência que eventualmente não pertencem ao intervalo I , são os termos x_1, x_2, \dots, x_{n_0} , portanto em número finito. Basta agora tomar um intervalo limitado J contendo o intervalo I e também os termos x_1, x_2, \dots, x_{n_0} . Obtemos assim, que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo J e que, portanto, (x_n) é limitada.

Considere agora, a sequência monótona decrescente $(\frac{1}{n})$. Vimos que ela é limitada e converge para zero. Analogamente, a sequência monótona crescente $(\frac{n-1}{n})$ é limitada e converge para 1.

Isto não é uma simples coincidência. Na verdade, este é o axioma para a completeza que adotamos:

AXIOMA 11
COMPLETEZA

Toda sequência monótona e limitada de números reais converge para algum número real l .

Existem outras formulações do Axioma da Completeza que são equivalentes a esta e podem ser vistas em um curso de Análise. Por exemplo, a que foi adotada em MA11, dizia que toda expressão decimal $n, n_1 n_2 n_3 \dots$, onde n, n_1, n_2, n_3, \dots são dígitos de 0 a 9, representa um número real. Há uma relação quase imediata entre as noções de sequências convergentes e de subsequências, que veremos a seguir.

TEOREMA 12
LIMITE DE SUBSEQUÊNCIA

Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ e seja (x_{n_i}) uma subsequência qualquer, então $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = l$

DEMONSTRAÇÃO

Seja $r > 0$ um número real, logo existe n_0 tal que $x_n \in (l - r, l + r)$ para todo $n > n_0$. Por outro lado existe i_0 tal que se $i > i_0$, então $n_i > n_0$. Portanto, se $i > i_0$, temos que $x_{n_i} \in (l - r, l + r)$, que mostra que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = l$.

Outro fato interessante a respeito de subsequências de uma sequência é fornecido pelo seguinte resultado:



Toda sequência (x_n) possui uma subsequência monótona.

PROPOSIÇÃO 13
SUBSEQUÊNCIA

MONÓTONA

DEMONSTRAÇÃO

Considere os dois seguintes conjuntos:

$$A_1 = \{p \in \mathbb{N}; \text{ existe } n > p \text{ tal que } x_n \geq x_p\}$$

e

$$A_2 = \{p \in \mathbb{N}; \text{ existe } n > p \text{ tal que } x_n \leq x_p\}.$$

É claro que se tem $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$. Temos, agora, duas possibilidades:

- a) A_1 é infinito. Neste caso, é imediato extrair uma subsequência não decrescente de (x_n) .
- b) A_1 é vazio ou finito. Neste caso, A_2 é necessariamente infinito e, portanto, podemos extrair de (x_n) uma subsequência não crescente.



1.4.1 Exercícios

1. Encontre inteiros $n_1, n_2 \geq 1$ tais que

(a) $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| < \frac{1}{100}$ para $n \geq n_1$;

(b) $\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| < \frac{1}{10000}$ para $n \geq n_2$.

2. Encontre inteiros $n_1, n_2, n_3 \geq 1$ tais que

(a) $\frac{n}{2^n} < \frac{1}{10}$ para $n \geq n_1$;

(b) $\frac{n}{2^n} < \frac{1}{100}$ para $n \geq n_2$;

(c) $\frac{n}{2^n} < \frac{1}{1000}$ para $n \geq n_3$.

3. Ache os limites das sequências $(x_n)_{n \geq 1}$ abaixo

(a) $x_n = \frac{2n-1}{n}$;

(b) $x_n = 1 + \frac{1}{3^n}$;

(c) $x_n = \frac{1}{n^2}$;

(d) $x_n = \frac{n^2+1}{3n^2}$.

4. Comprove cada um dos seguintes limites:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^3+4} = 0$

5. O que se pode dizer sobre uma sequência convergente (x_n) cujos termos são todos números inteiros?

6. O que se pode dizer sobre as subsequências convergentes da sequência $((-1)^{n+1})$?

7. Ache $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

8. Mostre que



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0.$$

Sugestão: Observe que

$$0 < \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}}_{n \text{ parcelas}} \leq \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}.$$

9. Verifique, pela definição, que toda sequência constante ($x_n = c$) converge para c .



1.5 Textos Complementares

Para Saber Mais

Somas de termos de PGs com Razão Entre 0 e 1

Na verdade, o fato da sequência (S_n) , dada por

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

ser limitada é um caso particular do fato da soma dos termos de uma PG qualquer de razão q , com $0 < q < 1$, ser limitada. De fato, pela fórmula da soma dos termos de uma PG, temos

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Como $0 < 1 - q^n < 1$ e $1 - q > 0$, temos

$$|S_n| < \left| a \frac{1 - q^n}{1 - q} \right| \leq \frac{|a|}{1 - q}.$$

Logo, (S_n) é limitada.



Definição Educada de Subsequência

Pode-se definir a noção de subsequência de uma sequência como a composição de duas sequências. De fato, suponha dada uma sequência $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e uma sequência crescente $n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. A subsequência $(x_{n_i}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots)$ é precisamente $x \circ n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Para Saber Mais

Para Saber Mais

Demonstração Formal da Proposição

Suponha por absurdo que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_1$ e que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_2$, com $l_1 \neq l_2$. Tome $r = \frac{|l_2 - l_1|}{2} > 0$. Assim, existem inteiros positivos n_1 e n_2 tais que para todo $n > n_1$, $|x_n - l_1| < r$ e para todo $n > n_2$, $|x_n - l_2| < r$. Tomando-se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $|x_n - l_1| < r$ e $|x_n - l_2| < r$, para todo $n > n_0$, o que é equivalente a

$$l_1 - r < x_n < l_1 + r \text{ e } l_2 - r < x_n < l_2 + r, \text{ para todo } n > m.$$

Multiplicando-se a primeira desigualdade por -1 , obtemos a desigualdade

$$-l_1 - r < -x_n < r - l_1.$$

Agora, adicionando-a à segunda, obtemos $l_2 - l_1 - 2r < 0 < l_2 - l_1 + 2r$, ou seja, $-2r < l_2 - l_1 < 2r$, donde $|l_2 - l_1| < 2r = |l_2 - l_1|$, absurdo. Provamos assim que o limite é único.



2

PROPRIEDADES DOS LIMITES DE SEQUÊNCIAS

Sumário

2.1	Operações com Limites Finitos	2
2.2	Exercícios	10
2.3	Limites Infinitos de Sequências	11
2.4	Exercícios	15
2.5	Rudimentos de Séries	16
2.6	Um pouco de história	18

Limites possuem propriedades operatórias que tornam o seu cálculo mais fácil. Na realidade, teremos poucas vezes que recorrer à definição para calcular um determinado limite, bastando para isto utilizar as propriedades operatórias que estabeleceremos e alguns poucos limites fundamentais, esses, sim, na maioria das vezes, serão determinados a partir da definição.

2.1 Operações com Limites Finitos

Imagine que queiramos calcular o limite da sequência (a_n) , onde $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. O único instrumento que possuímos no momento é a definição de limite, que pressupõe conhecermos de antemão um candidato para limite, para posterior verificação se ele realmente cumpre a definição. Ambas as ações podem, em geral, ser muito trabalhosas. No nosso caso, não é difícil intuir que $l = 0$ é um bom candidato a limite da sequência, mas para provar que se trata realmente do limite da sequência, teríamos que desenvolver um bom número de cálculos, que convidamos o leitor a tentar fazer. No entanto, notamos que podemos escrever a sequência (a_n) como soma de duas outras sequências: $a_n = x_n + y_n$, onde $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{2^n}$; além disso, já sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Como tirar proveito dessas informações? O fato é que usando a definição de limite para deduzir algumas de suas propriedades gerais, aumentaremos em muito o nosso poder de cálculo.

PROPOSIÇÃO 1 LIMITE DA SOMA

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = k$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l + k.$$

DEMONSTRAÇÃO

Pela desigualdade triangular, para todo n , temos

$$|(x_n + y_n) - (l + k)| = |(x_n - l) + (y_n - k)| \leq |x_n - l| + |y_n - k|.$$

A validade desta proposição decorre do fato de que podemos tornar a soma $|x_n - l| + |y_n - k|$ tão próximo de zero quanto queiramos desde que tomemos n suficientemente grande (pois isto vale tanto para $|x_n - l|$ quanto para $|y_n - k|$).



Voltando à sequência $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$, temos, pela Proposição 1, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 + 0 = 0.$$

EXEMPLO 1

A sequência dada por

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

pode ser escrita como $a_n = x_n + y_n$, em que $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e $y_n = \frac{n-1}{n}$.

Vimos, na Seção 2 da Unidade 1, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1.$$

Logo, pela Proposição 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 + 1 = 1.$$

Acabamos, assim, de ver que se o limite de duas sequências existem, então o limite da soma dessas sequências é igual à soma dos respectivos limites.

A próxima proposição mostra que resultado análogo vale para o produto de duas sequências.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = k$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right) = lk.$$

PROPOSIÇÃO 2 LIMITE DO PRODUTO

Notemos que

DEMONSTRAÇÃO

$$x_n y_n - lk = x_n y_n - x_n k + x_n k - lk = x_n (y_n - k) + k (x_n - l).$$

Por outro lado, sabemos que existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo n , pois toda sequência convergente é limitada. Portanto, para todo n ,



$$\begin{aligned}
|x_n y_n - lk| &= |x_n(y_n - k) + k(x_n - l)| \\
&\leq |x_n(y_n - k)| + |k(x_n - l)| \\
&= |x_n||y_n - k| + |k||x_n - l| \\
&\leq M|y_n - k| + |k||x_n - l|.
\end{aligned}$$

Daí resulta que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = lk$, já que podemos tornar $M|y_n - k| + |k||x_n - l|$ tão próximo de zero quanto queiramos desde que tomemos n suficientemente grande (pois isto vale tanto para $|x_n - l|$ quanto para $|y_n - k|$).

EXEMPLO 2

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = k$ e c é um número real arbitrário, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = cl$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l - k.$$

De fato, defina $t_n = c$ para todo $n \geq 1$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = c$ (veja Exercício 9, Seção 2, Unidade 1), segue-se da Proposição 2 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n x_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = cl.$$

Em particular, tomando $c = -1$, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)x_n = - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -l.$$

Por outro lado, pela Proposição 1, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + (-y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l - k.
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = l^2$.

De fato, pela Proposição 2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n x_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = l \cdot l = l^2.$$

EXEMPLO 4

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^3 = l^3$.

De fato, usando a Proposição 2, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 x_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = l^2 \cdot l = l^3.$$

EXEMPLO 5

Mais geralmente, se $p \geq 1$ é um inteiro, da Proposição 2 e do Princípio de Indução Matemática, decorre que se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^p = l^p$.

Seja $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio. Tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) = p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = p(l).$$

 PROPOSIÇÃO 3
LÍMITE DE POLINÔMIO

De fato, da Proposição 1 (e indução, ou o Exercício 8), da Proposição 2 e do Exemplo 5, segue-se que

DEMONSTRAÇÃO

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_m x_n^m + \cdots + a_1 x_n + a_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_m x_n^m + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \\ &= a_m \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^m \right) + \cdots + a_1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + a_0 \\ &= a_m l^m + \cdots + a_1 l + a_0 = p(l). \end{aligned}$$



Temos ainda a proposição a seguir.

PROPOSIÇÃO 4
LIMITE DO INVERSO

Se (y_n) é uma sequência de números reais não nulos convergindo para um número real k não nulo, então a sequência $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ converge para $\frac{1}{k}$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja r um número real arbitrário no intervalo $(0, k^2)$. Assim, $r^2 > 0$ e $k^2 - r > 0$. Como y_n converge para k , sabemos que ky_n converge para k^2 (Exemplo 3). Logo, existem inteiros positivos n_1 e n_2 tais que para $n > n_1$ temos $|y_n - k| < r^2$ e para $n > n_2$ temos $|ky_n - k^2| < k^2 - r$. Tomando-se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue que para todo $n > n_0$, temos que

$$|y_n - k| < r^2 \quad \text{e} \quad |ky_n - k^2| < k^2 - r.$$

Expandindo a última desigualdade, obtemos $ky_n > r > 0$ para todo $n > n_0$, donde $0 < \frac{1}{ky_n} < \frac{1}{r}$.

Assim, concluímos que para todo $n > n_0$,

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{k} \right| = \left| \frac{k - y_n}{ky_n} \right| < \frac{r^2}{r} = r,$$

provando a proposição.

Na Proposição 4, basta, na verdade, supor apenas $k \neq 0$, pois isto implica $y_n \neq 0$ a partir de um certo n .

Como consequência desta proposição e da Proposição 2 temos o seguinte corolário.

COROLÁRIO 5
LIMITE DO QUOCIENTE

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = k$, com $y_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $k \neq 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{l}{k}.$$



De fato, das Proposições 2 e 4, temos que

DEMONSTRAÇÃO

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{y_n} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} \right) = l \cdot \frac{1}{k} = \frac{l}{k}.$$

EXEMPLO 6

Considere a sequência $a_n = \frac{n^2 - 2}{n^2 + 2n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Como $a_n = \frac{\frac{n^2 - 2}{n^2}}{\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}} = \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$, podemos escrever $a_n = \frac{x_n}{y_n}$, onde

$$x_n = 1 - \frac{2}{n^2} \quad \text{e} \quad y_n = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} = 0$, segue da Proposição 1 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} = 1 - 0 = 1.$$

Também pela Proposição 1 tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Podemos então concluir pelo Corolário 5 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{1}{1} = 1.$$

As propriedades a seguir relacionarão limites com desigualdades.

Se (x_n) é uma sequência convergente satisfazendo $x_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (respectivamente, $x_n > b$ para todo $n \in \mathbb{N}$), então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$ (respectivamente, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq b$).

PROPOSIÇÃO 6
DESIGUALDADES E
LIMITES



DEMONSTRAÇÃO

Provaremos apenas a primeira asserção, pois a segunda se prova de modo análogo e a deixamos como exercício para o leitor.

Seja $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ e suponha por absurdo que $l > b$. Tomemos $r > 0$, suficientemente pequeno, tal que $l - r > b$. Por definição de limite de uma sequência, existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo $n > n_0$ tem-se que $x_n \in (l - r, l + r)$. Mas isso significa que para todo $n > n_0$, tem-se que $x_n > b$, contradizendo a hipótese $x_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluimos, portanto, que $l \leq b$.

Os dois resultados a seguir são propriedades muito úteis dos limites e serão utilizados em várias situações.

PROPOSIÇÃO 7

PROPRIEDADE DO

ANULAMENTO

Se (x_n) e (y_n) são sequências tais que (x_n) é limitada e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

DEMONSTRAÇÃO

De fato, seja $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, dado $r > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $|y_n| < \frac{r}{c}$. Obtemos, portanto, que para todo $n > n_0$, $|x_n y_n| = |x_n| |y_n| < c \frac{r}{c} = r$.

Um bom exemplo de aplicação da Propriedade do Anulamento, acima, é dado a seguir.

EXEMPLO 7

Considere o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \pi n$. A sequência dada por $y_n = \cos \pi n$ não é convergente, pois para n par, temos que $\cos \pi n = 1$ e para n ímpar, temos que $\cos \pi n = -1$. Por outro lado, esta sequência é limitada, logo pela Proposição 7, temos que o limite da sequência original vale zero.

TEOREMA 8

TEOREMA DO CONFRONTO

Sejam (x_n) , (y_n) e (z_n) três sequências satisfazendo $x_n \leq y_n \leq z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$.



De fato, Como (x_n) e (z_n) convergem para l , temos que dado $r > 0$, existem inteiros positivos n_1, n_2 tais que para todo $n > n_1$ tem-se que $x_n \in (l-r, l+r)$ e para todo $n > n_2$ tem-se que $z_n \in (l-r, l+r)$. Assim, se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, para todo $n > n_0$ temos que $x_n, z_n \in (l-r, l+r)$. Agora, como $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos que $y_n \in (l-r, l+r)$ para todo $n > n_0$.

DEMONSTRAÇÃO

2.2 Exercícios

1. Ache os limites das seqüências $(x_n)_{n \geq 1}$ abaixo:

$$(a) \ x_n = \frac{n^3 + n - 1}{2n^3 + 7n^2 + 1};$$

$$(b) \ x_n = \frac{n^4 + 5n^3 - 2}{n^5 + 1}.$$

$$(c) \ x_n = \frac{a_r n^r + \cdots + a_1 n + a_0}{b_s n^s + \cdots + b_1 n + b_0}, \text{ onde } r \leq s.$$

2. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.

3. Dê um exemplo de uma seqüência (x_n) divergente tal que a seqüência $(|x_n|)$ seja convergente.

4. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, use a definição para mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -l$.

5. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, mostre que existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $x_n > \frac{1}{2}$ para todo inteiro $n \geq m$. Em particular, os elementos da seqüência (x_n) são maiores do que zero a partir de um certo valor de n .

Sugestão: Considere o intervalo aberto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ de centro 1 e raio $\frac{1}{2}$ e aplique a definição de limite de uma seqüência.

6. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ e $l > 0$, mostre que existe um inteiro $m \geq 1$ tal que $x_n > \frac{l}{2}$ para todo inteiro $n \geq m$.

Sugestão: Raciocine como no Exercício 5, substituindo $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ por $(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2})$ e notando que $(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2})$ é o intervalo aberto de centro l e raio $\frac{l}{2}$.

7. Mostre usando indução que, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_1, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l_2, \cdots, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = l_k, \text{ então}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n + \cdots + w_n) = l_1 + l_2 + \cdots + l_k.$$

2.3 Limites Infinitos de Sequências

Considere as sequências reais $(x_n = n)$ e $(y_n = (-1)^n n)$. Essas duas sequências são ilimitadas, pois dado qualquer número real $A > 0$, existe n tal que $x_n > A$ e $y_n > A$ (basta escolher um inteiro m qualquer maior do que A e tomar $n = 2m$). Assim, (x_n) e (y_n) não convergem para nenhum valor de \mathbb{R} , ou seja, elas divergem, pois toda sequência convergente é limitada (Proposição 10 da Unidade 1).

Note que as duas sequências acima têm comportamentos bastante distintos. A sequência $(x_n = n)$ é tal que para todo número real $A > 0$ sempre existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo $n > n_0$, tem-se que $x_n > A$, ou seja, para cada $A > 0$ fixado arbitrariamente, temos que a partir de um certo valor de n todos os termos da sequência (x_n) serão maiores que o número fixado A . Por outro lado, a sequência y_n é tal que para todo número real $A > 0$ sempre existe um inteiro positivo n_0 tal que para alguns $n > n_0$, tem-se que $x_n > A$, ou seja, para cada $A > 0$ fixado arbitrariamente, temos que a partir de um certo valor de n alguns dos termos da sequência (x_n) serão maiores que o número fixado A .

É essa ideia intuitiva de que todos os termos da sequência (x_n) crescem sem limitação à medida que n cresce é que queremos formalizar, dizendo que os termos tendem para $+\infty$ quando n tende a ∞ . Note que esse comportamento não é verificado para os elementos da sequência (y_n) .

É importante observar que $+\infty$ não é um número e sim um símbolo que representa esse comportamento dos termos da sequência “ultrapassarem” qualquer número real positivo, a partir de um certo valor de n .

Vejamos outro exemplo.

EXEMPLO 8

Considere a sequência $(x_n) = \left(\frac{n^2-1}{n}\right)$. Vejamos o comportamento dos termos dessa sequência quando fazemos n tender a ∞ :

Podemos escrever $x_n = n - \frac{1}{n}$. Uma verificação fácil nos mostra que (x_n) é uma sequência crescente. Agora, fixado um número real $A > 0$, qualquer, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que valha simultaneamente $n_0 > A + 1$ e $1 - \frac{1}{n_0} > 0$. Assim,

$$x_{n_0} = n_0 - \frac{1}{n_0} > A + 1 - \frac{1}{n_0} > A.$$



Logo, se $n > n_0$, temos que $x_n > x_{n_0} = n_0 - \frac{1}{n_0} > A$. Isso mostra que para todo número real $A > 0$, a partir de um certo valor n_0 de n , os termos da sequência “ultrapassam” esse número A .

De novo, podemos dizer que x_n tende para $+\infty$.

Essa ideia de uma sequência tender à $+\infty$ se tornará mais precisa na definição a seguir.

DEFINIÇÃO 9 LIMITE INFINITO

Dizemos que uma sequência de números reais (x_n) tende para $+\infty$ e escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ se, dado arbitrariamente um número real $A > 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo $n > n_0$, tem-se que $x_n > A$.

Do modo análogo, a sequência $(x_n = -n)$, tem a propriedade de seus termos “ultrapassarem” qualquer número real negativo, a partir de um certo valor de n e, portanto, dá a ideia de que a sequência tende para $-\infty$, o que será formalizado na definição a seguir.

DEFINIÇÃO 10 LIMITE MENOS INFINITO

Dizemos que uma sequência de números reais (x_n) tende para $-\infty$ e escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ se, dado arbitrariamente um número real $A > 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo $n > n_0$, tem-se que $x_n < -A$.

Vimos acima que se (x_n) é uma sequência ilimitada, então ela diverge. É importante observar que o fato dela ser ilimitada e divergir, não significa que ela tenda à $+\infty$ ou $-\infty$. Um exemplo disto é a sequência dada por $y_n = (-1)^n n$, já considerada anteriormente. Vejamos um outro exemplo.

EXEMPLO 9

Seja $x_n = n$ se n é par e $x_n = \frac{1}{n}$ se n é ímpar. Note que os termos da sequência x_n são todos positivos, ela é ilimitada, e portanto diverge. Entretanto não se tem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Com efeito, dado qualquer número positivo A e qualquer número inteiro $n_0 > A$, sempre haverá inteiros pares $n > n_0$ tais que $n > A$ e ao mesmo tempo, inteiros ímpares $n' > n_0$ tais que $\frac{1}{n'} < A$. Ou seja, nunca encontraremos um inteiro positivo n_0 a partir do qual todos os termos da sequência serão maiores do que A .



Listaremos a seguir alguns fatos simples (mas úteis) que decorrem das definições que acabamos de ver.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\infty$.

(b) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ e $c > 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = +\infty.$$

(c) Se $x_n \geq y_n$ para todo n e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Como consequência de (a), (b) e (c), obtém-se:

(b') Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$ e $c > 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = -\infty.$$

(c') Se $x_n \geq y_n$ para todo n e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$.

Note que em (c) e (c') basta supor $x_n \geq y_n$ a partir de um certo n .

Outro fato que merece ser mencionado é o seguinte:

(d) Se $x_n > 0$ para todo n , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty.$$

De fato, dado um número real $A > 0$, tome $k \in \mathbb{N}$, com $k > A$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ e $x_n > 0$, temos que existe n_0 tal que se $n > n_0$ se tenha $0 < x_n < \frac{1}{k}$, o que implica que $\frac{1}{x_n} = k > A$. A recíproca se mostra de modo semelhante (Faça-o como exercício).

Um exemplo simples que ilustra o item (d) é considerar a sequência $(\frac{1}{n})$. Também é fácil ver que (d) equivale a

(d') Se $x_n < 0$ para todo n , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = -\infty.$$

Note também que em (d) basta supor $x_n > 0$ e em (d') $x_n < 0$, para n a partir de um certo n_0 .

Mais dois fatos interessantes a respeito de limites infinitos de sequências:

PROPOSIÇÃO 11

(i) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty \text{ para } l > 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = -\infty \text{ para } l < 0.$$

(ii) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = -\infty \text{ para } l > 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty \text{ para } l < 0.$$

Em relação ao caso em que $l = 0$, na proposição acima, nada se pode concluir. Por exemplo, se $x_n = \frac{1}{n^2}$ e $y_n = n + n^2$, vemos que $(x_n y_n)$ converge para 1. Se tomarmos $z_n = n^3 + 1$ vemos que $(x_n z_n)$ tende para $+\infty$ e se tomarmos $w_n = 1 - n^3$, vemos que $(x_n w_n)$ tende para $-\infty$.

2.4 Exercícios

1. Quais das seqüências abaixo são ilimitadas e quais cumprem a propriedade do limite ser $\pm\infty$?

(a) $x_n = \frac{n^2 + 1}{2n - 1}$;

(b) $x_n = \frac{1}{n}$ se n é ímpar e $x_n = \frac{n^2 + 1}{3n}$ se n é par;

(c) $x_n = -\frac{3n^2 + 1}{2n^2 + n}$ se n é par e $x_n = 1 - n^2$ se n é ímpar;

(d) $x_n = \frac{n^2 + 3}{3n}$.

2. Verifique se a seqüência é convergente ou se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$. Se ela for convergente, determine o limite.

(a) $x_n = \frac{n + 1}{2n - 1}$;

(b) $x_n = 1 + \frac{n^2 + 1}{3n}$;

(c) $x_n = \frac{3n^3 + 1}{2n^2 + n}$;

(d) $x_n = \frac{n^2 + 1}{3n^2}$.

3. Seja $x_n = \frac{a_r n^r + \cdots + a_1 n + a_0}{b_s n^s + \cdots + b_1 n + b_0}$, onde $r > s$. Discuta os possíveis limites de x_n quando n tende a ∞ , segundo os sinais de a_r e b_s .



2.5 Rudimentos de Séries

Nos limitaremos, nesta seção, a definir as séries, sua convergência e dar alguns exemplos.

Vejam agora como a partir de uma sequência (x_n) , podemos construir uma nova sequência (S_n) . O primeiro termo da nova sequência será igual ao primeiro termo da sequência (x_n) , o segundo termo, será a soma dos dois primeiros termos de (x_n) , o terceiro, será a soma dos três primeiros termos de (x_n) e, assim sucessivamente, ou seja,

$$S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, S_3 = x_1 + x_2 + x_3, \dots, S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \dots$$

Somas do tipo $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + \dots$, com infinitas parcelas, não têm significado algébrico, no entanto, elas serão utilizadas significando $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Chamaremos tais somas infinitas de *séries* e as denotaremos com o símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

O termo x_n é chamado o *n-ésimo termo* ou *termo geral da série*. A sequência (S_n) é chamada de sequência das *somas reduzidas da série* ou das *somas parciais da série*.

DEFINIÇÃO 12

Quando existe $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ e vale l , dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge* para l ou, simplesmente, é *convergente*. Nesse caso, escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = l$. Caso contrário, dizemos que a série é *divergente*.

EXEMPLO 10

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ tem como sequência das somas parciais, a sequência cujos termos são:

$$S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}, \dots, S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}, \dots$$

Portanto, usando a expressão da soma dos termos de uma progressão geométrica, obtemos $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Agora, como $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, segue pela Proposição 1 que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge para 1.



Um fato relevante que podemos observar na série acima é que o seu termo geral $x_n = \frac{1}{2^n}$ cumpre a propriedade de $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Na verdade, essa propriedade não é exclusiva da série acima, mas é um fato geral como veremos a seguir.

$$\text{Se } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge, então } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

TEOREMA 13

Seja $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ e seja $l = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Evidentemente vale também $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = l$. Logo,

DEMONSTRAÇÃO

$$0 = l - l = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Veremos, a seguir, que a recíproca desse Teorema é falsa, ou seja, existem séries divergentes cujo termo geral tende a zero.

EXEMPLO 11

Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, chamada *série harmônica*. Sabemos que seu termo geral $\frac{1}{n}$ tende para zero. Mostraremos que ela diverge.

Seja (S_n) a sequência das somas parciais da série. Mostraremos que a série diverge, exibindo uma subsequência de (S_n) que diverge, lembrando que toda subsequência de uma sequência convergente, também é convergente e converge para o mesmo limite (cf. Teorema 12, Unidade 1).

Considere a subsequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ de (S_n) , onde os índices pertencem a $\mathbb{N}_1 = \{2^i; i \in \mathbb{N}\}$. Para $i = 1$ temos que $S_2 = 1 + \frac{1}{2}$, para $i = 2$ temos que $S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, para $i = 3$ temos que $S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$. Assim,

$$S_{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2^{i-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^i}\right).$$

Como $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, segue que $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Analogamente, como $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} > \frac{1}{8}$, segue $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Obtemos, portanto, que



$$S_{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2^{i-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^i}\right) > \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{i-1}}{2^i} = 1 + i \cdot \frac{1}{2}.$$

Assim, temos que $S_{2^i} > y_i = 1 + i \cdot \frac{1}{2}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e como $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = +\infty$, segue do fato (c) mencionado na Seção 4 que $\lim_{i \rightarrow \infty} S_{2^i} = +\infty$. Sendo (S_{2^i}) uma subsequência de (S_n) , segue do Teorema 12, da Unidade 1 que S_n diverge.

Na verdade, o fato de termos mostrado que a sequência monótona crescente (S_n) possui uma subsequência que tende para $+\infty$, garante que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Isto é decorrência da proposição abaixo, cuja prova deixamos como exercício para o leitor.

PROPOSIÇÃO 14

Se (x_n) é uma sequência monótona não decrescente (respectivamente não crescente) e possui uma subsequência que tende para $+\infty$ (respectivamente para $-\infty$), então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (respectivamente $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$).

2.6 Um pouco de história

A primeira vez em que se tem notícia do aparecimento da ideia de limite, foi por volta de 450 a.C. com os paradoxos de Zenão de Eléia, com um dos quais iniciamos a Unidade 1. Em seguida, foi Eudoxo de Cnido (século IV a.C.) e, posteriormente, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) que utilizaram o chamado método de exaustão que, para calcular a área ou o volume de uma região, nela inscreviam uma sequência infinita de figuras de áreas ou volumes conhecidos e tal que a soma das áreas ou dos volumes dessas figuras *tendiam* à área ou volume da região. É essa noção de *tender* que está por trás do conceito de limite.

No século XVII vários matemáticos desenvolveram métodos algébricos para encontrar retas tangentes a determinadas curvas. Em cada um desses métodos o conceito de limite era utilizado, sem ser formulado explicitamente. Isaac Newton (1641-1727), em *Principia Mathematica*, foi o primeiro a reconhecer, em certo sentido, a necessidade do limite. No início do Livro I do Princípios, ele tenta



dar uma formulação precisa para o conceito de limite. Por outro lado, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que juntamente com Newton é considerado um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral, no seu tratamento do cálculo de áreas por meio da uniformização do método de exaustão, fazia uso da noção de somas de infinitésimos, ou seja, somas de séries.

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) foi o único matemático da sua época que reconheceu a centralidade do limite no Cálculo e afirmou que a definição apropriada do conceito de derivada requer primeiramente a compreensão de limite para o qual propôs uma definição.

Em 1812 Carl Friedrich Gauss (1777-1855) deu o primeiro tratamento rigoroso para a noção de convergência de sequências e séries, ao realizar o estudo da série hipergeométrica, embora não utilizasse a terminologia de limite.

Finalmente, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), um dos grandes matemáticos franceses da primeira metade do século XIX, formulou as noções modernas de limite, continuidade e convergência de séries, obtendo resultados que marcaram uma nova era para a Análise Matemática.

No século XIX, por obra de Abel, Weierstrass, Riemann e outros, foi desenvolvida a teoria das funções analíticas, que faz uso de séries polinomiais convergentes para representar a importante classe das funções analíticas.

3

LIMITES DE FUNÇÕES

Sumário

3.1	O Conceito de Limite de uma Função	2
3.2	Exercícios	8
3.3	Propriedades dos Limite de Funções	9
3.4	Exercícios	15

3.1 O Conceito de Limite de uma Função

O objetivo desta unidade é analisar o comportamento das imagens de valores de x no domínio de uma função f quando esses valores se aproximam arbitrariamente de um número real a .

EXEMPLO 1

Consideremos a função $f(x) = x^2$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Vimos no Exemplo 3 da Unidade 2 que se tomarmos qualquer sequência (x_n) com $x_n \neq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = 3^2 = 9.$$

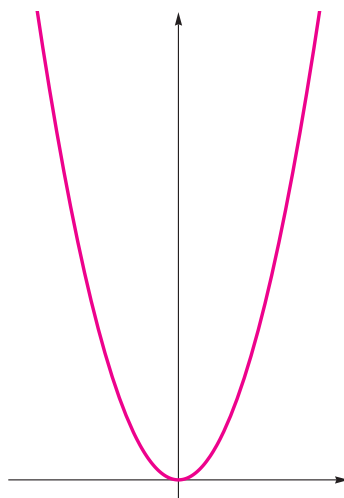


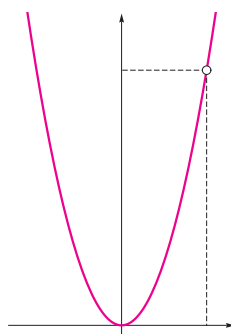
Figura 3.1: Gráfico de $f(x) = x^2$

Vemos, assim, que para qualquer sequência (x_n) convergindo para 3 com $x_n \neq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência $(y_n = f(x_n))$ converge para 9.

EXEMPLO 2

Consideremos a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, por $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3}$, cujo gráfico é como na Figura 3.2.

Note que a única diferença entre a função do Exemplo 1 e esta é que essa última não está definida em $x = 3$. Por outro lado, exatamente como no

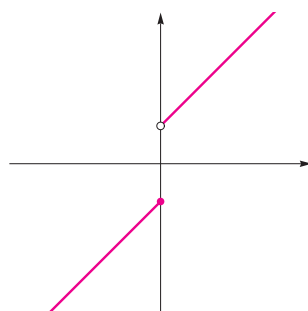

 Figura 3.2: Gráfico da função $y = f(x)$, $x \neq 3$

Exemplo 1, para qualquer sequência (x_n) convergindo para 3, com $x_n \neq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $(f(x_n))$ converge para 9. De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3 - 3x_n^2}{x_n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2(x_n - 3)}{x_n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = 9.$$

EXEMPLO 3

Consideremos a função f definida em \mathbb{R} , dada por $f(x) = x - 1$ se $x \leq 0$ e $f(x) = x + 1$ se $x > 0$, cujo gráfico é como na Figura 3.3.


 Figura 3.3: Gráfico de $y = f(x)$

Note agora, que dada qualquer sequência (x_n) convergindo para zero, com $x_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que a sequência $f(x_n) = x_n - 1$ converge para -1, visto que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1 = -1$. Por exemplo, se tomarmos

$$x_n = -\frac{1}{n} \text{ segue que } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} - 1 \right) = -1.$$

Por outro lado, dada qualquer sequência (x_n) convergindo para zero, com $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que a sequência $f(x_n) = x_n + 1$ converge para 1, visto que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1 = 1$. Por exemplo, se tomarmos $x_n = \frac{1}{n}$ segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) = 1$.

Vemos assim, que enquanto nos dois primeiros exemplos o comportamento da sequência $(y_n = f(x_n))$ independe da sequência (x_n) escolhida e convergindo para 3, nesse último exemplo, o comportamento da sequência $(y_n = f(x_n))$ depende da sequência escolhida (x_n) , convergindo para zero.

Seria muito interessante poder dizer a respeito de uma função f , que não importa a forma como os valores de x no domínio de f se aproximam de um número real a (mesmo que esse número a não pertença ao domínio da função), podermos concluir que as imagens $f(x)$ desses valores se aproximam de um número real l . É essa invariância que está por trás da noção de limite dos valores de $f(x)$ quando x se aproxima de um número real a . Precisamente,

DEFINIÇÃO 1

Sejam $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, onde D é o domínio de f , $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecte $D \setminus \{a\}$ e $l \in \mathbb{R}$. Diz-se que $f(x)$ *tende* para l *quando* x *tende* para a , e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l, \text{ (lê-se: limite de } f(x) \text{ quando } x \text{ tende para } a \text{ é igual a } l)$$

quando para toda sequência (x_n) de elementos de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

Neste caso, diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe e vale l . Quando não houver um número real l satisfazendo a propriedade acima, diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe.

Segue diretamente da unicidade de limite de sequências (Proposição 9 da Unidade 1) que se existe o limite de uma função, então ele é único.

A exigência feita sobre a , na definição acima, significa que há pontos de D diferentes de a tão próximos de a quanto queiramos. Isto ocorre, por exemplo, se D é um intervalo não trivial (isto é, quando não se reduz a um único elemento) e $a \in D$ ou a é um extremo de D (caso $D \neq \mathbb{R}$). Note que no Exemplo 1, temos $a = 3$ e $f(3) = 9$, no Exemplo 2, a não pertence ao domínio de f e no

Exemplo 3, $a = 0$ e $f(0) = -1$. Em todos eles, podemos nos aproximar de a por valores do domínio da função f .

É importante também notar que, mesmo que a pertença a D , o valor de f em a é irrelevante para o estudo do conceito de limite.

Seja $c \in \mathbb{R}$ e definamos $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$. Isto segue diretamente do Exercício 9 da Seção 4, Unidade 1, onde se mostra que toda sequência constante igual a c converge para c .

EXEMPLO 4

EXEMPLO 5

Consideremos a função $f(x) = x^3$ definida para $x \in \mathbb{R}$.

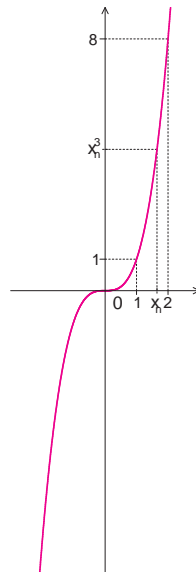


Figura 3.4: Gráfico de $y = x^3$

Exatamente como no Exemplo 4 da Unidade 1, se tomarmos qualquer sequência (x_n) de números reais, diferentes de 2 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$, teremos $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^3 = 2^3 = 8$. Note que o mesmo vale para todo $a \in \mathbb{R}$. De fato, Se tomarmos qualquer sequência (x_n) de números reais diferentes de a , com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ então, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^3 = a^3$. Assim, para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se que $\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3$.

PROPOSIÇÃO 2

Se p é um polinômio qualquer, então, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

DEMONSTRAÇÃO

De fato, tomemos qualquer sequência (x_n) de números reais diferentes de a tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Vimos na Proposição 3, Unidade 2, 1 que $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) = p(a)$. Assim, $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$.

Por exemplo, se tomarmos $p(x) = x^4 - 7x^2 + x$ e $a = \frac{1}{2}$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x^4 - 7x^2 + x) &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{16} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1 - 28 + 8}{16} = -\frac{19}{16}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 6

Consideremos a função $f(x) = |x|$ definida para $x \in \mathbb{R}$. Então, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

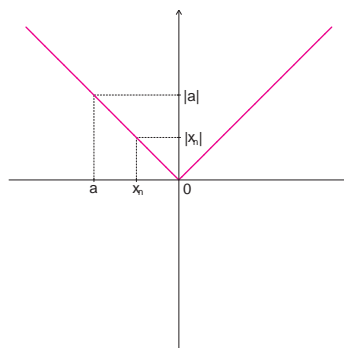


Figura 3.5: Gráfico de $y = |x|$

Com efeito, vejamos que para qualquer sequência (x_n) de números reais diferentes de a tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Lembremos primeiramente, que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, temos $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a desigualdade

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| .$$

Agora, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, dado $r > 0$ arbitrário, podemos encontrar um inteiro $n_0 \geq 1$ tal que $|x_n - a| < r$ para todo $n \geq n_0$. Portanto,

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < r$$

para todo $n \geq n_0$. Isto mostra que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

Assim, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$. Em particular, $\lim_{x \rightarrow -3} |x| = |-3| = 3$ e $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = 0$.

EXEMPLO 7

Vimos no Exemplo 3 acima, que existem sequências (x_n) e (y_n) satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, e tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1$. Portanto, não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.



3.2 Exercícios

1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^5 - 7x^4 + 9)$;

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + |x|)$;

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^4 + 2x^3)$;

(d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

2. Defina $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$ se $x < 1$ e $f(x) = 1$ se $x > 1$.

(a) Esboce o gráfico de f .

(b) Use (a) para intuir o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

3. Defina $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = x$ se $x < 0$ e $f(x) = x^2$ se $x > 0$.

(a) Esboce o gráfico de f .

(b) Use (a) para intuir o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

4. Defina $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = -1$ se $x \leq 2$ e $f(x) = 1$ se $x > 2$.

(a) Esboce o gráfico de f .

(b) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe.

3.3 Propriedades dos Limite de Funções

Recordemos brevemente algumas das operações que podemos efetuar com as funções.

Dadas duas funções $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, podemos a elas associar duas novas funções, $f + g$ e $f - g$, definidas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ e } (f - g)(x) = f(x) - g(x), \text{ para todo } x \in D.$$

Por exemplo, se $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas por $f(x) = 2 + x^3$ e $g(x) = 2x^4$, então $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2 + x^3 + 2x^4$ e $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 2 + x^3 - 2x^4$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Podemos também a elas associar uma nova função fg , definida por $(fg)(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in D$.

Por exemplo, se $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \cos x$, então $(fg)(x) = x^3 \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Um caso particular importante, é quando tomamos a função $f(x) = c$ para todo $x \in D$, em que c é um número real. Neste caso, a função $(cg): D \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $(cg)(x) = cg(x)$. Por exemplo, se $c = 2$ e $g(x) = x^2 - 3x + 2$, então a função $(2g)(x) = 2(x^2 - 3x + 2) = 2x^2 - 6x + 4$.

Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$, poderemos também considerar a função $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, definida em D .

Vejamos, agora, algumas propriedades aritméticas do limite de funções.

Sejam $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecte $D \setminus \{a\}$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$, então,

(a) $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l_1 + l_2.$

(b) $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = l_1 l_2.$

(c) Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in D$ e $l_2 \neq 0$, tem-se que $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2}.$

TEOREMA 3



DEMONSTRAÇÃO

(a) Seja (x_n) uma sequência arbitrária de elementos de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$, segue-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l_1$ e, como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$, segue-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = l_2$. Pela Proposição 1 da Unidade 2, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = l_1 + l_2.$$

Portanto, pela definição de limite, $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l_1 + l_2$, como havíamos afirmado.

(b) De fato, seja (x_n) uma sequência arbitrária de elementos de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$, segue-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l_1$ e, como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$, segue-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = l_2$. Pela Proposição 2 da Unidade 2, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (fg)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)g(x_n)) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)\right)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)\right) = l_1 l_2.$$

Portanto, pela definição de limite, $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = l_1 l_2$.

(c) A demonstração deste item é análoga às dos itens anteriores, lembrando que deverá ser usado o Corolário 5 da Unidade 2.

Vejamos agora algumas consequências imediatas do teorema.

COROLÁRIO 4

Sejam $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ como no enunciado do Teorema 2.1.

(a) Se $c \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = cl_1$.

(b) $\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = l_1 - l_2$.

DEMONSTRAÇÃO

(a) Aplique o item (b) do Teorema 3 com $g(x) = c$ a função constante.

(b) Observe que

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + (-g(x))]$$

e aplique a esta última expressão os itens (a) do Teorema 3 e do presente corolário.

Vejamos agora, como o Teorema 3 e seu corolário são úteis no cálculo de limites.



EXEMPLO 8

Vamos Calcular o $\lim_{x \rightarrow -2} (x - x^3 + 2|x|)$.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos escrever $x - x^3 + 2|x| = (f + g)(x)$, onde $f(x) = x - x^3$ e $g(x) = 2|x|$. Além disso, já sabemos que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = 6$. A função $g(x)$ é o produto da função constante igual a 2 para todo $x \in \mathbb{R}$ pela função $h(x) = |x|$. Como $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = h(-2) = 2$, segue do item (a) do Corolário 4 que $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 2(\lim_{x \rightarrow -2} h(x)) = 4$.

Portanto, pelo item (a) do Teorema 3,

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x - x^3 + 2|x|) = 6 + 4 = 10.$$

EXEMPLO 9

Vamos calcular o $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x - 2)^2$.

Para isto, consideremos o polinômio $p(x) = x^2 + 3x - 2$. Já sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} p(x) = p(0) = -2.$$

Portanto, pelo item (b) do Teorema 3,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x - 2)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} (p(x))^2 = (\lim_{x \rightarrow 0} p(x))(\lim_{x \rightarrow 0} p(x)) = (-2)^2 = 4.$$

Você também poderia observar que

$$(x^2 + 3x - 2)^2 = x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 12x + 4$$

é um polinômio, para então concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x - 1)^2 = 0^4 + 6 \times 0^3 + 5 \times 0^2 - 12 \times 0 + 4 = 4.$$

EXEMPLO 10

Vamos Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$.



Consideremos os polinômios $p(x) = x^3 - 2x + 1$ e $q(x) = x^2 - 1$ definidos em $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Vemos, portanto, que $\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \left(\frac{p}{q}\right)(x)$ para todo $x \in D$ e $q(x)$ não se anula em D . Dado que $\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = p(2) = 5$ e $\lim_{x \rightarrow 2} q(x) = q(2) = 3 \neq 0$, segue do item (c) do Teorema 3 que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 2x + 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1} = \frac{5}{3}.$$

EXEMPLO 11

Vamos Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$.

Consideremos os polinômios $p(x) = x^3 - 2x + 1$ e $q(x) = x^2 - 1$ definidos em $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Vemos, portanto, que

$$\frac{p}{q}(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}, \text{ e } q(x) \neq 0, \text{ para todo } x \in D.$$

Entretanto, como $\lim_{x \rightarrow 1} p(x) = p(1) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1} q(x) = q(1) = 0$, não podemos aplicar o item (c) do Teorema 3 (visto que o limite da função do denominador é igual a zero).

Devemos então proceder de outra maneira para tentar calcular o limite.

Lembremos que, como $x = 1$ anula os polinômios $p(x)$ e $q(x)$, então $x = 1$ é raiz de ambos os polinômios. Assim, $h(x) = x - 1$ é um dos fatores na fatoração em polinômios irredutíveis de $p(x)$ e $q(x)$. Temos que $p(x) = (x - 1)(x^2 + x - 1)$ e $q(x) = (x - 1)(x + 1)$, portanto,

$$\frac{p}{q}(x) = \frac{(x - 1)(x^2 + x - 1)}{(x - 1)(x + 1)},$$

donde

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}.$$

Note que, como $x = 1 \notin D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}.$$



Agora sim, como $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 1 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2 \neq 0$, podemos aplicar o item (c) do Teorema 3 e concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 1}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x + 1} = \frac{1}{2}.$$

Um ponto muito importante a ser observado, é que a igualdade (1) acima se verifica, pois ao tomarmos o limite quando x tende para 1, o fazemos tomando valores de $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e de fato, para qualquer desse valores, ao substituímos no numerador e denominador do primeiro membro da igualdade os termos $(x - 1)$ do numerador e denominador se cancelam. Não é verdade que as funções $\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ e $\frac{(x^2 + x - 1)}{(x + 1)}$ sejam iguais; a primeira tem como domínio o conjunto $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ e a segunda tem como domínio o conjunto $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, mas para efeito do cálculo do limite, isto não importa.

Em muitas situações pode ser útil usar a seguinte bem conhecida identidade:

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + yx^{k-2} + \dots + y^{k-2}x + y^{k-1}). \quad (1)$$

Pondo $x = \sqrt[k]{b}$ e $y = \sqrt[k]{a}$ em (1), obtém-se

$$b - a = (\sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a})(\sqrt[k]{b^{k-1}} + \sqrt[k]{a} \sqrt[k]{b^{k-2}} + \dots + \sqrt[k]{a^{k-2}} \sqrt[k]{b} + \sqrt[k]{a^{k-1}}). \quad (2)$$

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right].$

EXEMPLO 12

Não podemos utilizar o Corolário 4(b), pois os limites $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x}$ e $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{1-x^3}$ não existem (justifique). Utilizando a identidade $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ que se deduz imediatamente da identidade (1) acima, obtemos

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{1+x+x^2}{1-x^3} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{x^2+x-2}{1-x^3},$$

cujo limite quando $x \rightarrow 1$ poderia ser calculado pelo Teorema 3, se o denominador da última expressão não se anulasse em $x = 1$, o que não é o caso. Fatorando numerador e o denominador dessa última fração, obtemos

$$\frac{x^2+x-2}{1-x^3} = \frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{x+2}{1+x+x^2}.$$



Assim, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = \frac{3}{3} = 1.$$

EXEMPLO 13

Seja $a > 0$. Calcular $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x}$.

Note que se x está no intervalo $(a - \frac{a}{2}, a + \frac{a}{2})$, temos que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} < \sqrt{x} < \frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{2}}$. Assim,

$$b = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} + \sqrt{a} < \sqrt{x} + \sqrt{a}.$$

Temos então que

$$b|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < (\sqrt{x} + \sqrt{a})|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = |x - a|.$$

Portanto, se (x_n) é uma sequência que tende a a , vemos que $(\sqrt{x_n})$ tende a \sqrt{a} . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

O argumento utilizado no exemplo acima se generaliza para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a}.$$

EXEMPLO 14

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Não podemos utilizar o Teorema 3 diretamente, pois o denominador da fração se anula em $x = 1$. Mas, podemos escrever

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

3.4 Exercícios

1. Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x + 7}{x^2 - 6x + 8};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3};$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 2)^3 + 2|x|}{x^4 + x^2 + \sqrt{2}};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}.$$

2. Sejam k um inteiro positivo e a um número real.

$$(a) \text{ Mostre que } \lim_{x \rightarrow a} (x^k - a^k) = 0.$$

$$(b) \text{ Mostre que } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^k - a^k}{x - a} = ka^{k-1}.$$

$$(c) \text{ Escrevendo } x^k - a^k = \frac{x^k - a^k}{x - a} (x - a) \text{ para } x \neq a, \text{ obtenha (a) a partir de (b).}$$

3. Calcule

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}.$$

Sugestão: Pode ser útil fazer a mudança de variável $1 + x = u^6$.

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}.$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}.$$



4

LIMITES LATERAIS, INFINITOS E NO INFINITO

Sumário

4.1	Limites Laterais	2
4.2	Limites Infinitos e Limites no Infinito	5
4.3	Exercícios	13
4.4	Limites no Infinito	14
4.5	Exercícios	22

4.1 Limites Laterais

Algumas vezes o limite de uma determinada função, quando x tende a um número a , pode não existir, mas a função pode tender a um certo número l_1 que independe da sequência escolhida quando x tende a a pela esquerda, ou tender a um certo número l_2 quando x tende a a pela direita, podendo não existir um dos números ou existirem e serem distintos. Vejamos um exemplo.

EXEMPLO 1

Seja f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por, $f(x) = -1$ se $x < 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$.

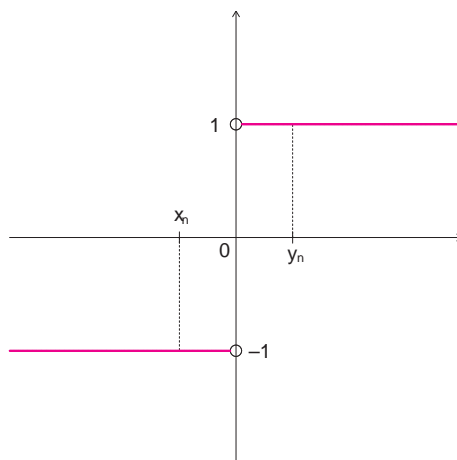


Figura 4.1: Limites laterais em $x = 0$

Note que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe, pois dada as sequências $x_n = -\frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{n}$, ambas convergindo a zero, temos que, por um lado, $f(x_n) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto converge para -1. Por outro lado, $f(y_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto converge para 1.

Note que, na verdade, para qualquer sequência (x_n) tal que $x_n < 0$ para todo n , com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, tem-se $f(x_n) = -1$ para todo n ; logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -1$. Por outro lado, dada qualquer sequência (y_n) tal que $y_n > 0$ para todo n , com $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, tem-se $f(y_n) = 1$ para todo n ; logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1$.

EXEMPLO 2

Consideremos a função f definida em \mathbb{R} , dada por $f(x) = x$ se $x \leq 0$ e $f(x) = x + 1$ se $x > 0$.

Neste caso, também não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Para ver isso, basta considerar as sequências $x_n = -\frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{n}$. Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, enquanto que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 1 = 1$.

Exatamente como no exemplo anterior, dada qualquer sequência (x_n) tal que $x_n < 0$ para todo n , com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. E, dada qualquer sequência (y_n) tal que $y_n > 0$ para todo n , com $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n + 1 = 1$.

Nos dois exemplos acima, vemos que, apesar de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existir, ocorre o fenômeno, acima citado, quando nos restringimos exclusivamente a valores de x menores do que zero ou a valores de x maiores do que zero. Em ambos os casos, com essas restrições sobre os valores de x , os limites existem nos dois exemplos. Isto caracteriza o fato dos limites laterais de f à esquerda e à direita de $a (= 0)$ existirem para ambas as funções, quando x tende a a .

Isto motiva, em geral, as seguintes definições.

Sejam $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que para todo $r > 0$, o intervalo $(a - r, a)$ intersecta D . Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela esquerda é igual a l , escrevendo $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$, se para toda sequência (x_n) , com $x_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

 DEFINIÇÃO 1
LIMITE LATERAL

ESQUERDO

No Exemplo 1, temos que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ e no Exemplo 2, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. Nesse caso, l é chamado de *limite lateral esquerdo* de f em a .

Sejam $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que para todo $r > 0$, o intervalo $(a, a + r)$ intersecta D . Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita é igual a l , escrevendo $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$, se para toda sequência (x_n) , com $x_n > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

 DEFINIÇÃO 2
LIMITE LATERAL DIREITO


Nos Exemplos 1 e 2, temos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. Nesse caso, l é chamado de *limite lateral direito* de f em a .

Note que se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ são tais que todos os intervalos da forma $(a-r, a)$ e $(a, a+r)$ intersectam D , então o fato de se ter $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ implica que $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$. Com efeito, por definição de limite, qualquer sequência (x_n) tendendo para a , tem-se que a sequência $(f(x_n))$ tende para l , independentemente do modo como (x_n) tende para a . Assim, se $x_n < a$ ou $x_n > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $(f(x_n))$ tende para l , ou seja, os limites à esquerda e à direita de a coincidem e são iguais à l .

O Teorema abaixo, do qual acabamos de provar uma parte, afirma que as duas condições são equivalentes.

TEOREMA 3

Sejam $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que para todo $r > 0$, os intervalos $(a-r, a)$ e $(a, a+r)$ intersectam D . Então, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$.

DEMONSTRAÇÃO

A demonstração da parte que falta segue das definições, repartindo os termos de uma sequência que converge para a em dois grupos: os termos menores do que a e os termos maiores do que a .

EXEMPLO 3

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ se $x < 0$ e $f(x) = x$ se $x > 0$, cujo gráfico esboçamos na figura a seguir.

Se tomarmos qualquer sequência (x_n) de números reais com $x_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, teremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$. Agora, se tomarmos qualquer sequência (x_n) de números reais com $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, teremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Assim, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ e, portanto, pelo Teorema 3, temos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.



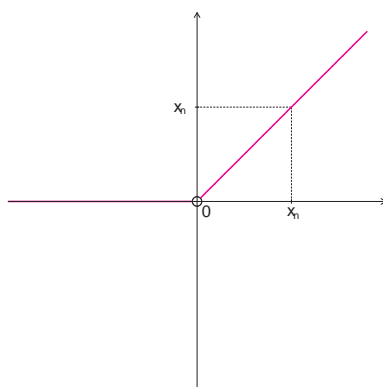


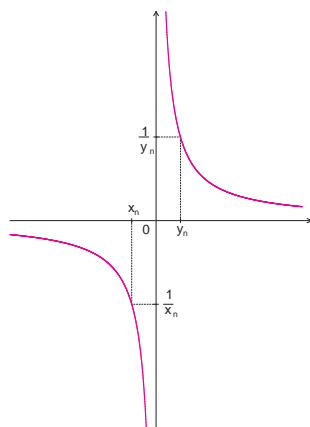
Figura 4.2: Gráfico de função do Exemplo 3

4.2 Limites Infinitos e Limites no Infinito

Como motivação do conceito que vamos apresentar a seguir, comecemos com os dois exemplos abaixo.

Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x}$, definida para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, cujo gráfico esboçamos na figura abaixo.

EXEMPLO 4

Figura 4.3: Gráfico de $y = \frac{1}{x}$

Olhando para o gráfico de f é fácil perceber que $f(x)$ decresce ilimitadamente quando x se aproxima de zero por valores menores do que zero e que $f(x)$

cresce ilimitadamente quando x se aproxima de zero por valores maiores do que zero. Precisamente, se tomarmos qualquer sequência (x_n) tal que $x_n < 0$ para todo n e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, teremos $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$ (isto segue da propriedade (d') da Seção 3, Unidade 2); e se tomarmos qualquer sequência (y_n) tal que $y_n > 0$ para todo n e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, teremos $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = +\infty$ (isto segue da propriedade (d) da Seção 3, Unidade 2).

EXEMPLO 5

Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, definida para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, cujo gráfico esboçamos na figura a seguir.

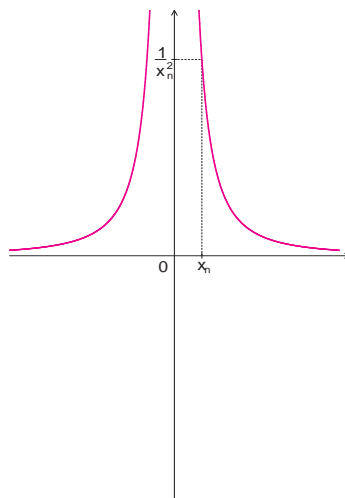


Figura 4.4: Gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$

Olhando para o gráfico de f , é fácil perceber que $f(x)$ cresce ilimitadamente quando x se aproxima de zero. Precisamente, se tomarmos qualquer sequência (x_n) de números diferentes de zero tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, teremos $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2} = +\infty$ (realmente, como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = 0$ e $x_n^2 > 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2} = +\infty$, conforme vimos na Propriedade (d) da Seção 3, Unidade 2).

Note que o comportamento da função, deste último exemplo, é diferente do

comportamento da função do exemplo anterior para valores de x próximos de zero.

Em geral, temos as seguintes definições.

Sejam $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecte $D \setminus \{a\}$. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ se, para toda sequência (x_n) de elementos de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$.

DEFINIÇÃO 4
LIMITE $+\infty$

Sejam $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecte $D \setminus \{a\}$. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ se, para toda sequência (x_n) de elementos de $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$.

DEFINIÇÃO 5
LIMITE $-\infty$

De maneira completamente análoga ao feito anteriormente, podemos definir sem dificuldade o que se entende por

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty,$$

e por

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Vamos a seguir dar uma interpretação geométrica a algumas das situações descritas acima.

Diremos que a reta vertical $x = a$ é uma *assíntota vertical* ao gráfico de uma função f se for satisfeita uma qualquer das condições abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty.$$

É importante observar que basta que uma das condições mencionadas acima se cumpra para se concluir que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de uma função f . Observe também que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, então $x = a$ não será uma assíntota vertical.

Portanto, se a reta vertical $x = a$ for uma assíntota vertical, o gráfico de f se aproxima cada vez mais dessa reta (para cima ou para baixo), à medida que x tende a a pela direita ou pela esquerda.

EXEMPLO 6

Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, segue da definição que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f , embora tenhamos $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$.

EXEMPLO 7

Seja a um número real arbitrário e consideremos a função $f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x-a}$, cujo gráfico esboçamos na figura a seguir.

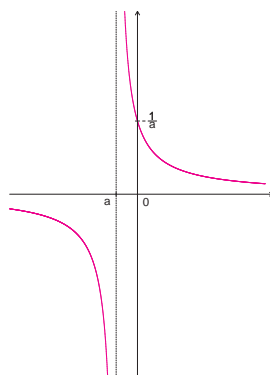


Figura 4.5: Gráfico de $y = \frac{1}{x-a}$

Observemos que quando x tende para a por valores menores do que a , o denominador $x - a$ tende para zero por valores negativos. Como o numerador é a função constante igual a 1, teremos $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$. Analogamente, quando x tende para a por valores maiores do que a , o denominador $x - a$ tende à zero por valores positivos, donde $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ e a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f . Verifique na figura a aproximação do gráfico de f com a reta $x = a$.

Introduziremos agora, uma notação heurística que facilitará a determinação de uma assíntota vertical. Esta notação é apenas um modo figurativo de se raciocinar, não sendo totalmente provida de sentido matemático.

No exemplo acima, a função $f(x) = \frac{1}{x-a}$ cumpre a seguinte condição: a função do numerador é a função $g(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, para a qual $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = 1$; a função $x - a$ do denominador tende a zero por valores negativos, desde que façamos x tender a a por valores menores do que a . Neste caso, denotaremos este limite por $\lim_{x \rightarrow a^-} x - a = 0^-$. Do mesmo modo, $\lim_{x \rightarrow a^+} x - a = 0^+$. Usaremos neste caso a seguinte notação:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

É importante notar que $\frac{1}{0^-}$ e $\frac{1}{0^+}$ não têm sentido matemático! São apenas notações que indicam que o numerador tende a 1 e o denominador, no primeiro caso, tende a zero por valores negativos. Ora, o número positivo 1 dividido por números cada vez mais próximos de zero e negativos dão como resultado números cada vez maiores em valor absoluto e negativos, motivo pelo qual escrevemos $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = \frac{1}{0^-} = -\infty$.

Analogamente, no segundo caso, a notação indica que o numerador tende a 1 e o denominador tende a zero por valores positivos. Agora, o número positivo 1 dividido por números cada vez mais próximos de zero e positivos dão como resultado números cada vez maiores e positivos, motivo pelo qual temos que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

De modo geral, se $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, com $\lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = l \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = 0^+$, então

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{l}{0^+} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } l > 0 \\ -\infty, & \text{se } l < 0. \end{cases}$$

Se $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = 0^-$, então

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{h(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } l < 0 \\ -\infty, & \text{se } l > 0. \end{cases}$$

Um enunciado análogo ao acima vale no caso em que $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = l \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0^+$ ou 0^- .

Observemos que no caso em que $l = 0$, nada podemos concluir. Vejamos isto em um exemplo.

EXEMPLO 8

Sejam $h(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2 - 1$. Temos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, se $g(x) = x(x-1)^2$, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Finalmente, se $h(x) = 1 - x$ e $g(x) = x(x-1)^2$, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x(x-1)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

EXEMPLO 9

Consideremos a função $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Verifiquemos que a reta $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} x - 1 = -2$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} x + 1 = 0^-$, segue que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty.$$

Analogamente, como $\lim_{x \rightarrow -1^+} x - 1 = -2$ e $\lim_{x \rightarrow -1^+} x + 1 = 0^+$, segue que

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty.$$

EXEMPLO 10

Consideremos a função $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Verifiquemos que as retas $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais ao gráfico de f .

Com efeito, dado que $\lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 1 = 0^+$, segue que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$



De modo análogo, como $\lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$ e $\lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 1 = 0^-$, segue que

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

Qualquer um dos dois limites garante, segundo a definição, que a reta $x = -1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Agora, dado que $\lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 1 = 0^-$, segue que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

De modo análogo, como $\lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 = 0^+$, segue que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

De novo, qualquer um dos dois limites garante, segundo a definição, que a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Observemos que nos exemplos acima, as retas assíntotas verticais correspondem aos valores de x que anulam o denominador da função analisada. Nos Exemplos 4, 5 e 6, foram as retas $x = 0$, no Exemplo 7, a reta $x = a$, no Exemplo 8 a reta $x = -1$ e no Exemplo 9, as retas $x = -1$ e $x = 1$. Podemos ser induzidos a pensar que sempre será assim. O exemplo a seguir, nos mostra que esses valores de x serão candidatos mas não serão necessariamente assíntotas verticais.

EXEMPLO 11

Consideremos a função $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Embora $x = -1$ e $x = 1$ anulem o denominador da função f , vejamos que a reta $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f , mas o mesmo não ocorre com a reta $x = 1$.

Com efeito, como $\lim_{x \rightarrow -1^-} 2x^2 - x - 1 = 2$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 1 = 0^+$, segue que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$



Este limite já garante que a reta $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de f . Mesmo assim, analisemos o limite à direita de -1 . Como $\lim_{x \rightarrow -1^+} 2x^2 - x - 1 = 2$

e $\lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 1 = 0^-$, segue que $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$.

Agora, notemos que embora $x = 1$ anule o denominador de f , ele também anula o numerador, ou seja, $x = 1$ é raiz dos polinômios $2x^2 - x - 1$ e $x^2 - 1$. Isso significa que o polinômio $x - 1$ divide ambos os polinômios. Precisamente, temos que $2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$ e $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(2x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3$ e $\lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2 \neq 0$, segue da propriedade do limite do quociente de duas funções que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{x + 1} = \frac{3}{2}$. Assim, a reta $x = 1$ não é assíntota vertical ao gráfico da função f .

4.3 Exercícios

- Seja $f(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
 - Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
 - A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f ?
- Seja $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
 - A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f ?
- Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ se $x \leq 0$ e $f(x) = -\frac{1}{x^4}$ se $x > 0$.
 - Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
 - A reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f ?
- Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$ se $x < 2$, $f(2) = 0$ e $f(x) = \frac{1}{(2-x)^3}$ se $x > 2$.
 - Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.
 - A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f ?
- Seja a um número real arbitrário e defina $f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$.
 - Calcule $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
 - A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f ?
- Ache as assíntotas verticais ao gráfico de f , caso existam, para as funções f indicadas abaixo:
 - $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$; (b) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}$; (c) $f(x) = \frac{x^2-1}{1-x}$;
 - $f(x) = \frac{x^2-5}{x-\sqrt{5}}$; (e) $f(x) = \frac{x^2}{x-\sqrt{5}}$; (f) $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$.



4.4 Limites no Infinito

Até o momento, temos estudado o comportamento da imagem $f(x)$, quando x assume valores no domínio de uma função f que se aproximam arbitrariamente de um número real a , ou seja, o estudo dos limites da forma

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty.$$

Estaremos, agora, interessados em estudar o comportamento da imagem $f(x)$, quando a variável x cresce ilimitadamente ou quando a variável x é negativa e cresce ilimitadamente em módulo. Precisamente, estaremos interessados em compreender o significado dos limites no infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

EXEMPLO 12

Consideremos as funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$, definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se observarmos as figuras 3 e 4 que representam os gráficos das duas funções, podemos intuir que à medida que x cresce ilimitadamente, tanto $f(x)$ quanto $g(x)$ se aproximam de zero. O mesmo acontece à medida que os valores de x decrescem indefinidamente. Na verdade, é um fato natural que, por exemplo, à medida que x cresce indefinidamente, $f(x)$ corresponde a dividir o número 1 por números cada vez maiores, logo o resultado fica cada vez menor.

Mais precisamente, para qualquer sequência (x_n) , de números não nulos, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ e para qualquer sequência (y_n) , de números não nulos, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = 0.$$

Esses resultados vêm da simples aplicação das propriedades (d) e (d') da Seção 2, Unidade 2. Com efeito, tomemos $\left(z_n = \frac{1}{x_n}\right)$. Como $z_n > 0$ para n suficientemente grande (visto que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$), e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, segue da propriedade (d) mencionada que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$



Um argumento semelhante prova as outras afirmações.

Na verdade, o mesmo raciocínio prova que para qualquer inteiro positivo k ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^k} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n^k}$$

EXEMPLO 13

Consideremos a função $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 8}$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$.

Note que colocando x^2 em evidência no numerador e denominador, obtemos

$$f(x) = \frac{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}{x^2(2 - \frac{8}{x^2})}. \text{ Assim,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}{x^2(2 - \frac{8}{x^2})}.$$

Agora, se (x_n) é uma sequência arbitrária de números diferentes de 2 e -2, com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 1}{2x_n^2 - 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2(1 + \frac{1}{x_n^2})}{x_n^2(2 - \frac{8}{x_n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{x_n^2})}{(2 - \frac{8}{x_n^2})}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x_n^2} = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{8}{x_n^2} = 2$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 1}{2x_n^2 - 8} = \frac{1}{2},$$

sugerindo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 8} = \frac{1}{2}$.

Observe que se tomássemos uma sequência arbitrária (y_n) de números reais diferentes de 2 e -2, com $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, obteríamos com o mesmo raciocínio,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n^2 + 1}{2y_n^2 - 8} = \frac{1}{2},$$

sugerindo que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 8} = \frac{1}{2}$.

Os exemplos acima sugerem a seguinte definição:



DEFINIÇÃO 6
LIMITE EM $+\infty$

Sejam f uma função definida em algum intervalo da forma $(d, +\infty)$ e l um número real. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (lê-se: limite de $f(x)$ quando x tende a mais infinito é igual a l) se, para qualquer sequência (x_n) de elementos de $(d, +\infty)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

DEFINIÇÃO 7
LIMITE EM $-\infty$

Seja f uma função definida em algum intervalo da forma $(-\infty, d)$ e seja l um número real. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ (lê-se: limite de $f(x)$ quando x tende a menos infinito é igual a l) se, para qualquer sequência (x_n) de elementos de $(-\infty, d)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

Pode-se provar, em ambos os casos, que se o limite l existe, ele é único. Neste caso, dizemos que a reta $y = l$ é uma **assíntota horizontal** ao gráfico de f .

A interpretação geométrica da assíntota horizontal é a seguinte: o gráfico de f se aproxima indefinidamente da reta horizontal $y = l$ à medida que x se afasta da origem ilimitadamente para a esquerda ou para a direita.

Assim, pelos exemplos acima, temos que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^k}$ e a reta $y = \frac{1}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função $g(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 8}$.

Vejamos agora outros dois tipos de comportamento de $f(x)$ quando x cresce indefinidamente ou quando x decresce indefinidamente.

Seja k um inteiro, com $k \geq 1$, e consideremos a função $f(x) = x^k$, definida para $x \in \mathbb{R}$.

Como $f(x) = x^{k-1}x \geq x$ para todo $x \geq 1$, pois $x^{k-1} \geq 1$ para todo $x \geq 1$, segue que $f(x)$ cresce indefinidamente à medida que x cresce indefinidamente.

Além disso, para k par, a função f é par (isto é, $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Consequentemente, o gráfico de f é simétrico com relação ao eixo dos y e, portanto, também $f(x)$ cresce ilimitadamente à medida que x decresce ilimitadamente. Para k ímpar, a função f é ímpar (isto é, $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Consequentemente, o gráfico da função f é simétrico com

relação à origem, o que nos permite concluir que $f(x)$ decresce ilimitadamente à medida que x decresce ilimitadamente.

O que acabamos de observar motiva a definição a seguir.

Seja f uma função definida em algum intervalo da forma $(d, +\infty)$. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (respectivamente $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$) se, para qualquer sequência (x_n) de elementos de $(d, +\infty)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$ (respectivamente $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$).

DEFINIÇÃO 8
LIMITES INFINITOS NO
INFINITO

EXEMPLO 14

Seja k um inteiro positivo qualquer. Mostremos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} cx^k = +\infty \text{ se } c > 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} cx^k = -\infty \text{ se } c < 0.$$

Com efeito, seja (x_n) uma sequência qualquer tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Como $x_n \geq 1$ a partir de um certo n , segue que $x_n^k \geq x_n$ a partir de um certo n , e daí resulta que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k = +\infty$. Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n^k = +\infty \text{ se } c > 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} cx_n^k = -\infty \text{ se } c < 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} cx^k = +\infty \text{ se } c > 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} cx^k = -\infty \text{ se } c < 0.$$

Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^{11} = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^8) = -\infty.$$

Seja f uma função definida em um intervalo da forma $(-\infty, d)$. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (respectivamente $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$) se, para qualquer sequência (x_n) de elementos de $(-\infty, d)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$ (respectivamente $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$).

DEFINIÇÃO 9
LIMITES INFINITOS NO
MENOS INFINITO



Analogamente ao que acabamos de ver no caso em que x cresce indefinidamente, temos que se k é um inteiro positivo par, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} cx^k = +\infty \text{ se } c > 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} cx^k = -\infty \text{ se } c < 0.$$

Notemos, neste caso, que a função $f(x) = cx^k$ é par para qualquer $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto, a afirmação pode ser deduzida do Exemplo 14.

Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^6 = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^4) = -\infty.$$

Se k um inteiro positivo ímpar, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} cx^k = -\infty \text{ se } c > 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} cx^k = +\infty \text{ se } c < 0.$$

Notemos que, neste caso, a função $f(x) = cx^k$ é ímpar para qualquer $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto, essa afirmação também decorre do Exemplo 14.

Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5}x^3 = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7x^9) = +\infty.$$

EXEMPLO 15

Consideremos a função polinomial $p(x) = 3x^3 - 25x^2 + 4x - 7$.

Colocando o termo de maior grau do polinômio em evidência, obtemos

$$p(x) = 3x^3 \left(1 - \frac{25}{3x} + \frac{4}{3x^2} - \frac{7}{3x^3} \right).$$

Seja (x_n) uma sequência de números reais não nulos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25}{3x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3x_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{3x_n^3} = 0,$$

segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{25}{3x_n} + \frac{4}{3x_n^2} - \frac{7}{3x_n^3} \right) = 1.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^3 = +\infty$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) = +\infty$. Uma vez que (x_n) é uma sequência arbitrária que tende a $+\infty$, temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$.

O mesmo raciocínio mostra que $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$.



É importante observar no exemplo acima, que tanto o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)$ quanto o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)$ foram ditados pelo termo de maior grau do polinômio, ou seja, por $3x^3$. Na verdade, esse fato não é uma particularidade do polinômio $p(x) = 3x^3 - 25x^2 + 4x - 7$, como mostra o próximo exemplo.

EXEMPLO 16

Seja $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ uma função polinomial, em que $m \geq 1$ e $a_m \neq 0$. Então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_m x^m.$$

Vamos mostrar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_m x^m$.

Com efeito, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, temos

$$p(x) = a_m x^m \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m} \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_m} \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m} \frac{1}{x^m} \right).$$

Seja (x_n) uma sequência arbitrária de números diferentes de zero tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{m-1}}{a_m} \frac{1}{x_n} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{a_m} \frac{1}{x_n^{m-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0}{a_m} \frac{1}{x_n^m} = 0,$$

segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m} \frac{1}{x_n} + \dots + \frac{a_1}{a_m} \frac{1}{x_n^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m} \frac{1}{x_n^m} \right) = 1.$$

Suponhamos $a_m > 0$. Pelo Exemplo 14, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_m x^m = +\infty$. Aplicando a Proposição 11, Unidade 2, obtemos $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) = +\infty$. Como (x_n) é arbitrária tendendo a $+\infty$, acabamos de mostrar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$.

Usando o mesmo raciocínio, obtemos $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty$ se $a_m < 0$.

A justificativa do fato de que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_m x^m$$

é completamente análoga.

Agora, fica fácil determinar para um polinômio $p(x)$, ambos os limites no infinito. Por exemplo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + 18x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^4 + 45x^3 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^4) = -\infty$.

Vimos no Exemplo 13 que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 8} = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 8}$. Um fato interessante a ser observado, é que os dois limites coincidem e são iguais a uma fração cujo numerador e denominador correspondem aos coeficientes do termo de maior grau dos respectivos polinômios do numerador e denominador da função racional $\frac{x^2 + 1}{2x^2 - 8}$.

No próximo exemplo, analisaremos os limites no infinito de funções racionais em toda generalidade.

EXEMPLO 17

Consideremos a função racional

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

onde m e n são inteiros positivos, $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$, definida em $\mathbb{R} \setminus D$, onde D é o conjunto das raízes do denominador de f . Vamos estudar $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

Para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, temos

$$f(x) = \frac{a_m x^m \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m} \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_m} \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m} \frac{1}{x^m} \right)}{b_n x^n \left(1 + \frac{b_{n-1}}{b_n} \frac{1}{x} + \cdots + \frac{b_1}{b_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{b_n} \frac{1}{x^n} \right)}.$$

Como, em vista do Exemplo 14,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m} \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_m} \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m} \frac{1}{x^m} \right) = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{b_{n-1}}{b_n} \frac{1}{x} + \cdots + \frac{b_1}{b_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{b_n} \frac{1}{x^n} \right) = 1,$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}.$$

Temos então três casos a considerar.

1^o caso: $m > n$.



Neste caso, $\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$ é um polinômio de grau $m - n \geq 1$, e recaímos nas situações já vistas segundo $\frac{a_m}{b_n}$ é positivo ou negativo.

2^o caso: $m = n$.

Neste caso, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_m}{b_n}$.

3^o caso: $m < n$

Neste caso, em vista do Exemplo 12 temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_m}{b_n}x^{m-n} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

Em particular, temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^5 - 8x^2 + 4x}{7x^4 + 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{7}x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 8x^2 + 4x}{7x^4 + 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{7}x = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^6 - 5x^2 + 10x - 2}{3x^6 + 7x^2 + 10} = \frac{4}{3}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{50x^4 + 12x^3 + x - 4}{3x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 8} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{50}{3x} = 0.$$

Considere a função racional $f(x) = \frac{7x^7 - 5x^4 + 3x^2 - x + 8}{4x^7 - 3x^3 + 5x - 1}$. Pelo que acabamos de ver no Exemplo 17, temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^7 - 5x^4 + 3x^2 - x + 8}{4x^7 - 3x^3 + 5x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^7 - 5x^4 + 3x^2 - x + 8}{4x^7 - 3x^3 + 5x - 1} = \frac{7}{4}.$$

Assim, a reta $y = \frac{7}{4}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

EXEMPLO 18



4.5 Exercícios

1. Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right); \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{2}{x^3}\right);$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 9x}{4x^5 - 50x^3}; \quad (d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + 5x}{4x^5 - 50x^3};$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^7 + 500x}{x^8 + 1}; \quad (f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^7 + 500x}{x^6 - 900x^3};$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^7 + 500x}{x^6 - 900x^3}; \quad (h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} - 8;$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3 - 7}}; \quad (j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9x^2 + 1}{x^2 + 50}};$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{2x + 1}; \quad (m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{x}};$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}); \quad (o) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x});$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 1}; \quad (q) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x + 1}).$$

Sugestões:

Para (l): Para $x > -\frac{1}{2}$,

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2}}{2x + 1} = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{(2x + 1)^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{4x^2 + 4x + 1}}.$$

Para (n): Para $x \in \mathbb{R}$,

$$x - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}.$$

Para (o): Para $x \geq 0$,

$$\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}.$$



Para (p): Para $x > 0$,

$$\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 1} = \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

Para (q): Para $x > 0$,

$$x - \sqrt{x + 1} = \frac{(x - \sqrt{x + 1})(x + \sqrt{x + 1})}{x + \sqrt{x + 1}} = \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x + 1}} = \frac{x - 1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{\sqrt{x + 1}}{x}}.$$

2. Determine os valores de α e β para que:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 1}{x + 1} - \alpha x - \beta \right] = 0;$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + x + 1}{3x^2 - x + 2} = 1 .$

3. Decida se os gráficos das funções dos itens (a), (c), (e), (g), (i), (l), (n) e (p), do Exercício 1, possuem assíntotas horizontais, justificando a sua resposta.



5

TEOREMA DO CONFRONTO E LIMITES FUNDAMENTAIS

Sumário

5.1	O Teorema do Confronto	2
5.2	O Limite Trigonométrico Fundamental	3

5.1 O Teorema do Confronto

A noção de limite de uma função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto a , com a propriedade que todo intervalo da forma $(a - r, a + r)$ intersecta $D \setminus \{a\}$, leva apenas em conta o comportamento de f na proximidade de a , mas não em a . Isto, em particular, implica que se $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$ é uma outra função, com a propriedade que todo intervalo da forma $(a - r, a + r)$ intersecta $D' \setminus \{a\}$, tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \neq a$ em algum intervalo da forma $(a - r', a + r')$ e em $D \cap D'$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existe se e somente se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe e, neste caso, os limites coincidem.

Esta propriedade esclarece ainda mais uma afirmação do tipo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1),$$

que fizemos anteriormente.

O próximo Teorema, conhecido como *propriedade do confronto*, é muito útil para o cálculo de certos limites.

Suponhamos que sejam dadas três funções $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$ e $h: D'' \rightarrow \mathbb{R}$ e um número real a tais que todo intervalo da forma $(a - r, a + r)$ intersecta $D \setminus \{a\}$, $D' \setminus \{a\}$ e $D'' \setminus \{a\}$.

TEOREMA 1 PROPRIEDADE DO CONFRONTO

Sejam f, g, h e a como acima e tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq a$ em algum intervalo da forma $(a - r', a + r')$ e em $D \cap D' \cap D''$. Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l.$$

Este resultado é bastante intuitivo, e decorre diretamente do Teorema 8 da Unidade 2.

EXEMPLO 1

Vejamos que $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$.

Observe que aqui não podemos utilizar a regra do produto do limite, pois $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ não existe. De fato, se $x_n = \frac{2}{n\pi}$, temos que (x_n) tende a zero,



mas

$$\cos \frac{1}{x_n} = \begin{cases} 1, & \text{se } n \equiv 0, \text{ mod } 4, \\ 0, & \text{se } n \equiv 1, \text{ mod } 4, \\ -1, & \text{se } n \equiv 2, \text{ mod } 4, \\ 0, & \text{se } n \equiv 3, \text{ mod } 4. \end{cases}$$

Apesar disso, o limite existe e vale zero. De fato, como $|\cos \frac{1}{x}| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, segue que

$$\left| x \cos \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x|, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Isto significa que

$$-|x| \leq x \cos \frac{1}{x} \leq |x|, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, segue do Teorema 1 que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0.$$

No exemplo acima utilizamos fortemente o fato de $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ e da função $\cos \frac{1}{x}$ ser limitada. O resultado a seguir mostra que esse fato é geral e decorre diretamente da Proposição 7 da Unidade 2.

Se $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada (na vizinhança de a) e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = 0$.

TEOREMA 2
TEOREMA DO
ANULAMENTO

5.2 O Limite Trigonométrico Fundamental

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Queremos calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Note que não podemos aplicar a regra do limite do quociente já que o limite do denominador é 0.

Este limite é tão importante, que leva o nome de *limite trigonométrico fundamental* e será estabelecido através de um teorema. Antes, porém, provemos um lema.



LEMA 3

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $|\sin x| \leq |x|$.

DEMONSTRAÇÃO

Suponhamos $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Pela figura 5.2, temos que o segmento de reta BC tem comprimento menor do que o arco BC (o menor caminho entre dois pontos é o segmento de reta que os une).

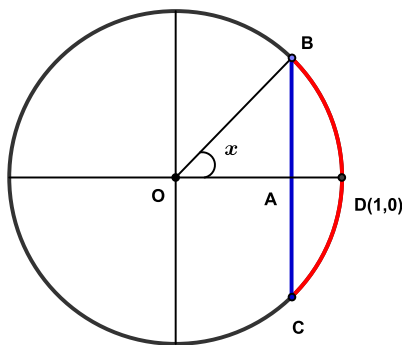


Figura 5.1: Comparando o seno com o arco.

Portanto, $2 \sin x \leq 2x$ e, logo, $|\sin x| \leq |x|$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Agora, se $x > \frac{\pi}{2}$, temos que

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} < x.$$

Por outro lado, se $x < 0$, então $-x > 0$ e pelo que acabamos de mostrar, $|\sin(-x)| \leq |-x|$, o que em vista da propriedade $\sin(-x) = -\sin x$, deduz-se que $|\sin x| \leq |x|$ para $x < 0$ também.

COROLÁRIO 4

Temos que $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$.

DEMONSTRAÇÃO

Temos pela identidade trigonométrica

$$\sin x - \sin a = 2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}$$

e pelo Lema 3 que

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a|.$$



Consequentemente, se (x_n) é uma sequência qualquer que tende para a , a sequência $(\sin x_n)$ tende para $\sin a$.

Mostremos que $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$.

De fato, da identidade $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, da regra de substituição e do Corolário 4, obtemos o desejado.

EXEMPLO 2

Tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

TEOREMA 5
LÍMITE FUNDAMENTAL

Provemos, inicialmente, que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

DEMONSTRAÇÃO

De fato, consideremos $0 < x < \frac{\pi}{2}$, e comparemos as áreas dos triângulos OAB e ODC e do setor circular ODB (ver a Figura 5.2).

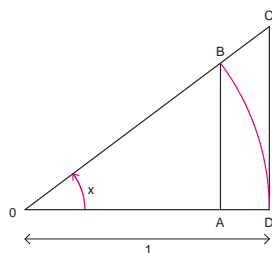


Figura 5.2: Comparando áreas.

Como

$$\text{Área do triângulo OAB} = \frac{\sin x \cos x}{2},$$

$$\text{Área do setor circular ODB} = \frac{x}{2},$$

$$\text{Área do triângulo ODC} = \frac{\tan x}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x},$$

obtemos

$$\frac{\sin x \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}.$$



Como $\sin x > 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, segue que

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Mas, pela propriedade dos limites de quocientes, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Agora, pela propriedade do confronto, obtemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Mostremos agora que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$.

De fato, como $\sin(-x) = -\sin x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (a função seno é ímpar), podemos escrever para $x < 0$,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin(-x)}{-x},$$

onde $-x > 0$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Em resumo, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Consequentemente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

como queríamos demonstrar.



EXEMPLO 3

Mostremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

De fato, como $\cos x \neq 0$ para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podemos escrever

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$. Pelo limite fundamental, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \times 1 = 1.$$

EXEMPLO 4

Mostremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

De fato, observemos inicialmente que $1 + \cos x \neq 0$ para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Assim, para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x} &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 + 1 = 2,$$

temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, pelo limite fundamental,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \right) = \\ &= 0 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$



EXEMPLO 5

Mostremos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Realmente, como $1 + \cos x \neq 0$ para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podemos escrever

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{1 + \cos x} = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos x}$$

para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$.

Portanto, pelo limite fundamental,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \right) = \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.
2. Calcule $\lim_{x \rightarrow a} (x^n - a^n) \cos \frac{1}{x - a}$.
3. Calcule
 - a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{bx}$;
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$.
4. Calcule os seguintes limites:
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 - 1}$;
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^3 - 1)}{x^2 - 1}$;
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^n - 1)}{x^m - 1}$.
5. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{tg} bx}$.
6. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$.
7. Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$.
8. Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$.





6

CÁLCULO DE LIMITES

Sumário

6.1	Limites de Sequências	3
6.2	Exercícios Recomendados	5
6.3	Limites de Funções	7
6.4	Exercícios Recomendados	8

Esta unidade será dedicada à apresentação de alguns exemplos de cálculo de limites e de propor uma lista de exercícios suplementares.

Iniciemos com a *regra de substituição* que utilizamos na unidade anterior quando efetuamos o seguinte cálculo:

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \lim_{x \rightarrow a} \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - a \right) = \cos a.$$

Trata-se do resultado muito útil a seguir.

PROPOSIÇÃO 1 REGRAS DE SUBSTITUIÇÃO

Sejam f e g duas funções para as quais faz sentido formar $g \circ f$. Seja a um número real tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Suponha que $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$ e que exista um intervalo da forma $(a - r, a + r)$ tal que $f(x) \neq b$ para todo x na interseção do domínio de f com o conjunto $(a - r, a + r) \setminus \{a\}$. Então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = l.$$

DEMONSTRAÇÃO

Seja (x_n) uma sequência qualquer de números reais distintos de a no domínio de f que converge para a . Como (x_n) converge para a , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a - r, a + r)$ para todo $n \geq n_0$. Logo, a sequência $(y_n)_{n \geq n_0}$, onde $y_n = f(x_n)$, tem seus elementos no domínio de g , distintos de a , e converge para b , já que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Portanto, como $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$, temos que a sequência $(g(f(x_n)))$ converge para l , o que mostra que $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = l$.

EXEMPLO 1

A regra de substituição nos permite calcular, por exemplo, $\lim_{x \rightarrow a} \cos(p(x))$, no qual $p(x)$ é um polinômio não constante.

De fato consideremos o polinômio não constante $q(x) = p(x) - b$, onde $b = p(a)$, do qual a é uma raiz. Como um polinômio não nulo tem um número finito de raízes, é claro que podemos encontrar um número real $r > 0$ tal que $q(x)$ não se anula em $(a - r, a + r) \setminus \{a\}$, ou seja, $p(x) \neq p(a) = b$. Como $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ e $\lim_{y \rightarrow b} \cos y = \cos b$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos(p(x)) = \cos(p(a)).$$



6.1 Limites de Sequências

Vamos nesta seção estabelecer alguns resultados mais finos sobre limites de sequências.

Seja $a > 0$, vamos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

EXEMPLO 2

Vamos, inicialmente, provar o resultado para $a > 1$. Seja (d_n) a sequência definida por $d_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Temos obviamente que $d_n > 0$. Por outro lado, da identidade

$$a - 1 = (\sqrt[n]{a} - 1) \left(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}} + \cdots + \sqrt[n]{a} + 1 \right),$$

obtemos que

$$a - 1 < (\sqrt[n]{a} - 1) n = d_n n.$$

Daí,

$$0 < d_n < \frac{a - 1}{n}.$$

Pela propriedade do confronto, obtemos $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$, o que implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

O limite também vale 1 se $a = 1$. Suponhamos agora que $0 < a < 1$, logo $\frac{1}{a} > 1$. Portanto, pelo caso já calculado, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

O próximo resultado trata dos limites de potências e é muito importante.

Seja $a > 0$ um número real. Tem-se que

PROPOSIÇÃO 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < a < 1, \\ \infty, & \text{se } a > 1 \end{cases}$$



DEMONSTRAÇÃO

Vamos inicialmente mostrar o caso $a > 1$. Escrevamos $h = a - 1$, logo $a = 1 + h$ com $h > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli (que pode ser provada sem dificuldade por indução) temos que

$$a^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nh) = \infty$, temos pela propriedade (c) da Seção 3, Unidade 2, que $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$.

Suponhamos agora que $0 < a < 1$, logo $\frac{1}{a} > 1$. Do que acabamos de provar, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = \infty,$$

logo da propriedade (d), Seção 3, Unidade 2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = 0.$$

No próximo exemplo calcularemos um limite interessante.

EXEMPLO 3

Tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

De fato, seja $a_n = \sqrt[n]{n}$, $b_n = \sqrt[2n]{n}$ e $c_n = b_n - 1$.

Sendo $n \geq 1$, temos que $\sqrt[2n]{n} \geq 1$, o que implica que $b_n = \sqrt[2n]{n} - 1 \geq 0$. Isto em particular nos diz que $c_n > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli temos

$$\sqrt[2n]{n} = b_n^n = (1 + c_n)^n \geq 1 + nc_n.$$

Assim, obtemos

$$0 \leq c_n \leq \frac{\sqrt[2n]{n} - 1}{n}.$$

Pela propriedade do confronto, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ e consequentemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$. Como $a_n = b_n^2$, segue-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right)^2 = 1.$$



6.2 Exercícios Recomendados

1. Determine o termo geral e calcule o limite da sequência

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \dots$$

2. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \dots + (-1)^n \frac{1}{4^n} \right].$$

3. Calcule o limite da sequência

$$2, 2, 3, 2, 31, 2, 317, 2, 3171, 2, 31717, \dots$$

4. Calcule o limite da sequência

$$\sqrt{5}, \sqrt{5\sqrt{5}}, \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}, \dots,$$

5. Calcule o limite da sequência cujo termo geral é

a) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}.$

b) $\frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3}.$

6. Diga se é finito ou infinito o limite da sequência cujo termo geral é

$$\frac{1}{n^{p+1}} + \frac{2^p}{n^{p+1}} + \frac{3^p}{n^{p+1}} + \dots + \frac{n^p}{n^{p+1}}.$$

7. Calcule

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n});$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}), \text{ onde } k \in \mathbb{N}.$

Sugestão: Pode ser útil usar a identidade:

$$b - a = \left(\sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} \right) \left(\sqrt[k]{b^{k-1}} + \sqrt[k]{b^{k-2}} \sqrt[k]{a} + \dots + \sqrt[k]{a^{k-1}} \right).$$



8. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cos n!}{n^3 + 1}$.

9. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2}$.

6.3 Limites de Funções

Iniciemos com uma proposição cujo conteúdo é bem intuitivo.

Seja $f: (d, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. Suponha que exista uma sequência (x_n) de elementos em (d, ∞) tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$. Então $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

PROPOSIÇÃO 3

Devemos mostrar que dada uma sequência (y_m) tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = \infty$, então $\lim_{m \rightarrow \infty} f(y_m) = \infty$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja M um número real positivo qualquer. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$, existe n_0 tal que $f(x_{n_0}) > M$. Se (y_m) é uma sequência tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = \infty$, então existe m_0 tal que para todo $m \geq m_0$ se tenha $y_m > x_{n_0}$. Como f é crescente, temos

$$m > m_0 \Rightarrow y_m \geq x_{n_0} \Rightarrow f(y_m) \geq f(x_{n_0}) > M,$$

o que prova que $\lim_{m \rightarrow \infty} f(y_m) = \infty$.

A seguir enunciamos uma propriedade importante e fácil de provar, que apresentamos na Unidade 2 para sequências.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Vamos considerar a função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, em que a é um número real positivo diferente de 1.

EXEMPLO 4

Se $a > 1$, sabendo que a exponencial é uma função crescente e que $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$, então pela Proposição 3 temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \quad \text{para todo } a > 1.$$

No caso em que $0 < a < 1$, temos que $\frac{1}{a} > 1$ e portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x = \infty,$$

donde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0.$$



6.4 Exercícios Recomendados

1. Seja a um número real positivo. Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{se } a > 0, \\ \infty, & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

2. Prove a seguinte variante da regra de substituição: Sejam f e g duas funções para as quais faz sentido formar $g \circ f$. Seja a um número real tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Se $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = l$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = l.$$

Mostre que se l for substituído por ∞ , o resultado continua valendo. Mostre também vale o resultado para limites laterais.

3. Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{3\operatorname{tg}^5 x + 2\operatorname{tg}^3 x + 5}{2\operatorname{tg}^5 x + \operatorname{tg}^2 x + 1}$.

4. Calcule $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2}$, se $a > b$.

5. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$.

6. Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{2x} + 2^x}{4^x + 4}$.

7

FUNÇÕES CONTÍNUAS

Sumário

7.1	O Conceito de Continuidade	2
7.2	Continuidade de uma função num ponto	3
7.3	Continuidade de uma função f	4
7.4	A Propriedade da Permanência de Sinal	6
7.5	Exemplos de funções não contínuas	6
7.6	Propriedades das Funções Contínuas	9
7.7	Composição e Continuidade	10
7.8	Exercícios Propostos	12
7.9	Exercícios Suplementares	13
7.10	Textos Complementares	14

con.ti.nu.i.da.de (*lat continuitate*)

sf 1 Qualidade daquilo que é contínuo.

2 Ligação ininterrupta das partes de um todo.

con.tí.nuo (*lat continuu*) *adj* 1 Em que não há interrupção; seguido.

7.1 O Conceito de Continuidade

O objetivo desta unidade é apresentar o conceito de continuidade de funções. Vamos começar analisando um exemplo.

EXEMPLO 1

Suponha que um fio de um certo metal ocupa o intervalo $[0, 60]$ da reta real. A cada posição $x \in [0, 60]$, medida em centímetros, associamos $T(x)$, a temperatura do fio neste ponto, medida em graus Celcius.

Considerando que o metal é um meio que conduz calor com facilidade, como seria o gráfico de uma tal função? Aqui está uma possibilidade.

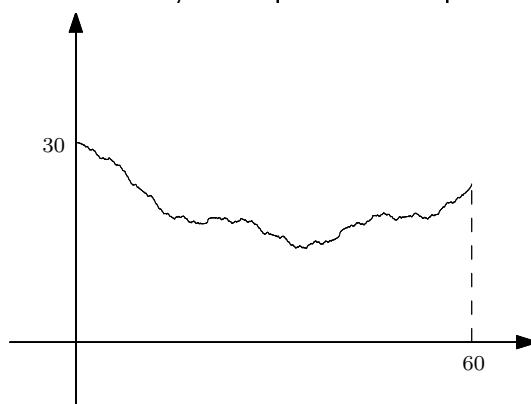


Figura 7.1

Gráfico da função temperatura $T(x)$.

O gráfico sugere que uma *pequena* variação na posição corresponderá uma *pequena* variação na temperatura.

Essa é a ideia básica da continuidade de uma função, no caso, a temperatura em termos da posição. A questão é escrever essa ideia em termos matemáticos.

Neste contexto temos uma noção clara do significado de *uma pequena variação*, tanto da posição (dada em centímetros), quanto da temperatura (dada em Celsius).

Note que *pequena variação* é um conceito relativo e precisamos estabelecer a definição em termos absolutos.

7.2 Continuidade de uma função num ponto

Apesar de continuidade ser uma característica global das funções, a definição é feita ponto a ponto. Ou seja, definimos a continuidade de uma função em um dado ponto (de seu domínio).

Sejam $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no domínio $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$, um ponto tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$. Dizemos que a função f é *contínua em a* se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

DEFINIÇÃO 1
FUNÇÃO CONTÍNUA EM UM
PONTO

Seja $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Então, pela Proposição 2 da Unidade 3, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

Portanto, p é contínua em todos os pontos de seu domínio.

EXEMPLO 2

Vejamos um exemplo um pouco diferente.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Observe que f é contínua em 0, pois $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$. No entanto, f não é contínua em qualquer outro ponto de seu domínio. Realmente, seja

EXEMPLO 3



$a \neq 0$ e sejam (x_n) e (y_n) seqüências em $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ tais que $\lim x_n = \lim y_n = a$, $x_n \in \mathbb{Q}$ e $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, para todos $n \in \mathbb{N}$. Então, a seqüência $(f(y_n))$ é constante igual a zero, enquanto que $(f(x_n) = |x_n|)$ converge para $|a|$, que é diferente de zero. Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe, se $a \neq 0$ e f não é contínua nestes pontos.

Na caracterização da continuidade em um ponto por meio de seqüências, a nossa noção de limite, ao escrevermos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, nos obriga a considerar seqüências (x_n) em $D \setminus \{a\}$, onde D é o domínio de f , tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. De fato, isto é equivalente a considerar todas as seqüências em D tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. A prova formal disto, encontra-se no *link* a seguir.

 Para Saber Mais - Prova do resultado - [Clique para ler](#)

7.3 Continuidade de uma função f

Vamos agora definir continuidade de funções, um conceito fundamental na Matemática. Suponhamos que $D \subset \mathbb{R}$ seja tal que, se $a \in D$, todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$.

DEFINIÇÃO 2 FUNÇÃO CONTÍNUA

Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é *contínua* se f for *contínua em todos os elementos de D* .

Note que só faz sentido falar em continuidade de f em um determinado ponto a no caso de esse ponto *pertencer ao seu domínio*, além da condição técnica exigida para tratarmos do limite da função no ponto. Além disso, se D é uma união (qualquer) de intervalos da reta, essa condição é satisfeita por todos os seus pontos. Isso ocorre nos casos de domínios de funções algébricas (aquelas definidas por uma expressão algébrica), funções trigonométricas e aquelas obtidas das operações usuais com funções desse tipo.

EXEMPLO 4

Seja $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Como p é contínua em todos os



pontos $a \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que p é uma função contínua.

Observação: Para provar que uma determinada função é contínua, temos que verificar a definição em cada ponto de seu domínio. Por outro lado, para mostrar que uma certa função *não* é contínua, basta descobrir um ponto de seu domínio no qual a definição de continuidade falhe. Veja: *num ponto de seu domínio!*

No Corolário 4 da Unidade 5, do Teorema do Confronto, vimos que, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a.$$

Isso quer dizer que as funções trigonométricas seno e cosseno são funções contínuas.

Veja um exemplo onde o domínio da função não é o conjunto de todos os números reais.

A função $f(x) = 2 + \sqrt{3-x}$ é uma função contínua.

O domínio de f é $D = (-\infty, 3]$, um intervalo fechado não limitado.

Assim, devemos considerar dois tipos de elementos do domínio de f : aqueles que estão no interior, os que são menores do que 3, e aquele que fica na extremidade do domínio, o número 3.

Seja a um número menor do que 3. Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} 2 + \sqrt{3-x} = 2 + \sqrt{3-a} = f(a).$$

Para concluir que a função é contínua, devemos considerar o elemento $3 \in D$. Nesse caso, vamos fazer uso do limite lateral adequado.

Como

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} 2 + \sqrt{3-x} = 2 = f(3),$$

a função f é contínua em 3.

EXEMPLO 5

EXEMPLO 6

Por exemplo, se $a = -1$,

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 + \sqrt{3-x} = 4.$$

Como $f(-1) = 4$, f é contínua em -1 .

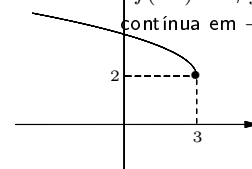


Figura 7.2

Gráfico de f



7.4 A Propriedade da Permanência de Sinal

Retomemos o exemplo inicial, onde a função indica a temperatura ao longo de um fio, para ilustrar uma importante propriedade das funções contínuas. Se a temperatura é alta em determinado ponto do fio, então esperamos que nos pontos *próximos*, a temperatura também seja alta.

PROPOSIÇÃO 3 PERMANÊNCIA DO SINAL

Sejam $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$. Suponha que f seja contínua em a e $f(a) > 0$. Então, existe um número $r > 0$ tal que,

$$\forall x \in (r - a, a + r) \cap D, \quad f(x) > 0.$$

DEMONSTRAÇÃO

Vamos supor, por absurdo, que para todo o número real $r > 0$, existe $x \in (a - r, a + r) \cap D$ tal que $f(x) \leq 0$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escolher $a_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \cap D$ tal que $f(a_n) \leq 0$.

Assim construímos uma sequência de números (a_n) tais que $|a_n - a| < \frac{1}{n}$. Isso quer dizer que $\lim a_n = a$. No entanto, $f(a_n) \leq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa sequência não pode convergir para $f(a) > 0$, devido à Proposição 6 da Unidade 2. Isso contradiz o fato de f ser contínua em a .

Observação: Essa propriedade garante, por exemplo, que ao estudarmos os sinais de uma função contínua, com zeros isolados, definida em um dado intervalo, só haja eventuais mudanças de sinais em torno desses pontos. Isso ocorre, por exemplo, no caso das funções polinomiais.

7.5 Exemplos de funções não contínuas

Após uma sequência de exemplos de funções contínuas, veremos exemplos de funções *não contínuas*.

EXEMPLO 7

Seja $f(x) = [x] = n$, na qual $n \leq x < n + 1$, a função chamada *maior inteiro*. Isto é, $[x]$ é o maior inteiro que é menor ou igual a x .



Assim, $[-0.5] = -1$, $[2.1] = 2$, $[2.99] = 2$, $[3] = 3$, $[\sqrt{2}] = 1$ e $[\pi] = 3$.

Veja o gráfico de f :

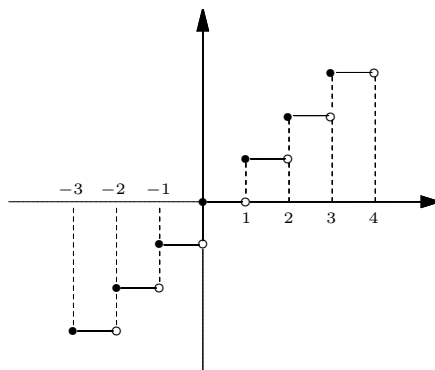


Figura 7.3

Gráfico de $f(x) = [x]$

Afirmção: a função f é contínua em cada $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ e f *não* é contínua em cada $a \in \mathbb{Z}$.

Conclusão: a função f não é contínua.

Veja porque f é contínua em a sempre que $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Todo número real a não inteiro pertence a um único intervalo de comprimento 1, com extremidades números inteiros:

$$n < a < n + 1.$$

Neste caso, $f(a) = n$. Além disso, há um pequeno intervalo $(a - r, a + r)$, em torno de a , tal que

$$n < a - r < a < a + r < n + 1.$$

Basta tomar $r = \frac{1}{2} \min\{a - n, n + 1 - a\}$.

Veja a figura:

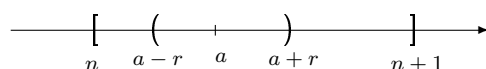


Figura 7.4

$$(a - r, a + r) \subset [n, n + 1]$$

Isto garante que f , restrita a este intervalo, é constante e igual a n . Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = n = f(a).$$

Para terminar o exemplo, vamos considerar o caso dos números inteiros. Agora, os limites laterais serão diferentes, como o próprio gráfico da função indica.

Seja n um número inteiro. Então, $f(n) = [n] = n$. Além disso, se $n - 1 < x < n$, então $f(x) = [x] = n - 1$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n - 1.$$

Por outro lado, se $n \leq x < n + 1$, então $f(x) = n$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n.$$

Como os limites laterais são diferentes, f não admite limite no ponto n e, consequentemente, não é contínua nesse ponto.

Vamos a mais um exemplo.

EXEMPLO 8

Cuidado especial deve ser dado àquelas funções cujas definições usam várias sentenças. A seguir, vamos determinar os valores de k para os quais

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{se } x \leq 1, \\ k - x, & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

seja contínua em 1. É claro que isso também determinará os valores de k para os quais a função não é contínua em $x = 1$.

Como $f(1) = 1^2 + 2 = 3$, basta que analisemos os limites laterais.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 2x = 3 = f(1).$$

Agora,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} k - x = k - 1.$$

Portanto, para que f seja contínua em 1, é preciso que 3 seja igual a $k - 1$. Ou seja, f é contínua em 1 se, e somente se, $k = 4$.



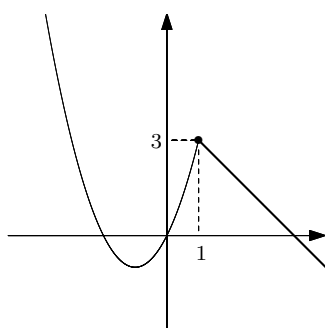


Figura 7.5

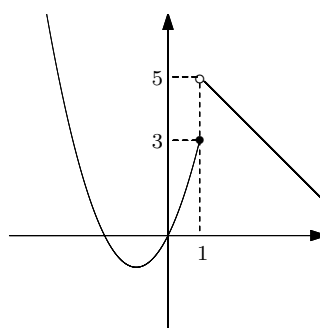
Gráfico da função f com $k = 4$ f é contínua em 1

Figura 7.6

Gráfico da função f com $k = 6$ f não é contínua em 1

Observe que $k = 4$ é a única possibilidade de f ser contínua em 1. Neste caso, o segmento de reta que é o gráfico de f à direita de 1 *continua* o trecho de parábola, gráfico de f à esquerda de 1. Qualquer outra escolha para a constante k implica numa *interrupção* do gráfico de f . Assim, $k = 6$ é apenas um exemplo em uma infinidade de possibilidades nas quais f não será contínua em 1.

7.6 Propriedades das Funções Contínuas

As propriedades operatórias dos limites de funções, de alguma forma herdadas das propriedades dos limites de sequências, que dão praticidade aos cálculos, transparecem também na continuidade de funções. Não há surpresa, uma vez que a definição de continuidade foi formulada usando diretamente o limite da função num ponto.

Sejam $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ funções, $D \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $a \in D$, todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$. Se f e g são contínuas, então

- i) $f + g: D \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua;
- ii) $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua;
- iii) $\frac{f}{g}: D^* \rightarrow \mathbb{R}$, em que $D^* = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, é contínua.

PROPOSIÇÃO 4
OPERAÇÕES COM FUNÇÕES
CONTÍNUAS

DEMONSTRAÇÃO

Seja $a \in D$ um elemento qualquer do domínio. Como f e g são contínuas,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= f(a) + g(a) = (f + g)(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a). \end{aligned}$$

Observe que, se $g(a) \neq 0$, a Propriedade da Permanência do Sinal garante a existência de algum $r > 0$ tal que, para todo $x \in (a - r, a + r) \cap D$, $g(x) \neq 0$. Mais uma vez,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a).$$

7.7 Composição e Continuidade

Uma importante maneira de obter funções a partir de funções dadas é a composição. Essa operação é diferente das operações apresentadas anteriormente, cujas definições dependiam fortemente das correspondentes operações nos números reais. De qualquer forma, a composição preserva a continuidade, como veremos a seguir.

PROPOSIÇÃO 5
COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES
CONTÍNUAS

Sejam $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, $b = f(a) \in E$ tal que todo intervalo aberto contendo b intersecta $E \setminus \{b\}$. Suponhamos também que $f(D) \subset E$, de modo que podemos considerar $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$, a função composta. Se f é contínua em a e g é contínua em $b = f(a)$, então a composta $g \circ f$ é contínua em $a \in D$.



DEMONSTRAÇÃO

Seja (x_n) uma sequência em D tal que $\lim x_n = a$. Considere (y_n) a sequência em E definida por $y_n = f(x_n)$. Como f é contínua em a ,

$$\lim y_n = \lim f(x_n) = f(a) = b.$$

Considere agora (z_n) a sequência definida por $z_n = g(y_n)$. Como g é contínua em b ,

$$\lim z_n = \lim g(y_n) = g(b)$$

Mas $g(y_n) = g(f(x_n)) = g \circ f(x_n)$ e $g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a)$. Concluimos que

$$\lim g \circ f(x_n) = g \circ f(a).$$

Isso quer dizer que

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = g \circ f(a)$$

e, portanto, $g \circ f$ é contínua em $a \in D$.

Veja agora alguns exercícios para praticar!



7.8 Exercícios Propostos

1. Em cada item a seguir, determine se a função dada é contínua no ponto indicado.

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 2 + \sin(\pi x), & \text{se } x \leq 2, \\ 2x - 2, & \text{se } x > 2, \end{cases} \quad \text{no ponto } 2 ;$$

$$(b) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x + 1}, & \text{se } x < 1, \\ x^2 - 2x + 3, & \text{se } x \leq 1, \end{cases} \quad \text{no ponto } 1 ;$$

$$(c) \quad h(x) = x[x], \quad \text{no ponto } -3.$$

2. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cos \pi x & \text{se } x < 0, \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x \leq 3, \\ x - 3 & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

- (a) Calcule os valores de a e de b , tais que f seja uma função contínua.
 (b) Faça um esboço do gráfico de f usando os valores de a e de b calculados no item anterior.
3. Encontre um exemplo de uma função que seja contínua *apenas* nos números inteiros.
4. Sejam $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ funções, $a \in D$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \setminus \{a\}$. Suponha que f e g sejam contínuas em a e $f(a) > g(a)$. Mostre que existe um $r > 0$ tal que, para todo $x \in (a - r, a + r) \cap D$, $f(x) > g(x)$.
5. Mostre que existem funções $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que g seja contínua, f não seja contínua (digamos em $a = 0$), mas $g \circ f$ seja contínua.

6. Mostre que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua.

7.9 Exercícios Suplementares

1. Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e $A = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \neq g(x)\}$.
Mostre que, se $a \in A$, então existe $r > 0$ tal que, se $x \in (a - r, a + r)$, então $x \in A$. Encontre um exemplo de funções f e g para as quais $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n, 2n + 1)$.
2. Prove a Proposição 5, utilizando a Regra de Substituição da Unidade 6.



7.10 Textos Complementares

Para Saber Mais

Uma das direções é trivial, pois toda sequência em $D \setminus \{a\}$ é uma sequência de D . Suponhamos, agora, que saibamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ para toda sequência (x_n) em $D \setminus \{a\}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Seja (z_n) uma sequência em D tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Queremos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a)$. Sejam

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N}; z_n \in D \setminus \{a\}\} \quad \text{e} \quad N_2 = \{n \in \mathbb{N}; z_n = a\}.$$

Se qualquer um dos conjuntos acima for finito, é imediato verificar que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a)$. O problema surge quando ambos os conjuntos são infinitos, mas, neste caso, o resultado segue do seguinte fato geral, cuja prova deixamos como exercício,

Lema Seja (y_n) uma sequência em \mathbb{R} tal existam duas subsequências (y_{n_i}) e (y_{m_j}) , com $\{n_i; i \in \mathbb{N}\} \cup \{m_j; j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$, tais que $\lim_{i \rightarrow \infty} f(y_{n_i}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(y_{m_j}) = l$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = l$.



8

FUNÇÕES CONTÍNUAS EM INTERVALOS

Sumário

8.1	Introdução	2
8.2	O Teorema do Valor Intermediário	5
8.3	Aplicações do Teorema do Valor Intermediário . . .	5
8.4	O Teorema do Valor Intermediário e Pontos Fixos .	7
8.5	Exercícios Recomendados	12
8.6	Exercícios Suplementares	13
8.7	Textos Complementares	14

O todo é maior do que a soma de suas partes.
Aristóteles

O objetivo desta unidade é apresentar dois importantes teoremas sobre funções contínuas definidas em intervalos, bem como algumas aplicações.

8.1 Introdução

Os dois teoremas que apresentaremos nesta unidade, o Teorema do Valor Intermediário e o Teorema de Weierstrass para Valores Extremos, diferem bastante dos resultados que foram apresentados na unidade anterior, no sentido que a hipótese a ser assumida é de uma função contínua em um intervalo fechado e limitado. As propriedades apresentadas na unidade anterior refletem o caráter local da noção de continuidade enquanto que nesta unidade levaremos em conta o aspecto global da função.

EXEMPLO 1

Em 1225 Fibonacci foi desafiado a resolver a equação

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Em sua resposta ele afirmou

... e como não foi possível resolver esta equação (...) reduzi a solução a uma aproximação.

Sem dar qualquer explicação, Fibonacci apresentou a sua solução em notação sexagesimal:

$$1.22.7.42.33.4.40.$$

Isto é,

$$1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6}.$$

Em notação decimal, 1,3688081075, que é correto até a nona casa. Um feito realmente memorável.

Para colocar o problema de Fibonacci no contexto de Cálculo, vamos considerar a função

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x.$$



Assim, a equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ pode ser escrita como $f(x) = 20$. Resolver o problema consiste em encontrar um certo número real a tal que

$$f(a) = 20.$$

Note que, $f(1) = 13$ e $f(2) = 36$. Isto é, 1 não é solução por falta enquanto que 2 não é solução por excesso.

Acreditando que há uma solução entre 1 e 2, prosseguimos um pouco mais, escrevendo a tabela a seguir:

$f(1) = 13$	$f(2) = 36$
$f(1) = 13$	$f(1,5) = 22,875$
$f(1,25) = 17,578125$	$f(1,5) = 22,875$
$f(1,25) = 17,578125$	$f(1,375) = 20,13085938$
$f(1,3125) = 18,83129883$	$f(1,375) = 20,13085938$
$f(1,34375) = 19,47518921$	$f(1,375) = 20,13085938$

Gostaríamos de dizer que há solução entre 1,34375 e 1,375. A pergunta que não quer calar: que garantias temos de que realmente *existe* um número a entre 1,34375 e 1,375 tal que $f(a) = 20$.

Poderíamos colocar a questão acima da seguinte forma:

Dada uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sob quais *condições* podemos afirmar que, se d é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um número c , entre a e b , tal que

$$f(c) = d?$$

Veja as ilustrações a seguir.



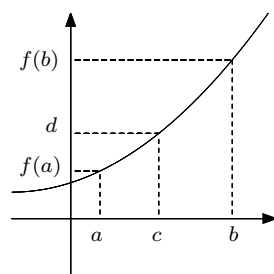


Figura 8.1

$$f(a) < d < f(b)$$

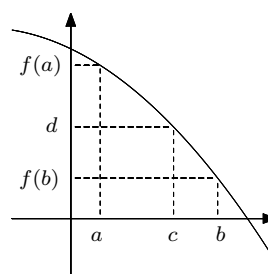


Figura 8.2

$$f(b) < d < f(a)$$

Nestes dois casos a pergunta tem resposta afirmativa. Nem sempre isso acontece, veja a próxima ilustração.

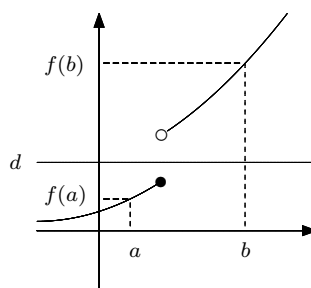



Figura 8.3

Não existe $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = d$.

Realmente, a continuidade é uma condição necessária para a existência de um ponto c tal que $f(c) = d$, como ilustra o exemplo da figura anterior.

A continuidade é a condição necessária para o gráfico da função, ao passar do *nível* $f(a)$ para o *nível* $f(b)$, cruzar todas as retas horizontais entre eles, passando também pela reta $y = d$, pelo menos uma vez. A outra condição diz respeito ao domínio da função, como você verá no decorrer do texto.

Esse fato, que nossa intuição aceita tão facilmente, é um resultado matemático muito importante, chamado Teorema do Valor Intermediário.

 Para Saber Mais - Raiz da Equação - Clique para ler

8.2 O Teorema do Valor Intermediário

Apesar de exercer um grande apelo à nossa intuição, o Teorema do Valor Intermediário demanda, em sua demonstração, fatos matemáticos fundamentais, como a completude dos números reais.

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e seja d um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que


$$f(c) = d.$$

TEOREMA 1
TEOREMA DO VALOR
INTERMEDIÁRIO

O enunciado de um teorema é fundamental. Você deve lembrar-se das hipóteses, saber qual é a conclusão e alguns bons exemplos aos quais o teorema se aplica. Neste caso, os ingredientes são:

- (a) um intervalo fechado e limitado;
- (b) uma função contínua definida no dito intervalo;
- (c) um número entre os valores da função nos extremos do intervalo.

A conclusão do teorema diz que o tal número pertence à imagem da função. O exemplo ilustrado pela figura 8.3 evidencia a importância da continuidade da função.

 Para Saber Mais - Demonstração do Teorema do Valor Intermediário - Clique para ler

8.3 Aplicações do Teorema do Valor Intermediário

Como uma primeira aplicação do Teorema do Valor Intermediário, mostraremos que as imagens de intervalos por funções contínuas são intervalos.

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um intervalo I . Então, $f(I)$ é um intervalo.

TEOREMA 2
IMAGEM DE UM
INTERVALO

DEMONSTRAÇÃO

Na verdade, vamos mostrar que a imagem $f(I)$, do intervalo I por f possui a seguinte propriedade: se α e β são elementos de $f(I)$, então o intervalo de extremos α e β está contido em $f(I)$. Esta caracterização dos subconjuntos de \mathbb{R} que são intervalos é bastante intuitiva e poderia ser demonstrada rigorosamente usando a completude de \mathbb{R} . Note que estamos considerando todos os tipos de intervalos, inclusive \mathbb{R} e $\{a\} = [a, a]$.

Vamos aos detalhes. Se f é constante, $f(I)$ reduz-se a um conjunto com um único elemento. Vamos então supor f não constante e sejam α e β elementos de $f(I)$. Então, existem a e b em I tais que $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$. Suponhamos, sem perder em generalidade, que $a < b$. Aqui usamos a hipótese de I ser um intervalo: $[a, b] \subset I$. A função f , contínua em I , quando restrita a $[a, b]$, ainda é uma função contínua. Agora, suponha γ um elemento qualquer entre α e β . Portanto, γ é um elemento entre $f(a)$ e $f(b)$ e, pelo Teorema do Valor Intermediário aplicado a f restrita à $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$. Isso quer dizer que todos os elementos entre α e β são elementos de $f(I)$, ou seja, $[\alpha, \beta] \subset f(I)$.

Como uma outra aplicação do Teorema do Valor Intermediário, mostraremos que todo polinômio $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de grau ímpar, admite pelo menos uma raiz real.

PROPOSIÇÃO 3

Seja $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com n um inteiro ímpar e $a_n \neq 0$. Então p possui uma raiz real.

DEMONSTRAÇÃO

Podemos supor $a_n > 0$ (justifique) e escrever

$$p(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$, uma vez que n é um número ímpar. Isso significa que, pelo resultado anterior, $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

O Teorema do Valor Intermediário é um resultado que garante a *existência* de algo, no caso, um número com determinada propriedade. Veja como



o resultado pode ser usado para garantir a existência da raiz quadrada de um número positivo (veja a generalização para raízes n -ésimas no Exercício 5).

Se $a > 0$, então existe um número $\alpha > 0$ tal que $\alpha^2 = a$.

PROPOSIÇÃO 4

Considere a função contínua $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$. Esta função é crescente ($a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$), $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Como a imagem de f é um intervalo da reta, concluímos que $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. Logo, para cada $a \in [0, +\infty)$, existe um único $\alpha \in [0, +\infty)$, tal que $\alpha^2 = a$. Isto é, $\sqrt{a} = \alpha$.

DEMONSTRAÇÃO

8.4 O Teorema do Valor Intermediário e Pontos Fixos

Se você dispuser de uma calculadora com função raiz quadrada, faça a experiência a seguir. Escreva o maior número que conseguir e extraia a sua raiz quadrada. Repita o processo, extraindo a raiz quadrada do resultado. E mais uma vez, e outra, reiteradamente. Você deve observar, a menos que sua calculadora não esteja funcionando bem, que este processo resultará em 1. Em termos matemáticos, estamos fazendo o seguinte: dado $a > 0$ (na experiência, consideramos um número bem maior do que 1), considere a sequência a_n obtida da seguinte maneira: $a_1 = a$ e $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$, para $n \geq 2$. Então, $\lim a_n = 1$. A sequência foi obtida aplicando reiteradamente a função raiz quadrada ao número a . Repita a experiência escrevendo o menor número positivo que conseguir. O que você acha que acontecerá?

O fenômeno observado reflete o fato de que 1 é um *ponto fixo* da função raiz quadrada. (Veja a definição a seguir.)

Note também que nem sempre um ponto fixo atrairá sequências obtidas por processos como este. Basta pensar na função definida por $f(x) = x^2$, na reta real. Novamente 1 é um ponto fixo, mas agora não é mais um *atrator*. Se $b_1 > 1$, e colocamos $b_n = (b_{n-1})^2$, para $n \geq 2$, então $\lim b_n = +\infty$. Se escolhermos $0 < b_1 < 1$, então $\lim b_n = 0$.



DEFINIÇÃO 5
PONTO FIXO

Seja $f: A \rightarrow A$ uma função. Um ponto $a \in A$ é chamado *ponto fixo* de f se $f(a) = a$.

Observação: Uma função f admite um ponto fixo se, e somente se, $f(x) = x$ admite solução.

EXEMPLO 2

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - x - 3$, admite dois pontos fixos, que são -1 e 3 , raízes de $x^2 - x - 3 = x$.

Eles correspondem às interseções do gráfico da função f com o gráfico da função identidade.

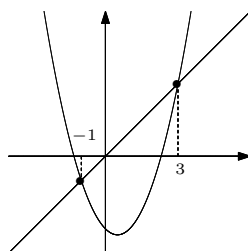


Figura 8.6

Gráfico de uma função com dois pontos fixos.

Note que a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - x + 2$ não admite ponto fixo.

Como aplicação do Teorema do Valor Intermediário, provaremos que toda função contínua do intervalo $[0, 1]$ nele mesmo admite um ponto fixo.

TEOREMA 6
TEOREMA DO PONTO
FIXO

Seja $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua. Então existe um ponto $a \in [0, 1]$ tal que $f(a) = a$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $f(0) = 0$, a tese do teorema está satisfeita. Portanto, podemos supor que $f(0) > 0$. Analogamente, se $f(1) = 1$, o teorema se cumpre. Assim, vamos supor, também, que $f(1) < 1$.

Como $f(x) \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$, podemos considerar a função contínua dada por $g(x) = f(x) - x$, definida no intervalo $[0, 1]$.

Das considerações anteriores, podemos ver que: (a) $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ e (b) $g(1) = f(1) - 1 < 0$, pois $f(1) < 1$.

Resumindo,

$$g(0) > 0 > g(1).$$

Podemos, portanto, aplicar à função g o Teorema do Valor Intermediário. Isto é, existe $a \in [0, 1]$ tal que $0 = g(a) = f(a) - a$ e, portanto,

$$f(a) = a.$$

Vamos a seguir apresentar outro importante resultado a respeito de funções contínuas definidas em um intervalo fechado e limitado.

O Teorema de Weierstrass para valores extremos

O teorema que apresentaremos a seguir é útil para garantir a existência de solução para vários problemas de otimização. Ele informa condições nas quais uma certa função assume seus valores extremos.

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$, fechado e limitado da reta. Então, existem números c e d , contidos em $[a, b]$, tais que, para todo $x \in [a, b]$,

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

TEOREMA 7
TEOREMA DE
WEIERSTRASS

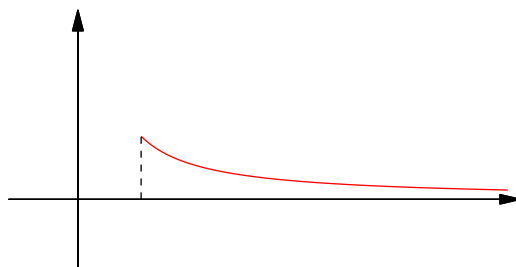
Isto é, a função f assume seus valores extremos. Antes de apresentarmos a demonstração do teorema, veremos alguns exemplos que enfatizam a importância das hipóteses que devemos assumir para obter o resultado.

As características do domínio da função f , um intervalo fechado e limitado, são fundamentais para o resultado. Veja o exemplo da função $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, no intervalo fechado, porém não limitado. A função

EXEMPLO 3

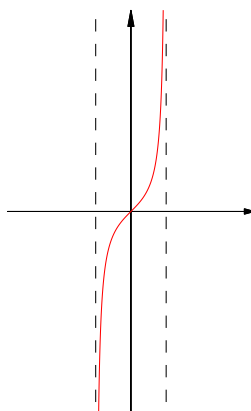


f é, inclusive, limitada, uma vez que, se $x \in [1, +\infty)$, $|f(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| \leq 1$. No entanto, f não admite mínimo. Isto é, não existe $a \in [1, +\infty)$ tal que $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in [1, +\infty)$. Veja a figura a seguir.



EXEMPLO 4

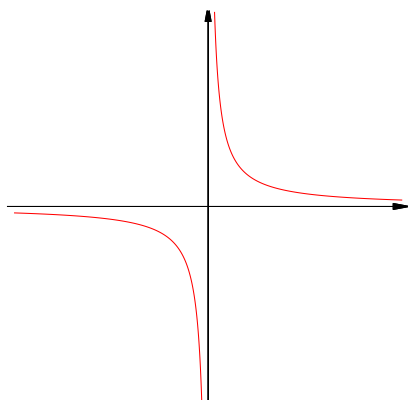
A característica de ser limitado apenas, também não é suficiente para se obter o resultado. Basta considerar o exemplo da função $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$. Neste caso, temos uma função bijetora entre o intervalo $(-1, 1)$ e a reta real. Portanto, a função g não admite máximo e não admite mínimo. Veja o gráfico a seguir.



EXEMPLO 5

É claro que a continuidade da função é essencial. Por exemplo, a função $h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$, e $f(0) = 0$, é tal que, para

todo número real $r > 0$, existem a e b no intervalo $[-1, 1]$, tais que $h(a) < -r$ e $h(b) > r$. Ou seja, h não admite máximo e não admite mínimo, apesar do seu domínio ser um intervalo fechado e limitado. É evidente que esta função não é contínua em $x = 0$. Veja o gráfico a seguir.



 Para Saber Mais - Prova do Teorema de Weierstrass - [Clique para ler](#)

O Teorema de Weierstrass é mais um teorema de existência, mas não dá pistas de como achar os pontos extremos de uma função contínua em um intervalo fechado. Mais adiante, com o uso das derivadas, vamos mostrar como determinar esses extremos.

Uma caixa retangular aberta deve ser fabricada com uma folha de papelão de 15×30 cm, recortando quadrados nos quatro cantos e depois dobrando a folha nas linhas determinadas pelos cortes. Existe alguma medida do corte que produza uma caixa com volume máximo?

Seja x cm o lado do quadrado recortado. O volume da caixa é então dado por

$$V(x) = (15 - 2x)(30 - 2x)x = 450x - 90x^2 + 4x^3.$$

O intervalo de variação de x é $0 \leq x \leq 7,5$. Portanto, V é uma função contínua no intervalo $[0, 7,5]$. Logo, V admite um valor máximo $V(d)$ para algum $d \in [0, 7,5]$. O valor mínimo $V(c)$ é $V(0) = V(7,5) = 0$. A determinação dos valores de d onde o máximo é atingido será feita mais tarde com o auxílio das derivadas.

EXEMPLO 6

8.5 Exercícios Recomendados

1. Para cada uma das funções polinomiais a seguir, determine um inteiro n tal que $f(x) = 0$ para algum x entre n e $n + 1$.
a) $f(x) = x^3 - x + 3$; c) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$;
b) $f(x) = x^5 + x + 1$; d) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.
2. Seja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um número $c \in [0, 1]$, tal que $f(c) = \sqrt[n]{c}$.
3. Mostre que a equação $\cos x = x$ admite uma solução no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Verifique graficamente que esta solução é única. Calcule um valor aproximado desta solução, com precisão até a quarta casa decimal.
4. Seja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{Q}$ uma função contínua. Mostre que f é constante.
5. Seja n um número inteiro par e seja $\alpha > 0$ um número real. Mostre que existe um número real $a > 0$, tal que $a^n = \alpha$. O que pode ser dito se n é um número inteiro ímpar?
6. Existe exemplo de função contínua f definida no intervalo $[0, 1]$ cuja imagem é o intervalo $(0, 1)$?
7. Seja $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma função contínua. Mostre que f admite ponto fixo.
8. Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita periódica quando existe um número real $p > 0$, tal que $f(x) = f(x + p)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que toda a função periódica contínua admite máximo e admite mínimo.
9. Seja A um conjunto formado pela união finita de intervalos fechados e limitados e seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que f admite máximo e mínimo.

8.6 Exercícios Suplementares

1. Encontre um exemplo de uma função contínua f definida em um intervalo aberto cuja imagem é um intervalo fechado e limitado.
2. Encontre um exemplo de uma função contínua f definida em um intervalo aberto cuja imagem é um intervalo semi-fechado, mas não limitado.
3. Encontre uma f contínua que seja limitada mas que não admita máximo e não admita mínimo.
4. Sejam $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que a equação $f(x) = g(x)$ tem solução.
5. Seja $f: (a, b) \rightarrow (a, b)$ uma função contínua. A função f admite ponto fixo?
6. Seja f uma função invertível. Mostre que, se f admite um ponto fixo, a sua função inversa também admite ponto fixo.
7. Um monge vai meditar durante o final de semana em um monastério no topo de uma montanha. Ele inicia a subida no sábado às 6:00 horas e a descida na segunda, no mesmo horário. Num determinado instante, durante a descida, ele percebe que passou por aquele ponto durante a subida, naquele exato horário. Explique este fato.
8. Uma lata cilíndrica fechada deve ser produzida com folhas de metal para conter um litro de líquido. Existe alguma dimensão da lata que proporciona maior economia de material?



8.7 Textos Complementares

Para Saber Mais

Raiz da Equação

Você quer saber qual é a raiz exata da equação estudada por Fibonacci? Foi preciso esperar mais do que três séculos para se descobrir como resolver equações de grau três por radicais. No caso da equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, a resposta é

$$x = \frac{\sqrt[3]{352 + 6\sqrt{3930}} + \sqrt[3]{352 - 6\sqrt{3930}} - 2}{3}.$$



Demonstração do Teorema do Valor Intermediário

Sem perda de generalidade, podemos supor que $f(a) < d < f(b)$. Além disso, considerando $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = f(x) - d$, também contínua, observamos que basta demonstrar o teorema para o caso em que $d = 0$. Logo, podemos supor que $f(a) < 0 < f(b)$ e, portanto, queremos achar $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

A estratégia que usaremos para achar esse número c é a seguinte: constuiremos duas sequências monótonas contidas em $[a, b]$, portanto limitadas. Pela completude dos números reais, elas são convergentes. Além disso, a sequência obtida tomando a distância entre os seus termos, converge para zero. Portanto, elas convergem para um mesmo ponto c . Esse ponto é o candidato à solução de $f(x) = 0$. Vamos aos detalhes.

Construímos duas sequências, (a_n) e (b_n) , da seguinte maneira: $a_1 = a$ e $b_1 = b$. Seja $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Apenas uma das três possibilidades pode ocorrer: $f(m_1) = 0$, $f(m_1) < 0$ ou $f(m_1) > 0$.

Caso $f(m_1) = 0$. Neste caso, tomando $c = m_1$, o teorema está demonstrado.

Caso $f(m_1) < 0$. Neste caso, escolhemos $a_2 = m_1$ e $b_2 = b_1$. Isto é, estamos abandonando a primeira metade do intervalo $[a, b]$. Veja na ilustração a seguir.

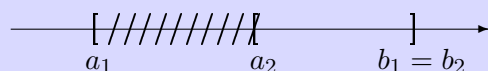


Figura 8.4

Caso $f(m_1) > 0$. Neste caso, escolhemos $a_2 = a_1$ e $b_2 = m_1$. Isto é, abandonamos a outra metade do intervalo.

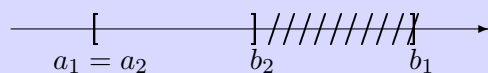


Figura 8.5

Repetimos este processo fazendo $m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$. Novamente, se $f(m_2) = 0$, então o resultado é verdadeiro. Se $f(m_2) < 0$, escolhemos $a_3 = m_2$ e $b_3 = b_2$. Se $f(m_2) > 0$, escolhemos $a_3 = a_2$ e $b_3 = m_2$.

Prosseguindo desta forma, ou obtemos uma solução de $f(x) = 0$, como algum ponto médio dos subintervalos, ou produzimos duas sequências monótonas, (a_n) e (b_n) , tais que para todo número $n \in \mathbb{N}$,

- $a_n \leq a_{n+1}$ e $b_n \geq b_{n+1}$;
- $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$;
- $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$.

A primeira afirmação, mais o fato de todos os elementos das duas sequências estarem contidos no intervalo $[a, b]$, pelo Axioma da Completude, implicam que as duas sequências convergem. Sejam $\lim a_n = c_1$ e $\lim b_n = c_2$.

A segunda afirmação garante que $c_1 = c_2$. De fato,

$$c_2 - c_1 = \lim b_n - \lim a_n = \lim(b_n - a_n) = 0.$$

Logo, $c_1 = c_2$. Chamaremos esse número de c . Este é o candidato à solução de $f(x) = 0$. Para mostrar isso, usamos a hipótese da continuidade. Como f é contínua, $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c)$.

A terceira afirmação garante, pela Proposição 6 da Unidade 2, que $\lim f(a_n) = f(c) \leq 0$ e $\lim f(b_n) = f(c) \geq 0$. Portanto, $f(c) = 0$. \square

Note que a estratégia utilizada na demonstração do teorema nos fornece um método para determinar uma aproximação, com a precisão que queiramos, de uma raiz da equação $f(x) = 0$. Este foi o método que utilizamos no Exemplo 1 para justificar a solução de Fibonacci.



Prova do Teorema de Weierstrass

Vamos mostrar que a imagem de $[a, b]$ por f é um intervalo fechado e limitado $[C, D]$. Já sabemos que $f([a, b]) = I$, um intervalo. Se f for constante, $I = [C, C] = \{C\}$. Vamos supor que f não é constante.

Mostraremos inicialmente que I é um intervalo limitado. Suponhamos, por absurdo, que I não seja limitado. Podemos então tomar (sem perda de generalidade) uma sequência (y_n) de elementos de I , escolhendo y_1 um elemento qualquer de I e fazendo $y_n = y_{n-1} + 1$, para $n \geq 2$. Então, $\lim y_n = +\infty$. Na verdade, qualquer subsequência $(y_{n'})$ também satisfaz a condição $\lim y_{n'} = +\infty$. Considere agora a sequência (a_n) de elementos de $[a, b]$, tal que $f(a_n) = y_n$. Aplicando a Proposição 13, da Unidade 1, podemos considerar $(a_{n'})$, uma subsequência monótona de (a_n) , que também é limitada, uma vez que seus elementos pertencem ao intervalo $[a, b]$. Pelo Axioma 11, da Unidade 1, da completude dos números reais, essa subsequência converge para algum número em $[a, b]$, digamos $\lim a_{n'} = l$. A continuidade de f garante que $\lim y_{n'} = \lim f(a_{n'}) = f(l)$, que contradiz o fato $\lim y_{n'} = +\infty$. Logo, I é um intervalo limitado.

Vamos agora provar que I é fechado. Suponhamos que D seja o extremo superior de I . Vamos mostrar que $D \in f([a, b])$. A estratégia é a mesma. Tomemos (z_n) uma sequência de elementos distintos de I , tal que $\lim z_n = D$. Podemos considerar, por exemplo, z_1 um elemento de I e, portanto, $z_1 < D$. Defina $z_n = \frac{D - z_{n-1}}{2}$, para $n \geq 2$. Agora, seja (b_n) a sequência de elementos de $[a, b]$ tal que $f(b_n) = z_n$. Escolha uma subsequência $(b_{n'})$ monótona e limitada, portanto convergente. Digamos $\lim b_{n'} = d$. A continuidade de f garante que $\lim f(b_{n'}) = f(d) = \lim(z_{n'}) = D$. Isto prova que $D \in I = f([a, b])$. Analogamente, prova-se que C , o extremo inferior do intervalo I , também pertence a I .

Para Saber Mais

9

DERIVADAS

Sumário

9.1	A velocidade instantânea	2
9.2	O problema da tangente	7
9.3	Exemplos do cálculo direto da derivada	13
9.4	Continuidade e derivabilidade	19
9.5	Um pouco da história do Cálculo	21

O final do Século XVII viu o surgimento de uma conquista matemática formidável: o Cálculo Diferencial. Descoberto independentemente por Isaac Newton e Gottfried Leibniz, tornou-se a base para o desenvolvimento de várias áreas da Matemática, além de possuir aplicação em praticamente todas as áreas do conhecimento científico.

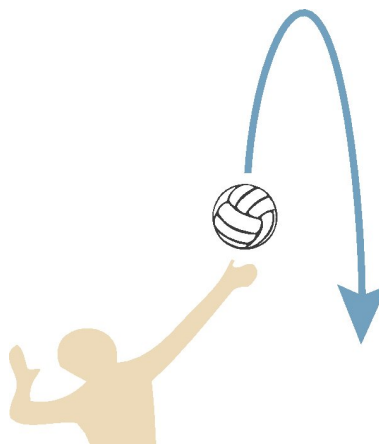
Nesta unidade, estudaremos o conceito de derivada e veremos sua relação com o conceito de limite, estudado anteriormente. De fato, veremos que a derivada de uma função é o limite de um quociente de duas grandezas em que ambas tendem a zero.

Abordaremos este conceito a partir de duas motivações fundamentais: o estudo da velocidade de um objeto em movimento e o problema da tangente de uma curva. Veremos posteriormente que os dois problemas estão relacionados. A tangente do gráfico que representa a posição do objeto em função do tempo fornece a sua velocidade.

Mas o que é velocidade de um objeto em movimento?

9.1 A velocidade instantânea

Imagine a situação em que um jogador de vôlei foi sacar, levantou a bola, mas se arrependeu e a bola caiu muito próxima do ponto onde foi lançada.



Suponha que movimento inteiro levou um pouco mais de 2 segundos e que a partir de fotografias tiradas em intervalos regulares foi possível dizer a altura da bola a cada segundo, representadas na tabela a seguir.

Altura da bola					
t(seg)	0	0,5	1	1,5	2
h(m)	2	6,25	8	7,25	4

Qual foi a velocidade da bola no instante $t = 0,5$?

Vamos supor um movimento quase vertical. A partir dos dados obtidos, podemos calcular a velocidade média, que é a razão entre o deslocamento realizado e o intervalo de tempo decorrido, entre os instantes $t = 0,5$ e $t = 1$.

$$V_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{8 - 6,25}{1 - 0,5} = 3,5 \text{ m/s}$$

O problema é que a velocidade varia muito entre $t = 0,5$ e $t = 1$. Quando se joga uma bola verticalmente para cima, a velocidade diminui até que a bola comece a voltar.

Com medições mais precisas, podemos calcular uma velocidade média em intervalos menores em torno de $t = 1$. Observe que até aqui não temos uma definição para velocidade em um instante, apenas velocidades médias.

Suponha que foram feitas as seguintes medidas:

Altura da bola					
t(seg)	0	0,25	0,5	0,75	1
h(m)	2	4,44	6,25	7,44	8

Usando o intervalo entre $t = 0,5$ e $t = 0,75$, obtemos a velocidade média

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7,44 - 6,25}{0,75 - 0,5} = 4,76 \text{ m/s}$$

Medidas ainda mais precisas do movimento permitem o cálculo de velocidades médias em intervalos menores. Digamos que a altura da bola foi medida a cada 0,1 segundo e que os valores próximos a $t = 0,5$ são os seguintes:

Altura da bola					
t(seg)	0,8	0,9	1	1,1	1,2
h(m)	7,6	7,85	8	8,05	8,0

Calculando a velocidade média no intervalo entre $t = 1$ e $t = 1,1$, obtemos:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{8,05 - 8}{1,1 - 1,0} = 0,5 \text{ m/s}$$

que é a velocidade média em um intervalo de 0,1 seg iniciando no instante $t = 1$. Claro que medidas mais precisas poderiam permitir o cálculo da velocidade média em intervalos cada vez menores em torno de $t = 1$, mas ainda não seria a velocidade *no instante* $t = 1$.

Intuitivamente, quanto menor o intervalo, mais próxima a velocidade média fica da velocidade instantânea. Para definir esta última, temos que recorrer ao conceito de *limite*.

Se $s(t)$ é a altura da bola no tempo t , então considerando a velocidade média no intervalo de tempo $[1, 1 + h]$, quando h tende a 0, então esta velocidade média tende a um valor que pode ser considerado a velocidade instantânea em $t = 1$, ou seja, podemos definir

$$v(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(1+h) - s(1)}{h}$$

De maneira mais geral, se $s(t)$ é a função posição de um objeto, então a velocidade deste objeto no tempo $t = t_0$ é definida por

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h},$$

se tal limite existir.

Este limite é exatamente a definição de derivada de uma função.

DEFINIÇÃO 1 DERIVADA

A derivada de uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo aberto I em um ponto $x_0 \in I$ é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

caso este limite exista.

Se o limite existir a função f é dita derivável em x_0 .

DEFINIÇÃO 2 FUNÇÃO DERIVADA

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I . Se f é derivável para todo ponto de seu domínio, dizemos que a função é derivável e que a função $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in I$ o valor $f'(x)$ é a função derivada de f .



Usa-se também a notação $\frac{dy}{dx}$ para representar a derivada $f'(x)$. Tanto $f'(x_0)$ quanto $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ representam a derivada da função f no ponto x_0 de seu domínio.

Por exemplo, a velocidade $v(t)$ de um objeto em movimento é a função derivada da função posição $s(t)$ do objeto, isto é, $v(t) = s'(t)$.

Há uma razão histórica para o uso das duas notações ligada à criação do cálculo diferencial por Newton e, independentemente, Leibniz. Veremos um pouco desta história na seção 9.5.

A velocidade é a taxa de variação instantânea da posição $s(t)$ em relação ao tempo t e é dada pela derivada da função $s(t)$. De forma análoga, há muitas grandezas definidas como taxa de variação de outra em relação ao tempo. Por exemplo, a aceleração é a taxa de variação da velocidade.

A aceleração média é dada por

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

onde Δv é a variação de velocidade no intervalo de tempo Δt considerado. Se a velocidade é dada pela função no tempo $v(t)$ então definimos:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Há vários outros exemplos na Física: a Potência é a derivada do Trabalho em relação ao tempo, o fluxo de um líquido que escoa de um vaso é a derivada do volume do líquido em relação ao tempo, etc.

Voltaremos oportunamente ao exemplo da bola e mostraremos que o movimento descrito pela bola do saque não realizado do jogador de vôlei é (aproximadamente) um movimento uniformemente acelerado. Estudaremos as equações deste movimento.

Na próxima seção, relacionaremos a noção de derivada de uma função com a reta tangente a uma curva dada.



Exercícios

1. Em um tempo de t segundos, um objeto se move s metros de sua posição inicial, sendo s dado por $s = 2t^2$. Estime a velocidade do objeto em $t = 2$ seg, calculando sua velocidade média entre $t = 2$ e $t = 2 + h$, onde $h = 0,1$.
2. No exercício anterior, estime a velocidade do objeto para $t = 1$, $t = 3$ e $t = 4$, esboce um gráfico e mostre que o gráfico da velocidade com o tempo é aproximadamente uma reta.
3. Considere um balão aproximadamente esférico. Você já deve ter notado que o balão parece encher mais rápido no início, ou seja, o raio parece aumentar mais rápido quando começamos a encher o balão. Como o aumento do volume é devido ao fluxo de ar para dentro do balão, que é constante, esta impressão decorre do fato de que a taxa de aumento do raio diminui a medida que o volume aumenta. Para verificar isto, escreva o raio r em função do volume V do balão e calcule o aumento médio do raio nos intervalos $0,5 \leq V \leq 1$ e $1,5 \leq V \leq 2,0$.

9.2 O problema da tangente

O problema da tangente consiste em encontrar a equação da reta tangente passando por um certo ponto de uma curva que é gráfico de uma função $y = f(x)$.

Este problema está relacionado com o problema de encontrar a velocidade instantânea, ou seja, ao problema de encontrar a derivada de uma função, como veremos a seguir.

Seja $f(x)$ uma função e seja $x = x_0$ um ponto do seu domínio. Seja $x_1 = x_0 + h$.

Observe o gráfico de uma função $f(x)$, onde traçamos a reta secante que passa pelos pontos $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_1, f(x_1))$. Note que o gráfico foi traçado supondo $h > 0$. No entanto, a situação $h < 0$ também deve ser considerada.

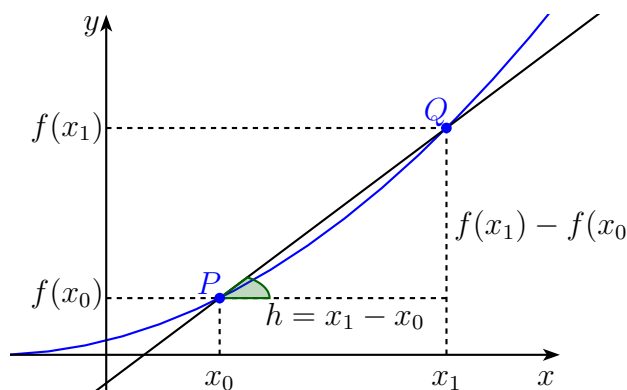


Figura 9.1:

Como você estudou em MA11, o *coeficiente angular* ou *inclinação* da reta secante à curva passando pelos pontos $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_1, f(x_1))$ é dado por

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tomando h cada vez mais próximo de zero, obtemos retas secantes que cortam a curva em dois pontos P e Q_i cada vez mais próximos. Observe a figura 9.2

Intuitivamente percebemos que quando $x_0 + h$ se aproxima de x_0 então os pontos $f(x_0 + h)$ e $f(x_0)$ onde a secante corta a curva ficam cada vez mais

próximos e assim estas cruvas secantes se aproximam cada vez mais da tangente em x_0 .

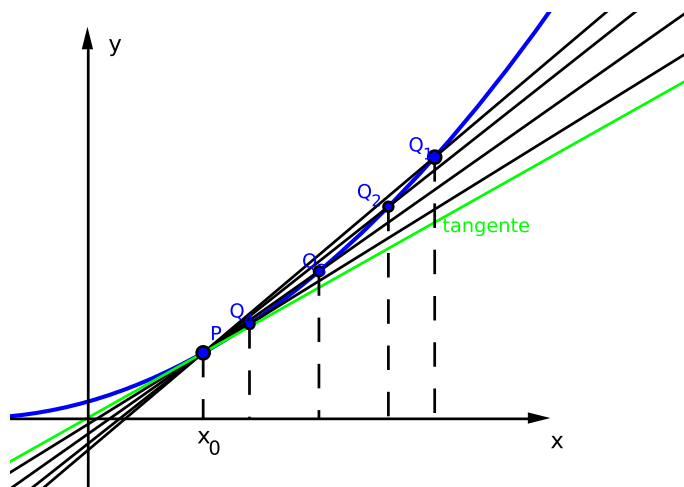


Figura 9.2:

Quando h se aproxima de zero, se o quociente

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

que representa o coeficiente angular da reta secante que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, se aproxima de um determinado valor, esse, intuitivamente, deverá ser o coeficiente angular da reta tangente.

Na verdade, o que fazemos é definir reta tangente da curva em $P = (x_0, f(x_0))$ como a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Caso o limite não exista, não há reta tangente no ponto.

Em resumo:

DEFINIÇÃO 3 RETA TANGENTE

A reta tangente a uma curva que é gráfico de $y = f(x)$ em um ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

se o limite existir.

É importante observar que o limite deve existir à direita e à esquerda de x_0 . Poderíamos ter considerado pontos à esquerda de P cada vez mais próximos dele, e o resultado teria que ser o mesmo.

A figura a seguir, por exemplo, mostra uma função em que os limites laterais

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad \text{e} \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

existem, mas são distintos. As secantes que passam pelos pontos Q_i e $P = (0, 0)$, com $Q_i \rightarrow P$ pelo lado esquerdo tendem a uma reta decrescente, ou seja com coeficiente angular negativo, enquanto que as secantes que passam pelos pontos P e Q_i , com $Q_i \rightarrow P$ pelo lado direito tendem à reta $y = 0$. Neste caso, a função *não é derivável* em $x = 0$.

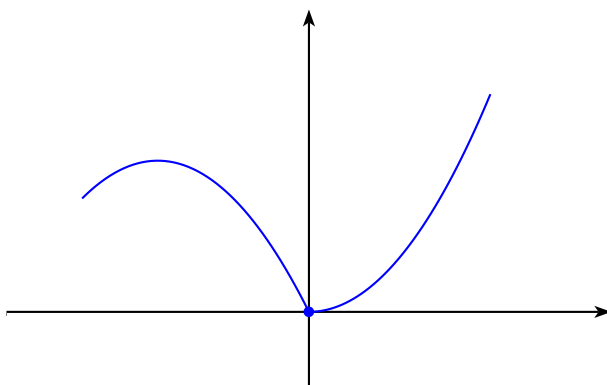


Figura 9.3:

Seja $f(x) = k$ uma função constante. O gráfico de f é uma reta horizontal, que tem coeficiente angular zero. A tangente em qualquer ponto é a própria reta e, portanto, também tem coeficiente angular zero.

$$\text{Se } f(x) = k \text{ então } f'(x) = 0$$

Podemos chegar à mesma conclusão fazendo diretamente o cálculo do limite. Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0$$

EXEMPLO 4
DERIVADA DA FUNÇÃO
CONSTANTE

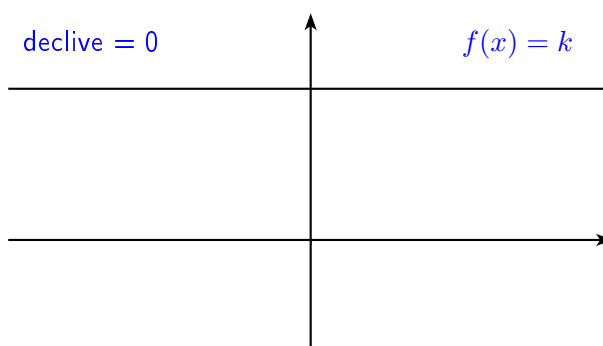


Figura 9.4: função constante

EXEMPLO 5
DERIVADA DA FUNÇÃO
LINEAR

Seja $f(x) = mx + n$ uma função linear. Como o gráfico é uma reta r , é evidente que sua reta tangente em qualquer ponto é própria reta r e a derivada da função em qualquer ponto é o coeficiente angular m da reta, isto é:

$$\text{Se } f(x) = mx + n \text{ então } f'(x) = m$$

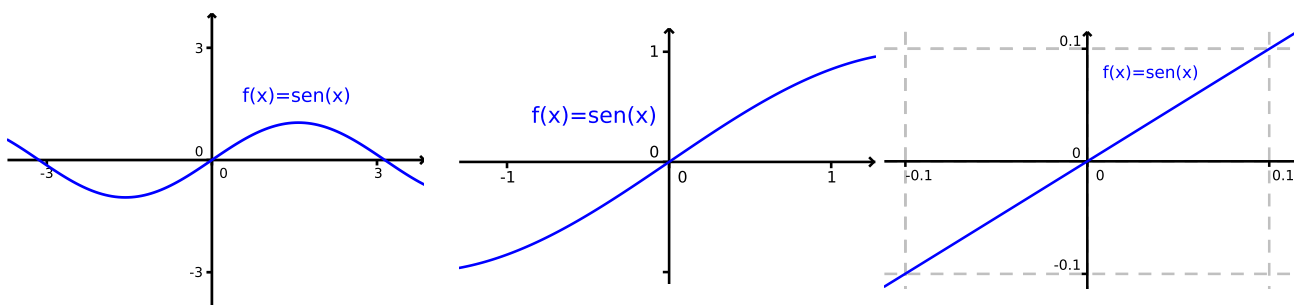
Calculando diretamente o limite, obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + n - (mx + n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m \end{aligned}$$

EXEMPLO 6

Usando um software de visualização gráfica, vamos estimar o valor da derivada de $\sin(x)$ em $x = 0$.

As figuras a seguir mostram o gráfico de $y = \sin(x)$ para intervalos cada vez menores em torno de $x = 0$.



Observe na figura acima que ampliando a figura em torno da origem fica claro que o gráfico de $y = \sin(x)$ se aproxima de uma reta. Veja na última figura à direita como o gráfico quase passa pelos pontos $(-0,1, 0,1)$ e $(0,1, 0,1)$. A equação da reta que passa por estes pontos é $y = x$. Portanto, podemos deduzir que a derivada de $y = \sin(x)$ em $x = 0$ deve ser muito próximo do valor 1. É fácil ver, usando o limite trigonométrico fundamental estudado na Unidade 5, que o valor é exatamente igual a 1.

Na próxima seção iremos calcular a partir da definição

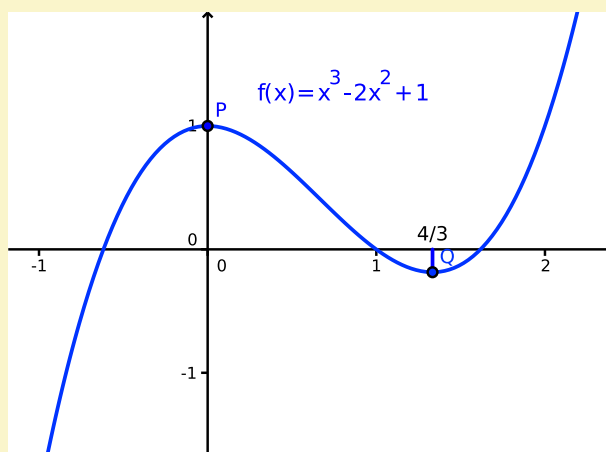
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

alguns exemplos de derivadas de funções. Calcular o limite acima diretamente somente é prático para algumas funções mais simples. No próximo capítulo iremos apresentar regras de derivação que permitem calcular a derivada de um conjunto mais amplo de funções.



Exercícios

1. Usando o mesmo método do exemplo anterior, calcule o valor aproximado da derivada de $y = \cos(x)$ no ponto $x = \frac{\pi}{2}$.
2. Determine por argumentos geométricos os intervalos em que a derivada da função $f(x)$ é positiva, negativa e nula, dado o gráfico de $f(x)$ a seguir. Confirme algebricamente sua análise anterior.



9.3 Exemplos do cálculo direto da derivada

No próximo capítulo iremos estudar regras que permitem descobrir sem grande dificuldade a derivada da maior parte das funções usuais. No entanto, para funções muito simples, é possível calcular diretamente a derivada da função a partir da definição de derivada. Já fizemos isto para o cálculo das derivadas das funções constante $f(x) = k$ e linear $f(x) = mx + n$. Nesta seção faremos mais alguns exemplos.

Como primeiro exemplo, seja a função $f(x) = x^2$. Vamos calcular sua derivada em um ponto $x = x_0$.

Seja $f(x) = x^2$. Temos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h \\ &= 2x_0 \end{aligned}$$

O que mostra que se $f(x) = x^2$ então $f'(x) = 2x$.

Calcule a equação da tangente à curva $y = x^2$ no ponto $x = 3$.

EXEMPLO 7

Como $\frac{dy}{dx} = 2x$ então:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6$$

Portanto, a reta tangente tem coeficiente angular $a = 6$. A equação da reta é dada por

$$y = 6x + b$$

onde b é o coeficiente linear da reta, que ainda devemos calcular. Para isso, basta conhecer um ponto da reta. Como ela corta a parábola $y = x^2$ no ponto de abscissa 3, este ponto tem ordenada $y = 3^2 = 9$.

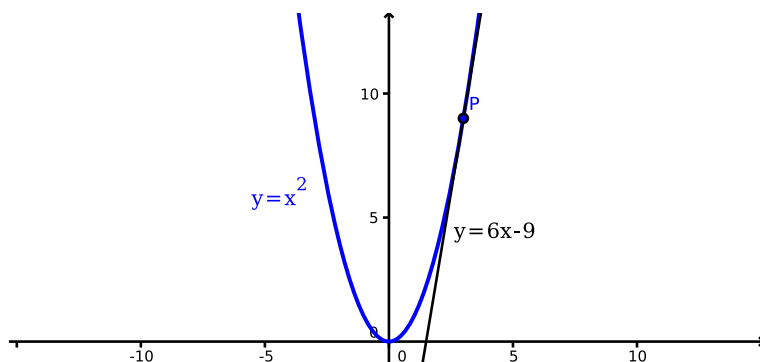


Substituindo o ponto de tangência $(3, 9)$ na equação da reta resulta:

$$y = 6x + b$$

$$9 = 6 \cdot 3 + b \implies b = 9 - 18 = -9$$

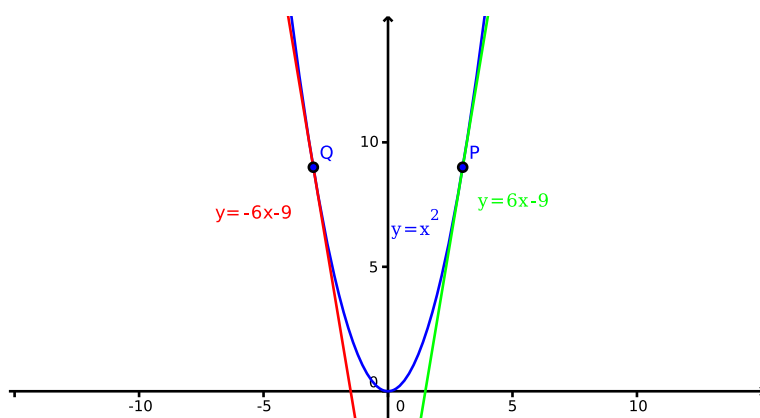
A equação da reta é $y = 6x - 9$.



Para esta mesma função, o cálculo do coeficiente angular nos pontos $x = -3$ e $x = 0$ resulta em

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-3} = 2(-3) = -6 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 2 \cdot 0 = 0$$

O que mostra que a reta tangente em $x = -3$ é decrescente (a reta é $y = -6x - 9$, verifique!) e a reta tangente em $x = 0$ é horizontal (coeficiente angular nulo).



Faremos a seguir mais um exemplo do cálculo da tangente ao gráfico de uma curva determinando diretamente a derivada de uma função.

EXEMPLO 8

Seja a curva dada pela equação $y = x^3 - 2x$. Calcule a equação da tangente passando pelo ponto da curva de abscissa $x = 1$.

Se $x = 1$ então $y = x^3 - 2x = 1^3 - 2 \cdot 1 = -1$. Portanto o ponto é $P = (1, -1)$.

Utilizando a definição de derivada e as propriedades dos limites, calculamos diretamente a derivada $f'(x)$ da função $f(x) = x^3 - 2x$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - 2(x+h) - (x^3 - 2x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3xh^2 + 3x^2h + h^3 - 2x - 2h - x^3 + 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3xh^2 + 3x^2h + h^3 - 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3xh + 3x^2 + h^2 - 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3xh + 3x^2 + h^2 - 2 \\ &= 3x^2 - 2 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = 3x^2 - 2$ é a derivada da função $f(x) = x^3 - 2x$.

Em particular, para $x = 1$, temos

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1$$

Assim, a reta tangente tem coeficiente angular $a = 1$. É uma reta de equação $y = ax + b = 1 \cdot x + b = x + b$. Substituindo as coordenadas do ponto $P = (1, -1)$, obtemos o valor do coeficiente linear $b = -2$.

A equação da reta tangente é $y = x - 2$.

Na figura 9.5, vemos o gráfico da curva $y = x^3 - 2x$ e da reta $y = x - 2$. Observe que a reta é realmente a tangente à curva no ponto P .



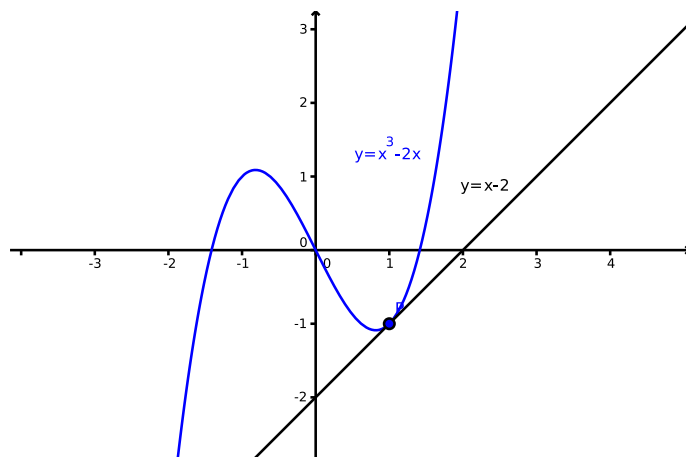


Figura 9.5: Reta $y = x - 2$ tangente à curva $y = x^3 - 2x$ em $P = (1, -1)$

EXEMPLO 9

Calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$ no domínio $x > 0$ e calcule a equação da reta tangente no ponto $P = (1, 1)$.

Calculando diretamente a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \end{aligned}$$

Não podemos resolver o limite diretamente substituindo $h = 0$ pois resultaria na expressão $\frac{0}{0}$. No entanto, se multiplicarmos numerador e denominador por $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$, resulta em um limite de fácil cálculo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Para calcular este limite, basta fazer $h = 0$ na última expressão, pois, como $f(x) = \sqrt{x}$ é uma função contínua, $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x+h} = \sqrt{x}$. Resulta que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

é a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$.

Em particular, para $x = 1$, temos $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$. Assim, a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(1, 1)$ tem coeficiente angular $a = \frac{1}{2}$. É, portanto, uma reta de equação $y = ax + b = \frac{1}{2}x + b$.

Substituindo as coordenadas do ponto $P = (1, 1)$ na equação da reta $y = ax + b = \frac{1}{2}x + b$ obtemos o valor do coeficiente linear $b = \frac{1}{2}$.

A equação da reta tangente é $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Na figura 9.6 vemos o gráfico da curva $y = \sqrt{x}$ e da reta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Observe que a reta é realmente a tangente à curva no ponto P .

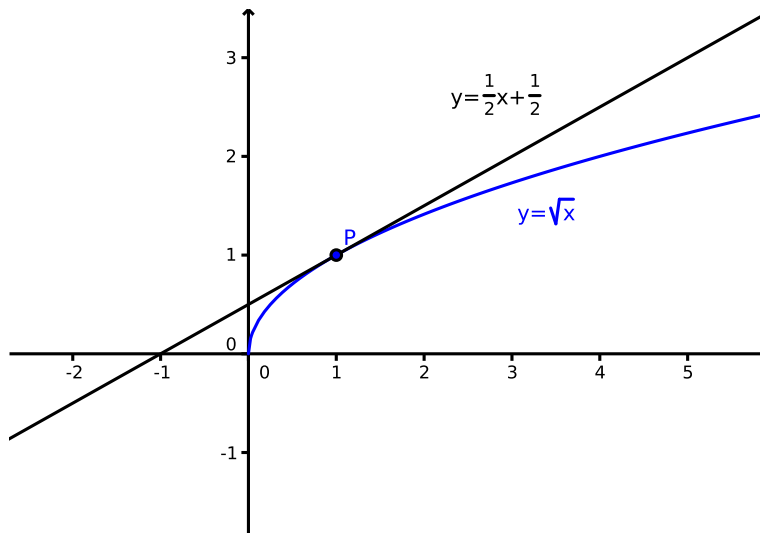


Figura 9.6: Reta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ tangente ao gráfico de $y = \sqrt{x}$ no ponto $P = (1, 1)$

A reta normal ao gráfico de uma função passando por um ponto P é a reta ortogonal à tangente ao gráfico da curva passando por P . O próximo exemplo ilustra o cálculo de uma reta normal ao gráfico de uma função dada.

EXEMPLO 10

Calcule a equação da reta normal ao gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, passando pelo ponto $P = (2, 1/2)$.

O cálculo da derivada de $f(x) = 1/x$ resulta em:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + xh} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{x} \implies f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

A reta tangente passando por $P = (2, 1/2)$ tem coeficiente angular $a = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

Lembrando que se duas retas não-verticais são ortogonais e têm coeficientes angulares iguais a m e m' então $m \cdot m' = -1$, obtemos o coeficiente angular da reta normal:

$$m \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \implies m = 4$$

Assim, a reta normal ao gráfico da função no ponto $(2, 1/2)$ é uma reta de equação $y = 4x + b$. Substituído as coordenadas do ponto $P = (2, 1/2)$, obtemos o valor do coeficiente linear $b = -\frac{15}{2}$.

A equação da reta normal é $y = 4x - \frac{15}{2}$. Observe a figura 9.7.

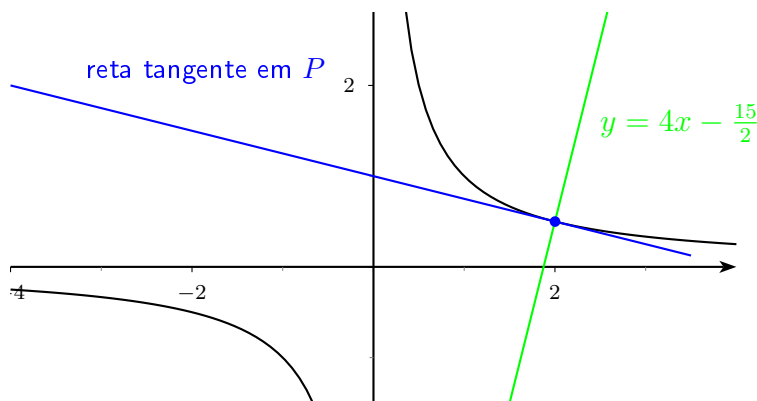


Figura 9.7: Reta $y = 4x - \frac{15}{2}$ é normal ao gráfico de $y = \frac{1}{x}$ no ponto $(2, 1/2)$



9.4 Continuidade e derivabilidade

Todos os exemplos apresentados até o momento de funções deriváveis em todo seu domínio são de funções contínuas. Mostraremos que este é sempre o caso: toda função derivável é contínua. No entanto, mesmo funções contínuas em todo seu domínio podem não ser deriváveis em alguns dos pontos de seu domínio. Há mesmo casos de funções contínuas em toda a reta real e que não são deriváveis em nenhum ponto do seu domínio.

Vamos iniciar apresentando um exemplo de função contínua não derivável em um ponto do seu domínio. A função $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$.

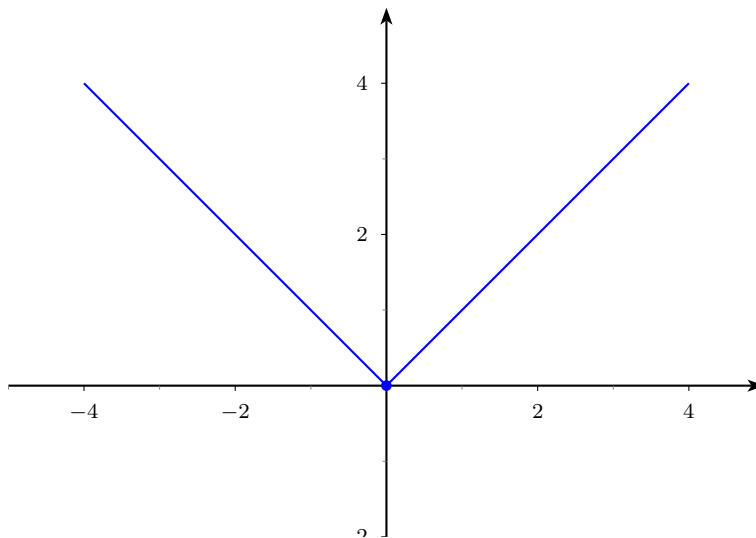


Figura 9.8: função $y = |x|$ não é derivável no ponto $x = 0$

A derivada em $x = 0$ seria, caso existisse, o valor do limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

No entanto, o valor de $|h|$ depende do sinal de h :

$$|h| = \begin{cases} h & , \text{se } h \geq 0 \\ -h & , \text{se } h < 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{|h|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1 & \text{se } h > 0 \\ \frac{-h}{h} = -1 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

Conclui-se que os limites laterais existem, mas têm valores direntes:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Visualmente, toda secante que passa por Q e O , sendo O a origem e Q no gráfico de $|x|$ à esquerda de O é a reta $y = -x$, enquanto que as secantes que passam por O e Q com o ponto Q do gráfico de $|x|$ à direita de O é a reta $y = x$.

Como os limites laterais existem, mas têm valores diferentes, o limite não existe e a função *não é derivável* em $x = 0$.

Se, por um lado, funções contínuas podem não ser derivável, por outro lado, toda função derivável é contínua.

TEOREMA 11

Seja f um função definida em um intervalo aberto I . Se f é derivável em $x_0 \in I$ então f é contínua em x_0 .

DEMONSTRAÇÃO

Temos que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h.$$

Passando ao limite quando $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h$$

Mas

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

Logo

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

o que mostra que f é contínua em x_0 .

Vimos o exemplo da função $f(x) = |x|$ que é contínua em todo seu domínio, mas não é derivável no ponto $x = 0$. A maior parte dos exemplos de funções com as quais lidamos são deriváveis ou deixam de ser deriváveis apenas em um conjunto finito de pontos. Em 1872, o matemático Weierstrass apresentou um exemplo de função contínua em todo seu domínio, mas que não é derivável em nenhum ponto. Esta é a chamada função de Weierstrass, cujo estudo foge ao escopo deste texto.

9.5 Um pouco da história do Cálculo

O surgimento do cálculo diferencial e integral foi palco de uma grande controvérsia sobre a paternidade da descoberta. A discussão envolveu dois grandes gênios: Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Leibniz (1642–1716).

Atualmente considera-se que os dois matemáticos descobriram o cálculo de forma independente e, assim, o crédito é dado a ambos. No entanto, à época o debate de quem merecia o reconhecimento foi acalorado, com defensores aguerridos de ambos os lados.

É importante observar também que uma descoberta matemática importante não aparece do nada. É o resultado do trabalho de muitas pessoas ao longo de séculos. Newton reconheceu este fato por meio de sua famosa frase "Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes."¹

Newton e Leibniz tiveram abordagens diferentes do Cálculo e tomaram caminhos distintos em suas descobertas. Newton tentava resolver problemas na Física e seguiu um caminho mais prático voltado à solução destes problemas. Leibniz era um filósofo e tomou um caminho mais abstrato.

Foi Leibniz que criou a notação $\frac{dy}{dx}$ para a derivada de y em relação a x . Ele imaginava um "triângulo infinitesimal" formado pelo incremento Δx e o incremento correspondente Δy . A razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima do coeficiente angular da tangente quando $\Delta x \rightarrow 0$. Leibniz via este limite como a divisão de duas quantidades "infinitesimais".

Newton descobriu os fundamentos do Cálculo diferencial e integral muitos anos antes de Leibniz, mas publicou seus trabalhos mais tarde. Newton chamou o cálculo de "métodos de fluxões". Usando diferenciação, Newton produziu métodos que resolviam problemas do cálculo da área, tangentes, comprimento de curvas e máximos e mínimos de funções.

Newton também percebeu o fato crucial de que a integração de uma função é a operação inversa da diferenciação, o que hoje é chamado Teorema Fundamental do Cálculo.

¹Carta para Robert Hooke (15 de Fevereiro de 1676)



Exercícios

1. Sabendo-se que a altura da bola de vôlei na Seção 9.1 é dada aproximadamente por $s = 2 + 22t - 5t^2$, onde s é a altura em metros e t o tempo em segundos desde que é lançada, faça o que se pede:
 - (a) calcule a velocidade média para um intervalo de 0, 1 seg. em $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.
 - (b) Esboce um gráfico e verifique que a velocidade varia linearmente com o tempo.
 - (c) Derivando a função $s = s(t)$, encontre a expressão da derivada $v = \frac{ds}{dt}$ e verifique que corresponde aproximadamente ao gráfico obtido no item 2.
 - (d) Calcule o instante em que a bola atinge o ponto de altura máxima.
2. Usando um calculadora científica, estime o valor da derivada da função $f(x) = e^x$, para $x = 1, 2$ e 3 e verifique que o resultado é próximo de e , e^2 e e^3 , respectivamente.
3. Determine a reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2x + 3$ passando pelo ponto $(2, 7)$.
4. Determine a reta tangente ao gráfico de $y = 2 - x^2$ passando pelo ponto $(1, 1)$. Esboce um gráfico.
5. Determine a reta tangente ao gráfico da parábola $y = x^2 + 2x$ passando pelo ponto $(-3, 3)$. Esboce um gráfico.
6. Determine a reta tangente ao gráfico da hipérbole $y = 1 + \frac{1}{x}$ passando pelos pontos $(1, 2)$ e $(-1, 0)$. Esboce um gráfico.
7. Encontre a equação da reta normal à hipérbole $y = \frac{1}{x}$ passando pelos pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. Verifique que se trata da mesma reta. Faça um gráfico.
8. Encontre a reta normal ao gráfico de $y = 2\sqrt{x}$ passando por $(1, 2)$. Faça um gráfico.

9. Sendo a uma constante, mostre que a derivada de $f(x) = ax^2$ é $f'(x) = 2ax$.
10. Sendo a, b e c constantes, mostre que a derivada de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é $f'(x) = 2ax + b$.
11. Sendo a e b constantes, mostre que a derivada de $f(x) = a\sqrt{x+b}$ é $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x+b}}$.
12. Mostre que a derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ é $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.
13. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x|x|$ é derivável.
14. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{se } x \leq -2, \\ ax^2 + bx + c & \text{se } -2 < x < 0, \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Determine os valores de a , b e c para os quais a função f é contínua.
Determine os valores de a , b e c para os quais a função f é derivável.



10

CÁLCULO DE DERIVADAS

Sumário

10.1	Derivada da soma	2
10.2	Derivada do produto	4
10.3	Derivada do quociente	5
10.4	Derivada da potência	7
10.5	Exercícios	10
10.6	Derivadas das funções trigonométricas	11
10.7	Exercícios	14
10.8	Regra da cadeia	15
10.9	Exercícios	20
10.10	Textos Complementares	21

Na Unidade 9 vimos a definição de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e calculamos diretamente a partir da definição a derivada de algumas funções:

$$\begin{aligned} f(x) = k, \quad k \text{ constante} &\implies f'(x) = 0 \\ f(x) = ax + b, \quad a, b \text{ constantes} &\implies f'(x) = a \\ f(x) = x^2 &\implies f'(x) = 2x \\ f(x) = \frac{1}{x} &\implies f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ f(x) = \sqrt{x} &\implies f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

A lista pode ser bastante ampliada, mas o cálculo direto a partir do limite fica progressivamente mais difícil quando tentamos encontrar a derivada de funções menos simples do que as listadas acima.

Nesta unidade, estudaremos de forma sistemática as derivadas de funções como potência, polinomiais e trigonométricas. Estudaremos também regras gerais para obter a derivada da soma, produto e quociente de duas ou mais funções. Por fim, estudaremos a regra da cadeia, que permite encontrar a derivada de uma função que é a composição de duas funções. Utilizando a regra da cadeia, veremos como calcular a derivada de uma função dada implicitamente por uma equação e a derivada de uma função dada como inversa de outra cuja derivada conhecemos.

10.1 Derivada da soma

Vamos provar que a derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas das funções.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais. Então

$$\begin{aligned} (f+g)(x+h) - (f+g)(x) &= f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x)) \\ &= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)) \end{aligned}$$



Portanto,

$$\begin{aligned}
 (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(x) + g'(x),
 \end{aligned}$$

caso os limites envolvidos existam.

Provamos então a seguinte proposição:

Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo aberto I . Se as duas funções forem deriváveis em $x_0 \in I$, então a função soma $f + g$ é derivável em x_0 e vale que

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

PROPOSIÇÃO 1
DERIVADA DA SOMA

Encontre a derivada da função $2x + 1 + \frac{1}{x}$ em um ponto qualquer de seu domínio.

Na unidade 9 vimos que a derivada de $f(x) = ax + b$ é $f'(x) = a$, logo a derivada de $f(x) = 2x + 1$ é $f'(x) = 2$. Vimos também que a função $g(x) = \frac{1}{x}$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}^*$ e que $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Portanto, $(f + g)(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}^*$ e

$$(f + g)' = \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right)' = (2x + 1)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2 - \frac{1}{x^2}$$

EXEMPLO 2

Usando indução, é fácil generalizar o resultado para a soma de várias funções:

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$$

Encontre a derivada da função $x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

EXEMPLO 3

A função x^2 é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ e $(x^2)' = 2x$.



A função \sqrt{x} é derivável para todo $x > 0$ e $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

A função $\frac{1}{x}$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}^*$ e $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$.

Resulta que a função $x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ é derivável para todo $x > 0$ e

$$\left(x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' + (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

10.2 Derivada do produto

Vamos obter uma fórmula para a derivada do produto de duas funções $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Observe inicialmente que:

$$\begin{aligned} f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) &= \\ f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) \end{aligned}$$

em que simplesmente somamos e subtraímos na expressão a parcela $f(x)g(x+h)$.

Reagrupando a expressão:

$$\begin{aligned} &f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= (f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x)) \end{aligned}$$

Dividindo a expressão por h e passando ao limite $h \rightarrow 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} \right) g(x) + f(x) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \right) \end{aligned}$$

Observe que no desenvolvimento acima usamos as propriedades do limite da soma e do produto, estudados anteriormente. Usamos também a continuidade da função g , assegurada por resultado da seção anterior para o caso em que g é derivável. Os limites na última equação acima são, supondo f e g deriváveis, respectivamente, os valores de $f'(x)$ e $g'(x)$. Provamos, portanto, a seguinte proposição.



Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções definidas em um intervalo aberto I . Se as duas funções forem deriváveis em $x_0 \in I$, então a função produto $(fg)(x)$ é derivável em x_0 e vale que

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Em particular, se k é uma constante e f uma função derivável então

$$(kf)' = (k)'f + k(f)' = 0 \cdot f + k \cdot f' = kf'$$

em que usamos o fato de que a derivada da constante é zero.

PROPOSIÇÃO 4 DERIVADA DO PRODUTO

Calcule a derivada das funções $2x^2 + 3x + 1$, $x\sqrt{x}$ e $(x^2 + x)(x^2 - 1)$

EXEMPLO 5

i) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \implies$

$$f'(x) = (2x^2)' + (3x)' + (1)' = 2 \cdot (x^2)' + 3(x)' + 0 = 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 = 4x + 3.$$

ii) $f(x) = x\sqrt{x} \implies$

$$f'(x) = (x)' \cdot \sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})' = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}.$$

iii) $f(x) = (x^2 + x)(x^2 - 1) \implies$

$$f'(x) = (x^2 + x)'(x^2 - 1) + (x^2 + x)(x^2 - 1)' = (2x + 1)(x^2 - 1) + (x^2 + x)(2x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1.$$

Neste último exemplo, obteríamos o mesmo resultado desenvolvendo o produto primeiro e depois derivando termo a termo.

10.3 Derivada do quociente

Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo não trivial I . Definimos a função quociente

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

para todo ponto $x \in I$ tal que $g(x) \neq 0$.

Suponha agora que f e g são deriváveis em um ponto $x_0 \in I$ e que $g(x_0) \neq 0$. Provaremos que $\frac{f}{g}$ também é derivável em x_0 e obteremos uma expressão para a derivada da função $\frac{f}{g}$ em x_0 .



Para começar, se g é derivável em x_0 , então é contínua em x_0 . Se $g(x_0) \neq 0$ então há um intervalo aberto J com $x_0 \in J$ tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in J$, ou seja, a função $\frac{f}{g}$ está definida em J . Para $x, x+h \in J$, temos que:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x+h)} \left(\frac{f(x+h)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+h)}{h} \right) \\ &= \frac{1}{g(x)g(x+h)} \left(\frac{f(x+h)}{h} \cdot g(x) - \frac{f(x)g(x)}{h} + \frac{f(x)g(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h)}{h} \right) \\ &= \frac{1}{g(x)g(x+h)} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \end{aligned}$$

em que somamos e subtraímos um termo $\frac{f(x)g(x)}{h}$.

Passando agora ao limite quando $h \rightarrow 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} \\ &= \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x)g(x+h)} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= \frac{1}{g(x) \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} \left(g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \end{aligned}$$

Se f e g forem deriváveis, então todos os limites envolvidos existem e $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$, pois sendo g derivável em x também é contínua em x .

Resulta que, se f e g são deriváveis em um ponto $x_0 \in I$ vale que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{h} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Provamos assim a seguinte proposição:

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções definidas em um intervalo não trivial I . Se as duas funções forem deriváveis em $x_0 \in I$ e $g(x_0) \neq 0$, então a função produto $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ é derivável em x_0 e vale que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$


PROPOSIÇÃO 6
DERIVADA DO QUOCIENTE

Exemplos:

$$f(x) = \frac{1}{x} \implies f'(x) = \frac{(1)' \cdot x - 1 \cdot (x)'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{x+a}{x-a}, \text{ para } x \neq a \implies$$

$$f'(x) = \frac{(x+a)'(x-a) - (x+a)(x-a)'}{(x-a)^2} = \frac{(x-a) - (x+a)}{(x-a)^2} = -\frac{2a}{(x-a)^2}$$

 Para Saber Mais - Obter a derivada de $\frac{f}{g}$ usando a derivada do produto - Clique para ler

10.4 Derivada da potência

Vamos calcular a derivada da função potência $f(x) = x^n$, para n inteiro qualquer.

Vamos separar nossa dedução em duas partes: primeiro encontraremos a derivada de x^n para $n > 0$ usando a derivada do produto e indução. Em seguida, encontraremos a derivada de x^n para $n < 0$ usando a derivada do quociente. O caso $n = 0$ é trivial.

A função $f(x) = x^n$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ se $n \geq 0$ e derivável para $x \in \mathbb{R}^*$ se $n < 0$. Nos dois casos

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$$

PROPOSIÇÃO 7
DERIVADA DA POTÊNCIA

DEMONSTRAÇÃO

Se $n = 0$ o resultado se segue imediatamente, pois $x^0 = 1$, cuja derivada é 0.

Provaremos o caso $n > 0$ por indução. Vale para $n = 1$, pois

$$f(x) = x^1 = x \implies f'(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1}.$$

Suponha que o resultado vale para $n = k$, ou seja, $f(x) = x^k$ é derivável e $f'(x) = kx^{k-1}$, então, aplicando a regra do produto, temos que $g(x) = x^{k+1} = x \cdot x^k$ é derivável e

$$(x^{k+1})' (x \cdot x^k)' = x'x^k + x \cdot (x^k)' = x^k + kxx^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1)x^{k+1},$$

o que completa a prova do caso $n > 1$.

Suponha agora que $n < 0$. então $n = -m$, com $m > 0$ e

$$x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

Se $x \neq 0$ então, pela derivada do produto, $\frac{1}{x^m}$ é derivável e vale que:

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{(1)'(x^m) - 1(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

EXEMPLO 8

Encontre a derivada da função $f(x) = x^4 + x^3 + x^2$.

Usando a derivada da soma e da potência:

$$(x^4 + x^3 + x^2)' = (x^4)' + (x^3)' + (x^2)' = 4x^3 + 3x^2 + 2x$$

EXEMPLO 9

Encontre a derivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Para $x \neq 0$, a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é derivável e

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

o que concorda com o que obtivemos anteriormente.




Encontre a derivada da função $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$.

EXEMPLO 10

Temos que $x^4 + 1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ logo $f(x)$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$\left(\frac{x^2}{x^4+1} \right)' = \frac{(x^2)'(x^4+1) - x^2(x^4+1)'}{(x^4+1)^2} = \frac{2x(x^4+1) - x^2(4x^3)}{(x^4+1)^2} = \frac{2x - 2x^5}{(x^4+1)^2}$$

 Para Saber Mais - Demonstração alternativa para a fórmula da derivada da potência - Clique para ler

Mostramos acima a fórmula da derivada da potência para expoentes inteiros. Na verdade, a mesma fórmula vale para qualquer expoente real, o que será provado posteriormente.

10.5 Exercícios

Calcule a derivada das seguintes funções:

1. $3x^3$

5. $(x^2 + 3)(x + 1)$

9. $\frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}$

2. $2x^2 + x$

6. $\sqrt{x}(x - a)$

10. $\frac{x+2}{\sqrt{x}}$

3. $2x^{-3}$

7. $x^{3/2} = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$

11. $\frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-a}$

4. $\frac{x}{\sqrt{x}}$

8. $\frac{x^2+1}{x-1}$

12. $x^{-5/2}$

13. Determine a reta tangente no ponto $(1, 1)$, do gráfico da curva $y = x^4 - x^2 + 1$.

14. Determine a reta tangente no ponto de abscissa $x = 3$ da curva dada por $y = 2\sqrt{x+1}$, para $x \geq 1$. Faça um gráfico.

15. Estude a derivabilidade da função $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Encontre a derivada no ponto de abscissa $x = 2$.

16. Encontre a derivada de $f(x) = (x+1)^5$ no ponto $x = 1$.

17. Seja $f(x) = (x+1)^n$, com n inteiro positivo. Mostre que $f'(1) = n2^{n-1}$. (Sugestão: use a fórmula do binômio de Newton).

Seja f uma função derivável. Se f' é derivável, então sua derivada é chamada derivada segunda de f e denotada f'' . Se f'' também é derivável, sua derivada é chamada derivada terceira de f e denotada f''' . Se f é n -vezes derivável, a n -ésima derivada é denotada $f^{(n)}(x)$.

18. Mostre que se $f(x) = x^n$, com $n > 0$, então $f^n(x) = n!$.

19. Demonstre que

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''.$$

20. Demonstre que

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

10.6 Derivadas das funções trigonométricas

Nesta seção, vamos encontrar as derivadas das funções $\sin x$ e $\cos x$. As outras funções trigonométricas podem ser obtidas a partir destas duas utilizando as regras de derivação já estudadas.

Lembremos o limite trigonométrico fundamental estudado na Unidade 5:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Ainda na Unidade 5, no exemplo 4, mostramos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 .$$

Usaremos estes dois limites para determinar a derivada da função $\sin x$. Calculando diretamente a derivada de $f(x) = \sin x$, obtemos:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right) + \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) \end{aligned}$$

em que usamos a fórmula do seno da soma:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

e agrupamos os termos com $\sin x$ e $\cos x$. Passando o limite quando $h \rightarrow 0$ e usando os limites citados acima, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \cos x \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right) + \sin x \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) \\ &= \cos x \cdot 1 + \sin x \cdot 0 \\ &= \cos x . \end{aligned}$$

Concluimos assim:



PROPOSIÇÃO 11
DERIVADA DO SENO

Se $f(x) = \sin x$ então $f'(x) = \cos x$.

EXEMPLO 12

Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \sin x$ no ponto $(\pi, 0)$.

A inclinação da reta tangente é $f'(\pi) = \cos(\pi) = -1$. Logo, a reta tangente tem equação $y = -x + b$. Como passa pelo ponto $(\pi, 0)$, temos:

$$0 = -\pi + b \implies b = \pi.$$

Assim, a equação da reta é $y = -x + \pi$. Observe o gráfico a seguir:

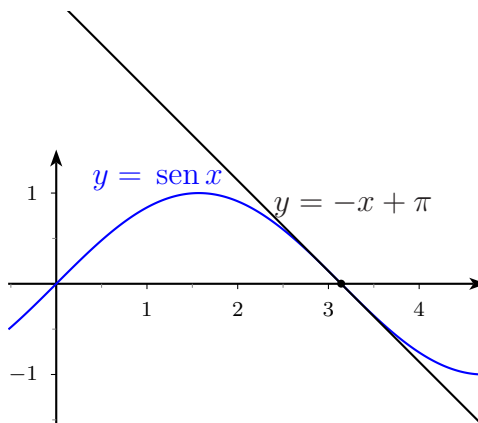


Figura 10.1: Reta $y = -x + \pi$, tangente a $y = \sin x$ no ponto $(\pi, 0)$

Passamos agora à derivada da função cosseno. O desenvolvimento é análogo ao que foi feito para a função seno.

Para a função $f(x) = \cos x$, temos:

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h} \right) \end{aligned}$$

em que usamos a fórmula do cosseno da soma ($\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$) e agrupamos os termos com $\sin x$ e $\cos x$. Passando o limite

quando $h \rightarrow 0$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \cos x \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) - \sin x \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

Portanto,

Se $f(x) = \cos x$ então $f'(x) = -\sin x$.

PROPOSIÇÃO 13
DERIVADA DO COSSENO

Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \cos x$ no ponto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

EXEMPLO 14

A inclinação da reta tangente é $f'(\pi/4) = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$. Logo, a reta tangente tem equação $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + b$. Como a reta passa pelo ponto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ temos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + b \implies b = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right)$$

Assim, a equação da reta é $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right)$.

Encontre a derivada de $y = \tan x$.

EXEMPLO 15

Temos $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Como $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são funções deriváveis, então $\tan(x)$ é derivável nos pontos em que $\cos(x) \neq 0 \implies x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Usando a regra do quociente, obtemos:

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$



10.7 Exercícios

Encontre a derivada das seguintes funções:

1. $\sec x$
2. $\operatorname{cosec} x$
3. $\cotan x$
4. $x \sin x$
5. $x^2 \cos x + x$
6. $\sin 2x$

7. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \sin x$ no ponto $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Esboce o gráfico.
8. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \sin x$ em um ponto $(x_0, \sin x_0)$ arbitrário.
9. Seja $f(x) = \sin x$. Calcule $f^{(50)}(x)$.
10. encontre uma função $F(x)$ cuja derivada é $f(x) = \sin 3x$.
11. Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é derivável em $x = 0$.

12. Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$.



10.8 Regra da cadeia

Estudamos como derivar funções formadas pela soma, produto e quociente de outras funções. Estudaremos agora a derivada da composição de duas funções.

Lembramos que dadas funções f e g , em que a imagem de f está contida no domínio de g , a composta $h = f \circ g$ é definida por:

$$h(x) = f(g(x))(x)$$

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))(x)$$

Por exemplo, $h(x) = \sin x^2$ é a composição da função $g(x) = x^2$ com a função $f(x) = \sin x$

$$x \xrightarrow{g} \overbrace{x^2}^{g(x)} \xrightarrow{f} \overbrace{\sin x^2}^{f(g(x))}$$

Ainda neste exemplo, sabemos perfeitamente derivar tanto $f(x) = \sin x$ quanto $g(x) = x^2$, mas ainda não sabemos derivar sua composição $h(x) = \sin x^2$.

Observe outro exemplo $h(x) = (x^2 + 1)^{100}$, que é a composição de $g(x) = x^2 + 1$ e $f(x) = x^{100}$:

$$x \xrightarrow{g} \overbrace{x^2 + 1}^{g(x)} \xrightarrow{f} \overbrace{(x^2 + 1)^{100}}^{f(g(x))}$$

Embora $(x^2 + 1)^{100}$ seja uma função polinomial, que sabemos derivar, calcular esta potência é muito trabalhoso, enquanto as duas funções envolvidas na composição têm derivadas muito simples.

Vamos agora demonstrar a regra da cadeia.

Sejam f e g funções reais tais que a imagem de g está contida no domínio de f . Se g é derivável em x_0 e f é derivável em $g(x_0)$ então $f \circ g$ é derivável em x_0 e

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) g'(x_0)$$

TEOREMA 16
REGRA DA CADEIA



DEMONSTRAÇÃO

Queremos calcular

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h}.$$

Aqui imporemos uma condição restritiva que simplifica bastante a demonstração. A condição é a seguinte: existe um intervalo não trivial I , com $0 \in I$ tal que $g(x_0 + h) - g(x_0) \neq 0$ para todo $h \in I, h \neq 0$. Neste caso, podemos dividir a expressão acima por $g(x_0 + h) - g(x_0)$ e passar o limite quando $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h},$$

Como g é derivável em x_0 , então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0).$$

Como g é função contínua, então $\lim_{h \rightarrow 0} g(x_0 + h) = g(x_0)$. Se escrevermos

$$u = g(x_0 + h) - g(x_0) \implies g(x_0 + h) = g(x_0) + u,$$

então $u \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$ e

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(g(x_0 + h))}^{g(x_0)+u} - f(g(x_0))}{\underbrace{g(x_0 + h) - g(x_0)}_u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0) + u) - f(g(x_0))}{u} \\ &= f'(g(x_0)). \end{aligned}$$

Substituindo os dois limites calculados concluímos que:

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0). \end{aligned}$$

Caso a condição não se aplique, a demonstração torna-se um pouco mais delicada e não a faremos aqui. Esta condição se verifica em todas as aplicações



que faremos, exceto quando g for uma função constante. Neste caso, porém, o resultado vale trivialmente pois g e $f \circ g$ são constantes, logo têm derivada nula.

Vamos aplicar a regra da cadeia aos dois exemplos com os quais começamos esta discussão:

Calcule a derivada de $h(x) = \sin x^2$.

EXEMPLO 17

Como $h(x) = \sin x^2 = (f \circ g)(x)$, em que $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$, então:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(g(x)) \cdot (2x) = 2x \cos x^2$$

Calcule a derivada da função $h(x) = (x^2 + 1)^{100}$.

EXEMPLO 18

Como $h(x) = (x^2 + 1)^{100} = (f \circ g)(x)$, em que $f(x) = x^{100}$ e $g(x) = x^2 + 1$, então:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 100(g(x))^{99} \cdot (2x) = 200x(x^2 + 1)^{99}$$

Mais alguns exemplos:

Encontre a derivada de $\sqrt{x^2 + 1}$.

EXEMPLO 19

Como $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então a imagem de $g(x) = x^2 + 1$ está contida no domínio de $f(x) = \sqrt{x}$.

$\sqrt{x^2 + 1}$ é a composição de $f(x) = \sqrt{x}$ com $g(x) = x^2 + 1$. Portanto:

$$\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Seja $h(x) = (f(x))^n$ onde n é inteiro qualquer. Então $h(x)$ é a composição de $f(x)$ e $g(x) = x^n$. A derivada de $h(x)$ é:

EXEMPLO 20

$$h(x) = (f(x))^n \implies h'(x) = n f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$$



Alguns casos particulares:

$$h(x) = (x^3 + x)^2 \implies h'(x) = 2(x^3 + x)(x^3 + x)' = 2(x^3 + x)(3x^2 + 1)$$

$$h(x) = \sin^3 x \implies h'(x) = 3 \sin^2 x (\sin x)' = 3 \sin^2 x \cos x$$

$$h(x) = \frac{1}{\tan^2 x} \implies h'(x) = (\tan^{-2} x)' = (-2) \cdot \tan^{-3} x (\tan x)' = -\frac{2 \sec^2 x}{\tan^3 x}$$

EXEMPLO 21

Seja $h(x) = \sin(g(x))$, onde g é função derivável em x . Então $h(x)$ é composição de $f(x) = \sin x$ com $g(x)$. Sua derivada é:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x).$$

Alguns casos particulares:

$$h(x) = \sin(2x^3 + 2x) \implies h'(x) = \cos(2x^3 + 2x) \cdot (2x^3 + 2x)'$$

$$= (6x^2 + 2) \cos(2x^3 + 2x)$$

$$h(x) = \sin(\cos x) \implies h'(x) = \cos(\cos x) \cdot (\cos x)' = -\sin x \cos(\cos x)$$

Algumas vezes é preciso usar a regra da cadeia várias vezes a fim de derivar uma função. Veja o próximo exemplo.

EXEMPLO 22

Encontre a derivada de $h(x) = \sin^2(\cos(x^2 + 1))$.

O primeiro passo é derivar a função potência. Podemos escrever $h(x) = (f(x))^2$, onde $f(x) = \sin(\cos(x^2 + 1))$. Usando a regra da cadeia:

$$h'(x) = (\sin^2(\cos(x^2 + 1)))' = 2 \sin(\cos(x^2 + 1)) (\sin(\cos(x^2 + 1)))'.$$

O próximo passo é derivar a função $g(x) = \sin(\cos(x^2 + 1))$. Para isso vamos derivar a função seno. Observe que podemos escrever $g(x) = \sin y(x)$, onde $y(x) = \cos(x^2 + 1)$. Usando a regra da cadeia:

$$g'(x) = \cos(y(x)) \cdot y'(x) = \cos(\cos(x^2 + 1)) \cdot (\cos(x^2 + 1))'.$$

Substituindo na expressão de $h'(x)$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 \sin(\cos(x^2 + 1)) (\sin(\cos(x^2 + 1)))' \\ &= 2 \sin(\cos(x^2 + 1)) \cos(\cos(x^2 + 1)) \cdot (\cos(x^2 + 1))'. \end{aligned}$$



Ainda falta derivar $z(x) = \cos(x^2 + 1)$. Usando a regra da cadeia mais uma vez:

$$z'(x) = (\cos(x^2 + 1))' = -\operatorname{sen}(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)' = -2x \operatorname{sen}(x^2 + 1).$$

Substituindo na última expressão de $h'(x)$ obtemos finalmente

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 \operatorname{sen}(\cos(x^2 + 1)) \cos(\cos(x^2 + 1)) \cdot (\cos(x^2 + 1))' \\ &= 2 \operatorname{sen}(\cos(x^2 + 1)) \cos(\cos(x^2 + 1)) (-2x \operatorname{sen}(x^2 + 1)) \\ &= -4x \operatorname{sen}(x^2 + 1) \operatorname{sen}(\cos(x^2 + 1)) \cos(\cos(x^2 + 1)). \end{aligned}$$

Tivemos que usar a regra da cadeia três vezes para resolver o problema.

Derivada da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

em $x = 0$.

EXEMPLO 23

Calculando diretamente o limite em $x = 0$ e usando o Teorema do Anulamento, obtemos:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

Logo f é derivável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$. No entanto, para $x \neq 0$, usando a regra do produto e a regra da cadeia, obtemos:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Não existe o limite $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. Portanto, f é derivável em todo ponto, mas sua derivada não é contínua em $x = 0$.

Para concluir a seção, uma palavra sobre notação. Seja $y = f \circ g(x)$. Utilizando a notação de Leibniz e chamando $u = g(x)$, a regra da cadeia $y'(x) = f'(g(x))g'(x)$ assume a seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

que é uma maneira muito elegante e intuitiva de escrever a regra da cadeia. No entanto, as derivadas não podem ser tratadas como frações, apenas como uma notação conveniente.



10.9 Exercícios

Calcule a derivadas das seguintes funções:

1. $f(x) = (x^3 + 2x)^3$

6. $f(x) = \sin(\sqrt{x})$, para $x > 0$

2. $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$

7. $f(x) = \cos(\sin x)$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

8. $f(x) = \sin(\cos x^2)$

4. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

9. $f(x) = \sin^2(\cos(x^2))$

5. $f(x) = \sin^2 x$

10. $f(x) = (x + \sin(x^3 + x))^4$

Calcule a derivada dy/dx em cada um dos seguintes casos:

11. $y = \frac{1}{1+u}$, $u = x^2 + 1$

13. $y = \sin^2 u$, $u = \cos x$

12. $y = \left(u + \frac{1}{u}\right)^3$, $u = x^2 + 1$

14. $y = \sqrt{1 - u^2}$, $u = \sin x$

15. Determine a equação da reta tangente à curva de equação $y = (x - 1)^{-2}$ no ponto de abscissa $x = 2$.

16. Seja $h(x) = f(x^2 + x)$. Sabendo que f é derivável em 2 e que $f'(2) = 3$, calcule $h'(1)$.

17. Determine a reta tangente à curva de equação $h(x) = f(g(x))$ no ponto de abscissa $x = 1$, sabendo que g é derivável em $x = 1$, $g(1) = -3$ e $g'(1) = -1$ e que f é derivável em -3 e $f(-3) = 4$ e $f'(-3) = 1/2$.

18. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em \mathbb{R} . Mostre que:

(a) Se f é par então f' é ímpar;

(b) Se f é ímpar então f' é par;

Observação: uma função f é dita **par** se $f(x) = f(-x)$ para todo x no domínio de f e é dita **ímpar** se $f(x) = -f(-x)$ para todo x no domínio em seu domínio. Por exemplo $f(x) = \sin(x)$ é uma função par enquanto $f(x) = \cos(x)$ é uma função ímpar.

10.10 Textos Complementares

Obter a derivada de $\frac{f}{g}$ usando a derivada do produto

Seria mais simples encontrar a fórmula da derivada de $\frac{f}{g}$ usando a fórmula da derivada do produto, obtida anteriormente.

Seja $h = f/g$, então $f = gh$. Usando a fórmula do produto:

$$f' = (gh)' = g'h + gh' \implies gh' = f' - g'h \implies h' = \frac{f' - g'h}{g}$$

Substituindo $h = f/g$, obtemos:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' - g'(f/g)}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

O problema com esta abordagem é que só podemos garantir que a derivada do produto exista se as funções envolvidas forem deriváveis, isto é, estamos supondo implicitamente que $\frac{f}{g}$ é derivável.

A demonstração que fizemos prova que $\frac{f}{g}$ é derivável nos pontos em que é definida, caso f e g sejam deriváveis.

Para Saber Mais



Para Saber Mais

Demonstração alternativa para a fórmula da derivada da potência

Podemos demonstrar a fórmula da derivada da potência para expoente inteiro positivo usando a fórmula do binômio de Newton, ao invés de indução.

Seja $f(x) = x^n$ com n inteiro positivo. Para calcular o limite

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

vamos usar a fórmula do binômio de Newton para expandir $(x+h)^n$:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \dots + \binom{n}{i}x^{n-i}h^i + \dots + nxh^{n-1} + h^n$$

logo,

$$(x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + \dots + nxh^{n-1} + h^n$$

$$(x+h)^n - x^n = h \left(nx^{n-1} + \dots + \binom{n}{i}x^{n-i}h^{i-1} + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right)$$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \dots + \binom{n}{i}x^{n-i}h^{i-1} + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

Observe que todos os termos da expressão acima, tirando o primeiro, contêm o fator h . Quando fizermos $h \rightarrow 0$ todos os termos desaparecerão, exceto o primeiro, obtendo

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$



11

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA E TAXAS RELACIONADAS

Sumário

11.1	Derivação implícita	2
11.2	Exercícios	5
11.3	Problemas de taxa de variação	6
11.4	Exercícios	13
11.5	Aproximação linear	15
11.6	Exercícios	17
11.7	Textos Complementares	18

11.1 Derivação implícita

Nas Unidades 9 e 10 aprendemos a derivar funções da forma $y = f(x)$. Nesse caso, dizemos que a função está definida *explicitamente*. No entanto, pode-se não definir explicitamente uma função, mas fornecer uma propriedade que permita encontrar sua derivada, admitindo que a derivada exista. Por exemplo, considere a

$$x^2 + y^2 = 4$$

Como sabemos, trata-se da equação de um círculo de centro na origem e raio 2. Podemos resolver explicitamente por:

$$y^2 = 4 - x^2 \implies y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Há, portanto, duas possibilidades de funções, as duas com domínio $x \in (-2, 2)$:

$$y = f_1(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

A derivada em cada caso é:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{f_1(x)} \\ f_2'(x) &= -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{-f_2(x)} = -\frac{x}{f_2(x)} \end{aligned}$$

Logo, nos dois casos,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Por outro lado, admitindo a existência de uma função $y = f(x)$ derivável que satisfaça a relação $x^2 + y^2 = 4$, podemos derivar diretamente a relação:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

Encontramos o mesmo resultado que antes, mas sem a necessidade de explicitar a definição da função. Observe o uso da regra da cadeia, quando fazemos

$$\frac{dy^2}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}.$$



Em resumo, admitindo a existência de uma função derivável $y = f(x)$ e dada uma equação em x e y , é possível encontrar $f'(x)$ derivando a equação, mesmo sem explicitar a definição de $y = f(x)$.

Observe que dada uma equação entre x e y pode ser muito difícil ou mesmo impossível encontrar a definição explícita $y = f(x)$. Pode também acontecer de mais de uma função satisfazer a equação, como no caso acima. No entanto, admitindo a existência de função derivável $y = f(x)$, a relação pode permitir o cálculo da derivada $f'(x)$. Esta técnica é conhecida como *derivação implícita*.

Seja $y = f(x)$ função derivável satisfazendo a equação $y^3 - xy = 1$. Encontre $\frac{dy}{dx}$.

Derivando $y^3 - xy = 1$ obtemos:

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - (1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx}) = 0$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - y - x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (3y^2 - x) = y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3y^2 - x}$$

Portanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3y^2 - x}$ é a derivada de $f(x)$ para os pontos onde $3y^2 - x \neq 0$.

EXEMPLO 1

Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de

$$y^3 - 3x^2y + x^3 = 11$$

no ponto $(2, 3)$.

Observe que o ponto $(2, 3)$ satisfaz à equação: $3^3 - 3(2^2)3 + 2^3 = 27 - 24 + 8 = 11$.

Admitindo a existência de uma função $y = f(x)$ derivável que satisfaça a

EXEMPLO 2



equação, podemos obter sua derivada por derivação implícita.

$$\begin{aligned}y^3 - 3x^2y + x^3 &= 11 \\3y^2 \frac{dy}{dx} - 3 \left(2xy + x^2 \frac{dy}{dx} \right) + 3x^2 &= 0 \\3y^2 \frac{dy}{dx} - 6xy - 3x^2 \frac{dy}{dx} + 3x^2 &= 0 \\\frac{dy}{dx} (3y^2 - 3x^2) &= 6xy - 3x^2 \\\frac{dy}{dx} &= \frac{6xy - 3x^2}{3y^2 - 3x^2} = \frac{2xy - x^2}{y^2 - x^2}\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - x^2}{y^2 - x^2}$ é a derivada de $f(x)$ para os pontos onde $y^2 - x^2 \neq 0 \implies y \neq \pm x$.

Para o ponto $(2, 3)$, obtemos:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 - 2^2}{3^2 - 2^2} = \frac{8}{5}$$

Portanto, a reta tangente em $x = 2$ tem coeficiente angular $\frac{8}{5}$. A equação da reta é $y = \frac{8}{5}x + b$ e passa por $(2, 3)$, logo $3 = \frac{8}{5} \cdot 2 + b \implies b = -\frac{1}{5}$. A reta tangente tem equação

$$y = \frac{8}{5}x - \frac{1}{5}$$

EXEMPLO 3

Encontre a equação da reta tangente à hipérbole $xy = 1$ passando pelo ponto (u, v) , em que (u, v) , $u \neq 0$ é um ponto qualquer da hipérbole.

$$xy = 1 \implies y + x \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{v}{u}.$$

O coeficiente angular da tangente é $-v/u$. Logo, a reta tem equação $y = -\frac{v}{u}x + b$ e passa pelo ponto (u, v) .

Resulta que $v = -\frac{v}{u}u + b \implies b = 2v$. Assim, a reta tangente tem equação

$$y = -\frac{v}{u}x + 2v.$$

 Para Saber Mais - Teorema da função implícita - Clique para ler



11.2 Exercícios

Encontre a derivada $\frac{dy}{dx}$ para a função derivável $y = f(x)$ que satisfaz cada uma das seguintes equações:

1. $xy + y^2 = 1$

2. $y^3 + xy^2 + y = 3$

3. $x^2 - y^2 = 1$

4. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

5. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Seja $y = f(x)$ uma função derivável que satisfaz cada uma das equações abaixo. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P indicado.

7. $x^2 + xy + y^2 = 7$, $P = (1, 2)$

8. $x^3 + 2xy + y^2 = 4$, $P = (1, 1)$

9. $\sin(xy) = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $P = (1, \frac{\pi}{4})$

10. Encontre a equação da reta tangente à elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ passando pelo ponto $(1, 2)$.



11.3 Problemas de taxa de variação

Vimos na Unidade 9 que a velocidade (instantânea) de um objeto é definida por

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

em que $s = s(t)$ é a função posição do objeto. A velocidade mede a taxa de variação (instantânea) da posição do objeto com o tempo.

De maneira geral,

DEFINIÇÃO 4 TAXA DE VARIAÇÃO

Se x e y são duas grandezas sujeitas a uma relação funcional $y = y(x)$, então a *taxa de variação* de y em relação a x é a derivada $\frac{dy}{dx}$.

Outro exemplo de taxa de variação é a aceleração, definida por

$$a = a(t) = \frac{dv}{dt}.$$

Em algumas aplicações do cálculo, temos duas ou mais grandezas relacionadas entre si e devemos calcular a taxa de variação das grandezas. Como as grandezas estão relacionadas, usando derivação implícita ou, algumas vezes, regra da cadeia, podemos calcular a taxa de variação de uma delas em função da(s) outra(s). Tais problemas são conhecidos como *problemas de taxas relacionadas*.

Vejamos alguns exemplos de problemas de taxas relacionadas.

EXEMPLO 5

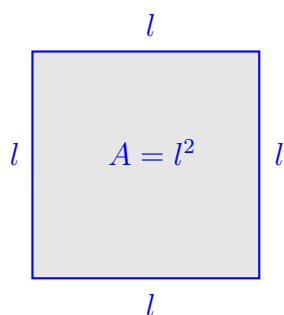
Um quadrado se expande de tal maneira que seu lado aumenta à razão de 5 m/s. Calcule a taxa de variação da área no instante em que o lado do quadrado mede 10 m.

Seja $l = l(t)$ o lado do quadrado. Note que o lado varia com o tempo, sendo $\frac{dl}{dt} = 5$ m/s sua taxa de variação.

A área é dada por $A(l) = l^2$. Vamos obter a taxa de variação de A usando a regra da cadeia:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dl} \frac{dl}{dt} = 2l \cdot 5 = 10l$$



Figura 11.1: Quadrado de lado l

Portanto, no instante em que $l = 10$, temos

$$\frac{dA}{dt} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Logo, a taxa de variação da área é $100 \text{ m}^2/\text{s}$.

Uma escada de 5 m está recostada em uma parede. A base da escada escorrega, afastando-se da parede a uma velocidade de 6 cm/s. Com que velocidade o topo da escada cai no momento em que a base da escada dista 3 m da parede?

EXEMPLO 6

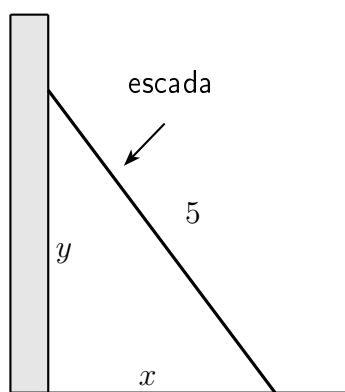


Figura 11.2:

As grandezas x e y estão relacionadas pelo teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = 25$.

Considerando $x = x(t)$ e $y = y(t)$ e derivando em relação ao tempo, temos:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 25 \\2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} &= 0 \\y \frac{dy}{dt} &= -x \frac{dx}{dt}\end{aligned}\tag{11.1}$$

Basta, agora, substituir os valores para obter $\frac{dy}{dt}$. Temos $\frac{dx}{dt} = 6$ cm/s e $x = 3$ m = 300 cm. Como $x^2 + y^2 = 25$, então $9 + y^2 = 25 \implies y = 4$ m = 400 cm. Resulta em

$$400 \frac{dy}{dt} = -300 \frac{dx}{dt} = -300 \cdot 6 = -1800 \implies \frac{dy}{dt} = -4,5 \text{ cm/s}$$

O resultado negativo indica que y diminui, ou seja, a escada cai. Observe que tivemos que converter os comprimentos dados em metros para centímetros pois a taxa de variação de x estava dada em cm/s.

Portanto, a velocidade de queda do topo da escada quando $x = 3$ m é 4,5 cm/s.

Voltemos agora à equação 11.1. Podemos escrever a equação como

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$$

Se a escada cai de forma que $\frac{dx}{dy} = 6$ cm/s é constante, temos que x cresce até no máximo $x = 5$ m, que é o comprimento da escada. No entanto, y diminui até chegar a zero quando a escada está na horizontal. A fórmula 11.1 mostra que $\frac{dy}{dt} \rightarrow \infty$ quando $y \rightarrow 0$, o que revela apenas que é fisicamente impossível que uma escada caia de forma que $\frac{dx}{dt}$ seja constante até o final da queda.

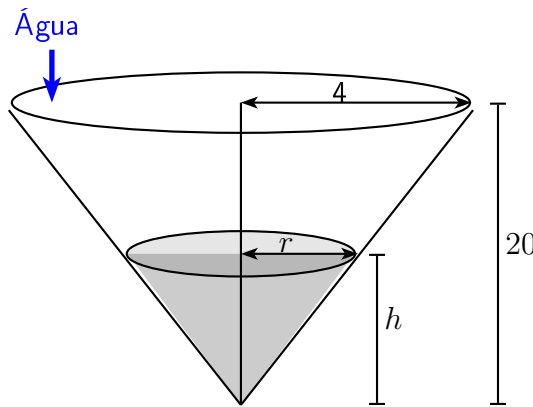
EXEMPLO 7

Um tanque tem a forma de um cone invertido, tendo altura de 20 m e raio de 4 m. A água está fluindo para dentro do tanque a uma taxa de $2 \text{ m}^3/\text{min}$. Quão rápido se eleva o nível de água no tanque quando a água estiver com 5 m de profundidade?

Conforme a água enche o tanque, a parte cheia forma um cone de raio r e altura h . Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{r}{4} = \frac{h}{20} \implies r = \frac{h}{5}$$





O volume de água na parte cheia é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, substituindo $r = \frac{h}{5}$, obtemos:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{5}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{75}$$

Derivando esta última expressão em relação à variável t , obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{75} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{25} \frac{dh}{dt} \implies \frac{dh}{dt} = \frac{25}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}$$

Observe que $\frac{dV}{dt}$ é a taxa de aumento do volume, ou seja, é o fluxo de água que entra, que é $2 \text{ m}^3/\text{min}$. Portanto, quando $h = 5$, temos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{25}{25\pi} 2 = \frac{2}{\pi} \text{ m/min} \approx 0,64 \text{ m/min}.$$

Um cilindro é comprimido lateralmente e, ao mesmo tempo, alongado, de forma que o raio da base decresce a uma taxa de 4 cm/s e a altura do cilindro aumenta a uma taxa de 5 cm/s . Encontre a taxa de variação do volume do cilindro quando o raio da base mede 6 cm e a altura 8 cm .

EXEMPLO 8

O volume do cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$, em que $r = r(t)$ é o raio da base e $h = h(t)$ é a altura do cilindro. Derivando esta fórmula, obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left(2r \frac{dr}{dt} h + r^2 \frac{dh}{dt} \right) = 2\pi r h \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

Substituindo agora os valores $r = 6$, $h = 8$, $\frac{dr}{dt} = -4$ e $\frac{dh}{dt} = 5$, obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi \cdot 6 \cdot 8 \cdot (-4) + \pi \cdot 6^2 \cdot 5 = \pi(-384 + 180) = -204\pi$$

Portanto, o volume do cilindro diminui a uma taxa de $204\pi \text{ cm}^3/\text{min} \approx 640,56 \text{ cm}^3/\text{min}$.

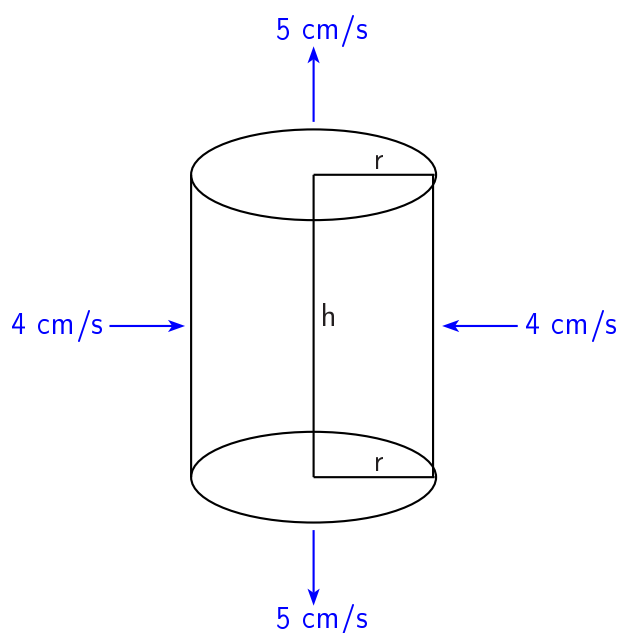


Figura 11.3: Cilindro sendo alongado e comprimido lateralmente

EXEMPLO 9

Um objeto se move no eixo x das abscissas de modo que sua posição x metros no instante t segundos é dada por $x(t) = 1 + t + t^3$. Encontre sua velocidade e aceleração em função do tempo.

A velocidade é dada $v = \frac{dx}{dt}$, logo

$$v = \frac{d}{dt}(1 + t + t^3) = 1 + 3t^2 \text{ m/s}.$$

A aceleração é dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(1 + 3t^2) = 6t \text{ m/s}^2.$$

EXEMPLO 10

Um objeto se move no eixo x das abscissas de modo que sua posição x em metros no instante t segundos é dada por

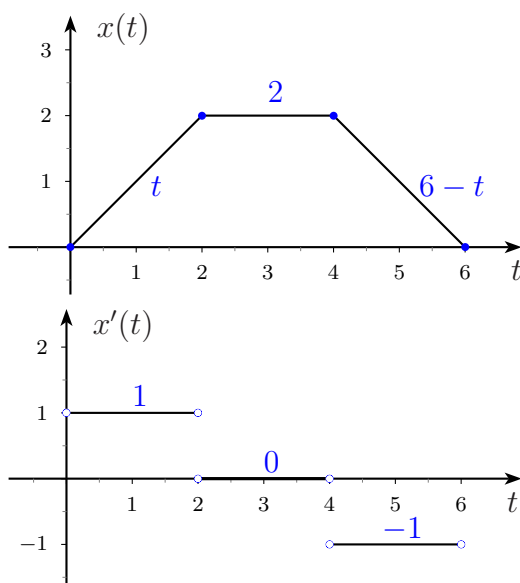
$$x(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ 2 & \text{se } 2 \leq t < 4 \\ 6 - t & \text{se } 4 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

Determine a velocidade do objeto. Faça um gráfico.

A função $x = x(t)$ é derivável em todo o intervalo $(0, 6)$, exceto nos pontos $t = 2$ e $t = 4$, já que nestes pontos as tangentes à curva à direita e à esquerda não coincidem. Excluindo estes pontos, temos as derivadas:

$$x'(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{se } 2 < t < 4 \\ -1 & \text{se } 4 < t < 6 \end{cases}$$

Portanto, o objeto saiu de $x = 0$ em $t = 0$, se deslocou com velocidade constante igual a 1 até chegar em $x = 2$ em $t = 2$; ficou parado entre $t = 2$ e $t = 4$ e, a partir de $t = 4$, voltou para a origem com velocidade constante igual a -1 . Compare os gráficos de $x(t)$ e $x'(t)$ a seguir:



Dois carros se deslocam em estradas perpendiculares, um para o norte com velocidade média de 48 km/h e o outro para o leste, com velocidade média de 60 km/h. O segundo carro passou pelo cruzamento das estradas 2 horas depois do primeiro. Determine a taxa de variação da distância entre os carros 3 horas após o segundo carro passar pelo cruzamento.

EXEMPLO 11

Sejam y a distância do carro A , que vai para o norte, ao ponto de cruzamento O e x a distância do carro B , que vai para leste, ao ponto de cruzamento O . Seja l a distância entre os carros, como representado na Figura 11.4.



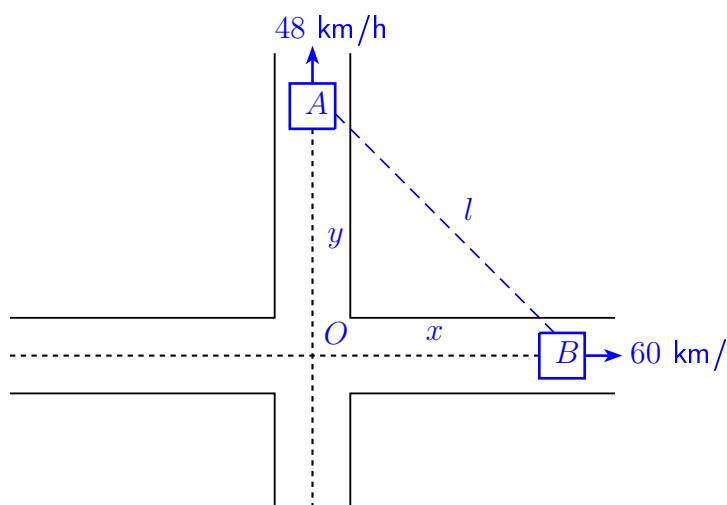


Figura 11.4: Qual a taxa de variação da distância entre os carros?

Três horas após o segundo carro passar pelo cruzamento, o primeiro terá se deslocado 5 horas após passar por O . A distância de A até O é, portanto:

$$y = v_A \cdot \Delta t = 48 \cdot 5 = 240 \text{ km.}$$

Neste mesmo instante, o carro b terá se deslocado por 3 horas após passar pelo cruzamento, logo a distância de B até O é

$$x = v_B \cdot \Delta t = 60 \cdot 3 = 180 \text{ km.}$$

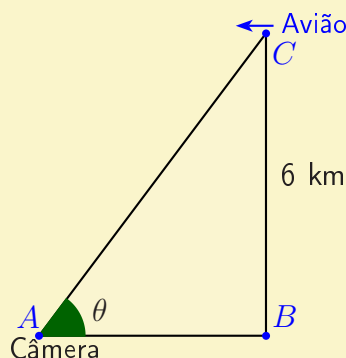
Pelo Teorema de Pitágoras, $l^2 = x^2 + y^2$, em que l é a distância entre os carros. No momento em que $x = 180$ e $y = 240$, o valor de l é $l^2 = 180^2 + 240^2 = 90000 \Rightarrow l = 300$.

Derivando a expressão $l^2 = x^2 + y^2$ e substituindo os valores de $l, x, y, \frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$, obtemos

$$\begin{aligned} l^2 &= x^2 + y^2 \\ 2l \frac{dl}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{1}{l} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \\ \frac{dl}{dt} &= 74 \text{ km/h.} \end{aligned}$$

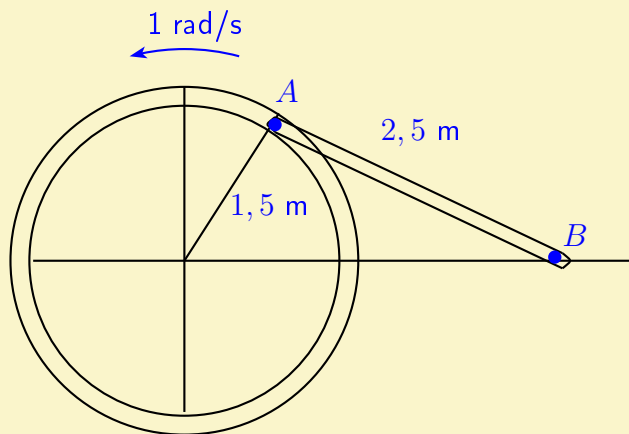
11.4 Exercícios

1. Um círculo possui raio inicial de 1 m e começa a crescer de tal forma que sua área aumenta a uma taxa de $10 \text{ cm}^2/\text{min}$. Encontre a taxa de variação do raio do círculo quando seu raio mede 5 cm.
2. Um balão esférico perde ar por um furo de tal forma que seu raio diminui a uma taxa de $2 \text{ cm}/\text{min}$. Qual a taxa de diminuição do volume, quando o raio do balão é $r = 50 \text{ cm}$?
3. Uma escada de 5 metros de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Sabendo-se que o pé da escada se afasta da parede a uma velocidade de $10 \text{ cm}/\text{s}$, qual a velocidade com que cai verticalmente o topo da escada?
4. Um avião voa a $800 \text{ km}/\text{h}$ em relação ao solo, mantendo uma altura constante de 6 km. Uma câmera montada no solo aponta para o avião. Seja θ o ângulo de elevação da câmera em relação ao solo. No instante em que $\theta = \frac{\pi}{6}$, qual a velocidade com que a câmera deve rodar para que continue apontando para o avião, sabendo-se que este se aproxima da câmera.



5. Um tanque com a forma de um cone invertido tem altura igual a 5 e raio do topo igual 2 m. Se o tanque se enche a uma taxa de $1 \text{ m}^3/\text{s}$, determine a taxa de aumento no nível de água quando está com profundidade de 2 m.

6. Um homem de 2 m de altura se move em direção a um poste de luz a uma velocidade de 5 m/s. Do alto deste poste, uma lâmpada ilumina o homem e projeta uma sombra. Quando a distância entre o homem e o poste é de 4 m:
- (a) Com que velocidade a ponta da sombra se move?
 - (b) Qual a taxa de variação do comprimento da sombra?
7. Um peixe mordeu a isca e começa a ser puxado pelo pescador. Este diminui a linha a uma taxa de 30 cm/min, mas o peixe permanece na superfície da água. Se o pescador mantém a ponta da vara de pesca a uma altura de 2 m e o peixe está a uma distância de 4 m do barco, com que velocidade se aproxima do barco? Qual a taxa de variação do ângulo que a linha faz com a superfície da água?
8. Um mecanismo é composto de uma roda de 1,5 m de raio, que gira no sentido anti-horário a uma taxa constante de 1 radiano por segundo. Uma barra metálica de 2,5 m tem uma extremidade A presa à roda. A outra extremidade está presa a uma haste horizontal de forma que pode deslizar livremente ao longo desta haste. Qual a velocidade da extremidade que desliza da barra, quando o ponto A está em sua altura máxima?



11.5 Aproximação linear

Nesta seção veremos uma aplicação da derivada que consiste em estimar o valor de uma função $f(x)$ próximo a uma ponto x_0 usando a reta tangente ao gráfico de f passando por x_0 ,

Se a função f é derivável em x_0 então a reta tangente ao gráfico de f passando por $(x_0, f(x_0))$ é a reta

$$y = L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

A *aproximação linear* consiste em estimar o valor de $f(x)$, para x próximo de x_0 usando o valor $y = L(x)$. Observe a Figura 11.5.

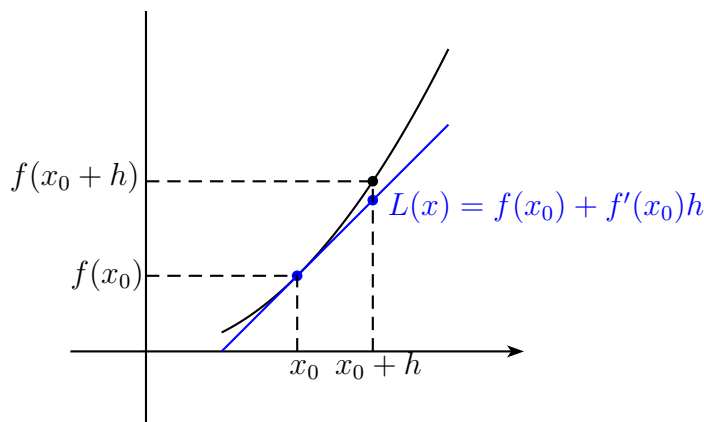


Figura 11.5: Aproximação linear de f

Como a função f é derivável em x_0 então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) .$$

Se

$$R = R(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

então

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (f'(x_0) + R(h)) h = f'(x_0)h + R(h)h \quad (11.2)$$

e como f é derivável em x_0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} R(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Desprezando o termo $R(h)h$ na equação 11.2, obtemos

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h$$

ou, escrevendo $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ e $\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

Em resumo, para calcular por aproximação linear o valor de $f(x_0 + \Delta x)$, usamos a aproximação $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. Quanto menor Δx , melhor será a aproximação.

EXEMPLO 12

Calcule o valor aproximado de $\sqrt{102}$.

Se $f(x) = \sqrt{x}$ então sabemos que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tomando $x_0 = 100$ e $\Delta x = 2$, temos

$$\begin{aligned} f(100 + \Delta x) &\approx f(100) + f'(100)\Delta x \\ \sqrt{102} &\approx \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}} \cdot 2 = 10,1 \end{aligned}$$

O valor correto até a 4ª casa decimal é 10,0995, o que mostra que a aproximação está correta até a 3ª casa decimal.

EXEMPLO 13

Use aproximação linear para estimar o valor de $\sqrt[3]{65}$.

Como $\sqrt[3]{64} = 4$, faremos a aproximação linear em torno de $x_0 = 4$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \implies f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Assim,

$$f(65) \approx f(64) + f'(64) \cdot 1 = \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3}64^{-2/3} = 4 + \frac{1}{48} = 4,021$$

EXEMPLO 14

Se $y = x^3 + x + 1$, use a aproximação linear para determinar a variação de y quando x passa de 3 para 3,05.

Temos $\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$. Usando a derivada $f'(x) = 3x^2 + 1$ e fazendo $x_0 = 3$ e $\Delta x = 0,05$, obtemos:

$$\Delta f \approx (3 \cdot 3^2 + 1) \cdot 0,05 = 1,4$$



11.6 Exercícios

1. O raio de um círculo foi estimado em $R = 20$ cm, com precisão de $\pm 0,1$ cm. Determine a margem de erro no cálculo da área do círculo.
2. Mostre que para h suficiente pequeno vale a aproximação

$$\sqrt{x^2 + h} \approx x + \frac{h}{2x}.$$

3. Usando aproximação linear, encontre uma fórmula que aproxima $\sqrt[3]{x^3 + h}$.
4. Estime o valor do seno de 31°
5. Mostre que aplicando uma fina camada de tinta de espessura h à superfície de uma esfera de superfície S , o volume da esfera aumenta de aproximadamente $S \cdot h$.



11.7 Textos Complementares

Para Saber Mais

Teorema da função implícita

Nos exemplos anteriores, apresentamos uma relação entre x e y e dissemos que a relação *define implicitamente* a função $y = f(x)$. Na verdade, esta afirmação não é trivial. podemos ver esta relação entre x e y como uma função $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em que $F(x, y) = c$, c constante. Para garantir que esta relação define y como função de x , precisamos garantir certas condições para a função F .

O *Teorema da função implícita* estabelece condições suficientes para garantir a existência de função derivável $y = f(x)$ tal que $F(x, f(x)) = c$. Como o teorema envolve derivadas parciais, não é apresentado em uma primeira disciplina de Cálculo.

No contexto das funções reais de uma variável que estamos estudando o teorema pode se enunciado da seguinte maneira:

TEOREMA 15
TEOREMA DA FUNÇÃO
IMPLÍCITA

Seja $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real derivável com derivada contínua. Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um ponto de seu domínio. Suponha que F satisfaça as duas condições a seguir:

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= z_0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

Então existem intervalos abertos U e V , com $x_0 \in U$ e $y_0 \in V$ e existe uma única função $f: U \rightarrow V$ tal que

$$F(x, f(x)) = z_0, \text{ para todo } x \in U.$$

Além disso, esta função f é derivável com derivada contínua e

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

O símbolo $\frac{\partial F}{\partial y}$, chamado derivada parcial de F em relação a y , é a derivada da expressão na variável y , ou seja, ao derivarmos a função de duas variáveis

$F(x, y)$, consideramos apenas a variável y e tratamos x como constante.

No exemplo 1, temos $F(x, y) = y^3 - xy$, então

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - x.$$

A condição $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ fornece: $\frac{\partial(y^3 - xy)}{\partial y} = 3y^2 - x \neq 0$. Esta mesma condição apareceu naturalmente na expressão de $\frac{dy}{dx}$. Além disso, pelo Teorema:

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{-y}{3y^2 - x} = \frac{y}{3y^2 - x}$$

que foi o valor encontrado no exemplo.

No exemplo 2, $F(x, y) = y^3 - 3x^2y + x^3$. A condição $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ fornece:

$$\frac{\partial(y^3 - 3x^2y + x^3)}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 \neq 0 \implies y^2 - x^2 \neq 0 \implies y \neq \pm x$$

condição esta que apareceu naturalmente na expressão de $\frac{dy}{dx}$ encontrada. Além disso,

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{-6xy + 3x^2}{3y^2 - 3x^2} = \frac{2xy - x^2}{y^2 - x^2}$$

que foi o valor encontrado no exemplo.



12

A DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA

Sumário

12.1	Derivada da função inversa	2
12.2	Funções trigonométricas inversas	10
12.3	Exercícios	17
12.4	Textos Complementares	18

12.1 Derivada da função inversa

Nesta unidade estudaremos a derivabilidade da função inversa de uma função derivável f . Vamos considerar funções $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em um intervalo não trivial I . Se nos restringirmos às funções contínuas, o Teorema 2 da Unidade 8 garante que a imagem de um intervalo é um intervalo, logo $f(I)$ também será um intervalo, que pode ser trivial se f for constante.

Na verdade, toda a discussão que se segue pode ser feita considerando funções definidas em uma união D de intervalos não triviais. A imagem $f(D)$ também será uma união de intervalos.

Começemos recordando a definição de função invertível.

DEFINIÇÃO 1

Dada uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dizemos que f é invertível se existe uma função $g: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- (i) $g(f(x)) = x$ para $x \in I$.
- (ii) $f(g(y)) = y$ para todo $y \in f(I)$.

Uma função invertível f tem uma única inversa g , pois, se g e h atendem às condições (i) e (ii) da definição então, dado $y \in f(I)$, seja $x = g(y)$, então $f(x) = f(g(y)) = y$, pela condição (ii). Logo $g(y) = g(f(x)) = x$ e $h(y) = h(f(x)) = x$, condição (i). Portanto, $g(y) = h(y)$ para todo $y \in f(I)$, ou seja, $h = g$, provando assim a unicidade da inversa de uma função.

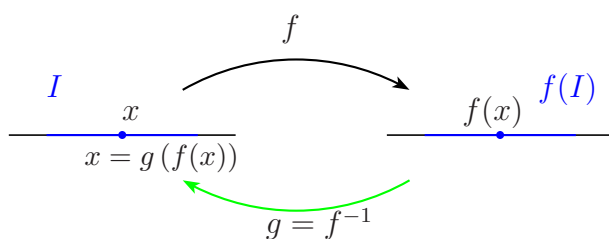
A função inversa de f é denotada f^{-1} . Toda função invertível $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é *injetora*, pois, se $x_1, x_2 \in I$ então

$$f(x_1) = f(x_2) \implies f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \implies x_1 = x_2$$

Portanto, uma função invertível $f: I \rightarrow f(I)$ é *bijetora*, pois é injetora e, restringindo a imagem a $f(I)$ é evidentemente sobrejetora.

Observe a figura a seguir.





Nem todas as funções contínuas são invertíveis. Além disso, algumas vezes uma função será invertível depois de restringirmos seu domínio. Vamos a alguns exemplos.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

Para buscar a inversa da função, escrevemos $y = f(x)$ e tentamos encontrar x como função de y . Mas,

$$y = x^2 \implies x = \pm\sqrt{y}.$$

Ou seja, para cada valor y há dois valores $x_1 = \sqrt{y}$ e $x_2 = -\sqrt{y}$ tais que $y = f(x_1) = f(x_2)$. A função não é invertível. Observe o gráfico 12.1.

No entanto, restringindo o domínio para $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ temos uma função invertível. A inversa é a função $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ dada por $g(y) = \sqrt{y}$, pois

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x \\ f(g(y)) &= f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2

Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

Buscando uma inversa para a função f , temos

$$y = x^3 \implies x = \sqrt[3]{y}$$

Portanto, a função f é invertível e sua inversa é a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(y) = \sqrt[3]{y}$.

EXEMPLO 3



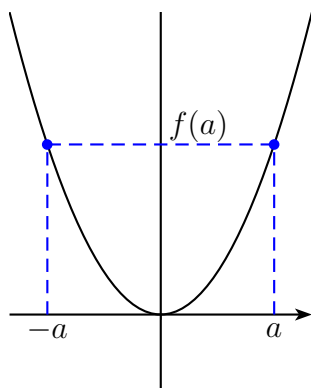


Figura 12.1: $f(x) = x^2$ definida em \mathbb{R} *não é* invertível

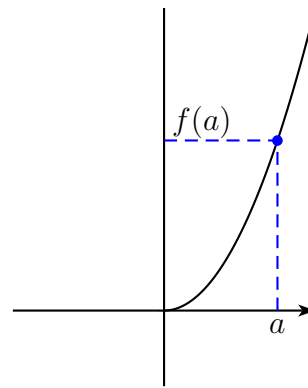


Figura 12.2: $f(x) = x^2$ definida em $(0, \infty)$ *é* invertível.

EXEMPLO 4

A função $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$.

Fazendo $y = \frac{1}{x}$ e resolvendo x em função de y , temos

$$y = \frac{1}{x} \implies xy = 1 \implies x = \frac{1}{y}.$$

Assim, f é invertível e sua inversa é a função $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ dada por $g(y) = \frac{1}{y}$.

Portanto, f é sua própria inversa.

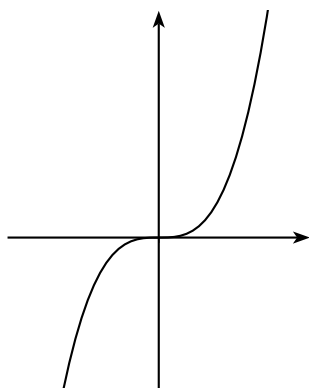


Figura 12.3: $f(x) = x^3$

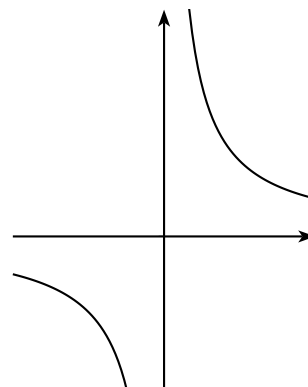


Figura 12.4: $f(x) = \frac{1}{x}$ é sua própria inversa

Como observamos antes, se $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é função contínua definida em um intervalo não trivial I então $f(I)$ também será um intervalo não trivial se f não

for constante.

Vamos agora atacar a seguinte questão: como garantir que uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ seja invertível? Em outras palavras, que condições são suficientes para garantir a invertibilidade de f ?

Observe novamente os gráficos nas figuras 12.1 e 12.2. Na primeira, a função não é invertível porque não é injetora: existem $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Por outro lado, no gráfico da direita, como a função é crescente, se $x_1 < x_2$ (respectivamente, $x_2 < x_1$) então $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente, $f(x_2) < f(x_1)$), o que garante injetividade.

O argumento acima mostra que, de maneira geral, toda função crescente $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora. Um argumento análogo mostra que o mesmo vale para funções $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ decrescentes.

O próximo teorema mostra que a condição de que a função contínua $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ seja crescente ou decrescente é suficiente para garantir que tenha inversa. Mostra também que, neste caso, sua inversa é uma função contínua.

Sejam I um intervalo não trivial e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua crescente (respectivamente, decrescente). Então:

- (i) f possui inversa $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$.
- (ii) f^{-1} é crescente (respectivamente, decrescente) em $f(I)$.
- (iii) f^{-1} é contínua em $f(I)$.

TEOREMA 5

A demonstração do Teorema se encontra no link a seguir.

 [Para Saber Mais - Demonstração do Teorema 5 - Clique para ler](#)

A função contínua $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ é decrescente em todo seu domínio, como você pode verificar no seu gráfico na Figura 12.5.

Pelo Teorema 5, a função f é invertível, sua inversa é contínua e decrescente.

EXEMPLO 6

Para obter a inversa de f , isolamos x em função de y na equação $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x-1} \\ xy - y &= 2x+1 \\ xy - 2x &= y+1 \\ x &= \frac{y+1}{y-2} \end{aligned}$$

Portanto, $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$, definida em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. A Figura 12.5 mostra o gráfico de f^{-1} (em verde).

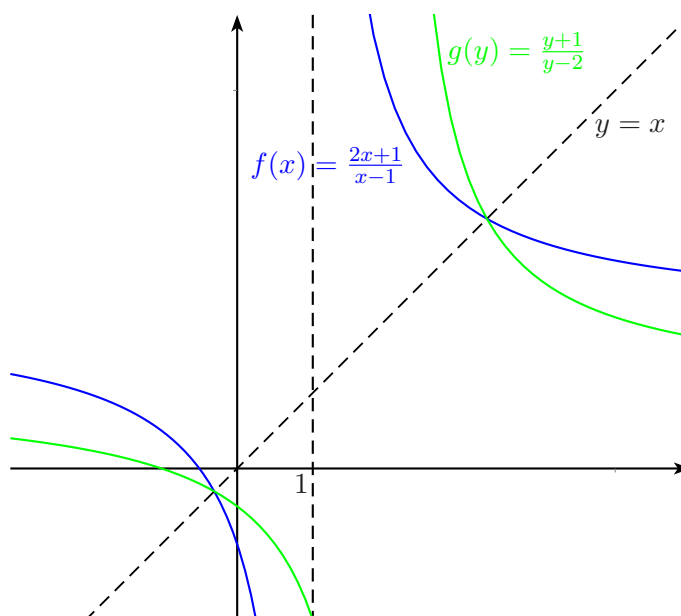


Figura 12.5: Gráfico de $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ e de sua inversa $g(y) = \frac{y+1}{y-2}$

Observe que no exemplo anterior a função não estava definida em um intervalo I , mas sim na união de dois intervalos: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Não é difícil mostrar que o Teorema 5 vale para funções definidas sobre uniões de intervalos.

Iremos agora estudar a questão da derivabilidade da função inversa de uma função derivável f . O próximo teorema estabelece condições suficientes para garantir a derivabilidade da função inversa de uma função derivável f .

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável e crescente ou decrescente em um intervalo não trivial I . Se $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ então f^{-1} é derivável em $f(I)$ e

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

TEOREMA 7
TEOREMA DA FUNÇÃO
INVERSA

A demonstração do teorema encontra-se no link a seguir.

 Para Saber Mais - Demonstração do Teorema 7 - Clique para ler

Vamos retomar a função $y = \frac{2x+1}{x-1}$ do exemplo 6. A derivada de f é:

$$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)' = \frac{2 \cdot (x-1) - (2x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

Vimos que a função inversa é a função $g(y) = \frac{y+1}{y-2}$, definida em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, cuja derivada é:

$$g'(y) = \left(\frac{y+1}{y-2} \right)' = \frac{1 \cdot (y-2) - (y+1) \cdot 1}{(y-2)^2} = \frac{-3}{(y-2)^2}.$$

Substituindo $y = \frac{2x+1}{x-1}$, obtemos:

$$g'(y) = \frac{-3}{\left(\frac{2x+1}{x-1} - 2 \right)^2} = \frac{-3}{\left(\frac{2x+1-2(x-1)}{x-1} \right)^2} = \frac{-3}{\left(\frac{-3}{x-1} \right)^2} = \frac{-3}{\frac{9}{(x-1)^2}} = \frac{-3}{9} \cdot (x-1)^2 = \frac{-1}{3} (x-1)^2.$$

o que verifica a relação entre $(f^{-1})'(y)$ e $f'(x)$ do teorema.

EXEMPLO 8

No exemplo anterior havíamos obtido a expressão de f^{-1} . No entanto, a grande vantagem do Teorema 7 é que, além de prova a derivabilidade de f^{-1} , permite calcular esta derivada sem necessariamente conhecer f^{-1} .

Sabemos que $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Vamos chegar a esta mesma fórmula usando a derivada da função inversa.

A função $g(y) = \sqrt{y}$ definida para $y > 0$ é a inversa de $f(x) = x^2$, pois $g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$, para $x > 0$. Considerando que $f(x) = x^2$ é

EXEMPLO 9

crescente no intervalo $(0, \infty)$ e usando o teorema da função inversa, temos

$$(\sqrt{y})' = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Vamos agora usar o teorema da função inversa para provar algo novo: a derivada da função potência x^n para expoentes fracionários.

EXEMPLO 10

Seja n inteiro positivo, $n \geq 2$. A função $g(x) = \sqrt[n]{x}$ está definida em $(0, \infty)$ para n par e em \mathbb{R} para n ímpar.

A função g é a inversa de $f(x) = x^n$, definida em $(0, \infty)$ para n par e em \mathbb{R} para n ímpar, e crescente no seu domínio. Logo, para x no domínio de f e $x \neq 0$,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} y^{1-\frac{1}{n}}.$$

Portanto, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ então $g'(x) = \frac{1}{n} x^{1-\frac{1}{n}}$.

EXEMPLO 11

Seja $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, em que n é um número racional. Vamos provar que f é derivável e $f'(x) = nx^{n-1}$.

Seja $n = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos. Usando o resultado do exemplo anterior e a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)' = p \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{q}}\right)' \\ &= p \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} - 1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} \end{aligned}$$

Exercícios

Para cada função a seguir, determine um domínio para a função f no qual f seja invertível e tal que este domínio não possa ser estendido.

1. $f(x) = x^2 + 2$

2. $f(x) = x^3$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$

4. $f(x) = \sqrt{x}$

5. $f(x) = \sqrt[5]{x}$

6. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Para cada uma das funções abaixo, determine se satisfazem as condições do teorema da função inversa e, caso satisfaçam, aplique o teorema para determinar a derivada da inversa no ponto x_0 dado.

7. $f(x) = \sqrt{x-1}$, definida em $I = (1, \infty)$, $x_0 = 2$.

8. $f(x) = \frac{1}{x-1}$, definida em $I = (1, \infty)$, $x_0 = 2$.

Assumindo que as hipóteses do teorema da função inversa se verificam, calcule o valor de $(f^{-1})'(y)$ dado o seguinte:

9. $y = 2$, $f(1) = 2$ e $f'(1) = 3$.

10. $y = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ e $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



12.2 Funções trigonométricas inversas

Nesta seção iremos estudar a derivabilidade das funções trigonométricas inversas: \arcsen , \arccos e \arctan .

Como as funções seno, cosseno e tangente são funções periódicas, para cada valor y na imagem, há infinitos pontos no domínio que têm imagem y . Portanto, para cada uma destas funções teremos que restringir o domínio de forma a obter uma função injetora.

Iniciando pela função seno, sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$. Podemos restringir o domínio ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. A função $\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ é uma função bijetora, contínua, e crescente no seu domínio.

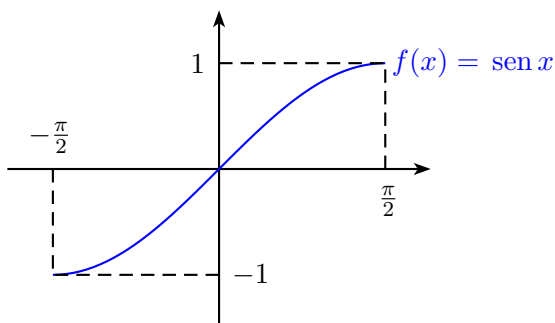


Figura 12.6: Gráfico de $\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$

A função $\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ possui inversa, chamada função arco seno $\arcsen : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, definida por

$$y = \arcsen x \iff x = \text{sen } y.$$

Pelo Teorema 5, a função \arcsen é crescente e contínua no intervalo $[-1, 1]$. Seu gráfico pode ser observado na figura 12.7.

Usaremos agora o teorema da função inversa para estabelecer a derivabilidade da função arco seno.

PROPOSIÇÃO 12 DERIVADA DO ARCO SENO

A função arco seno é derivável em $(-1, 1)$ e sua derivada é

$$(\arcsen)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



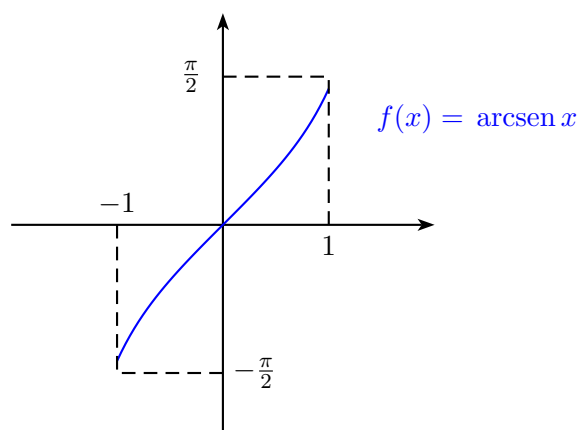


Figura 12.7: Gráfico de $\arcsen : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Seja $f(x) = \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$. Podemos observar na Figura 12.6 que $f(x) = \sin x$ é crescente no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

DEMONSTRAÇÃO

Pelo Teorema da função inversa, f^{-1} é derivável em $(-1, 1)$ e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Como $y = \sin x$ e $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, segue que

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \implies \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}.$$

Portanto,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Sendo $f^{-1}(x) = \arcsen x$, segue o resultado.

Encontre a derivada da função $f(x) = \arcsen(x^2 - 1)$ para $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

EXEMPLO 13

Teremos que usar a derivada do arco seno e a regra da cadeia. Seja $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = \arcsen x$. Temos que $g(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (-1, 1)$ está contido no domínio de h . Como g e h são deriváveis em seus domínios, então $f = h \circ g$ é derivável em $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e vale que:

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} \cdot (2x) = \frac{2x}{\sqrt{2x - x^4}}.$$

Passemos agora para a *função arco cosseno*.

A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$. Se restringirmos o domínio da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$, obtemos a função bijetora $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ que é contínua e decrescente em todo seu domínio.

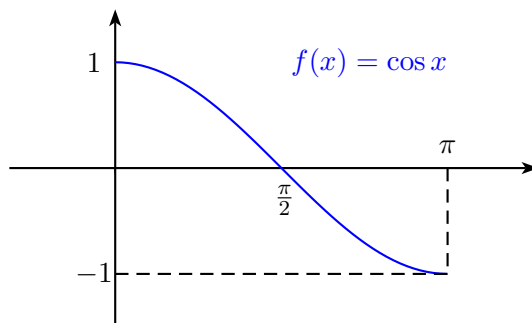


Figura 12.8: Gráfico de $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

A função $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ possui inversa, chamada função arco cosseno $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, definida por

$$y = \arccos x \iff x = \cos y .$$

Pelo Teorema 5, a função \arccos é decrescente e contínua no intervalo $[-1, 1]$. Seu gráfico pode ser observado na figura 12.9.

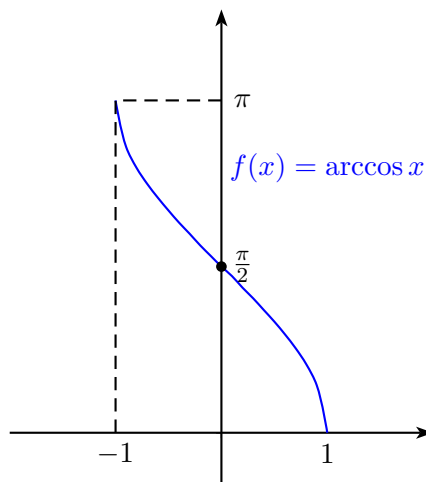


Figura 12.9: Gráfico de $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

Usaremos agora o teorema da função inversa para estabelecer a derivabilidade da função arco cosseno.

A função arco cosseno é derivável em $(-1, 1)$ e sua derivada é

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

PROPOSIÇÃO 14

DERIVADA DO ARCO

COSSENO

Seja $f(x) = \cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. Como podemos observar no gráfico da figura 12.8, f é decrescente em $(0, \pi)$. Logo, pelo Teorema da função inversa, f^{-1} é derivável em $(-1, 1)$ e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{\sin x}.$$

Como $y = \cos x$ e $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, segue que

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \implies \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - y^2}.$$

Portanto,

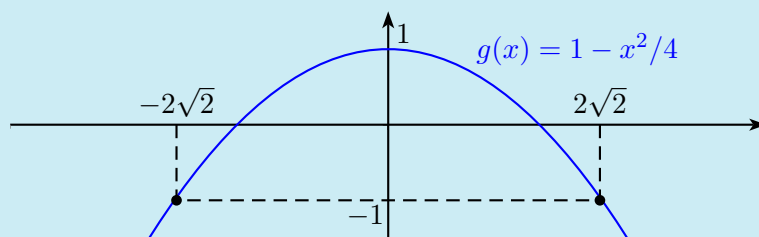
$$(f^{-1})'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Sendo $f^{-1}(x) = \arccos x$, segue o resultado.

DEMONSTRAÇÃO

Estude a derivabilidade da função $f(x) = \arccos\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$.

Para começar, devemos determinar o domínio de f . Como o domínio do arccos é $[-1, 1]$ então a imagem da função $1 - \frac{x^2}{4}$ deve estar contido em $[-1, 1]$. Mas o gráfico de $g(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ é uma parábola com concavidade para baixo e vértice no ponto $(0, 1)$. Como $1 - \frac{x^2}{4} = -1 \implies x = \pm 2\sqrt{2}$, então $x \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \implies g(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \in [-1, 1]$. Veja o gráfico da figura a seguir.



EXEMPLO 15



Considerando a função $f(x) = \arccos\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$ com domínio em $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$, então $f = h \circ g$ para $h(x) = \arccos(x)$ e $g(x) = 1 - x^2/4$. Segue, pela regra da cadeia, que f é derivável em $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ e

$$\begin{aligned} f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2\sqrt{1-\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^2}} \\ &= \frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}}} = \frac{x}{2\frac{|x|}{4}\sqrt{8-x^2}} = \frac{2x}{|x|\sqrt{8-x^2}}. \end{aligned}$$

Estudaremos a seguir a função *arco tangente*.

A função tangente é periódica de período π e definida no conjunto $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}, k \text{ ímpar}\right\}$. Sua imagem é todo o conjunto \mathbb{R} . Se restringirmos o domínio da função tangente ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, obtemos a função bijetora $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ que é contínua e crescente em todo seu domínio.

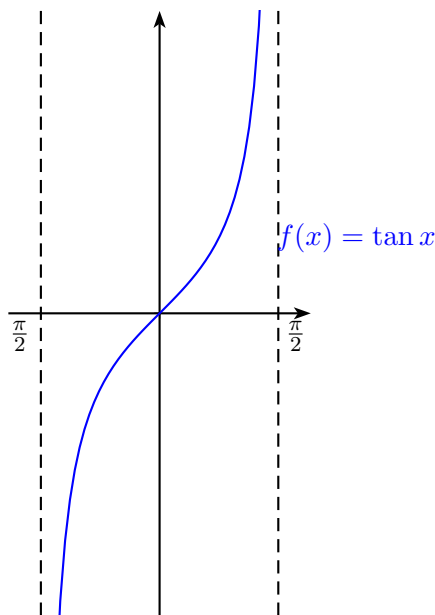


Figura 12.10: Gráfico de $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$

A função $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ possui inversa, chamada função arco tangente $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, definida por

$$y = \arctan x \iff x = \tan y.$$

Pelo Teorema 5, a função \arctan é crescente e contínua em \mathbb{R} . Seu gráfico pode ser observado na figura 12.11.

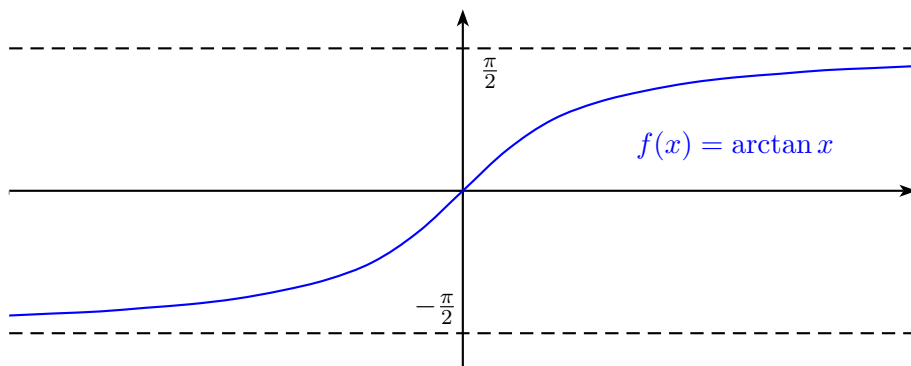


Figura 12.11: Gráfico de $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Usaremos agora o teorema da função inversa para estabelecer a derivabilidade da função arco tangente.

A função arco tangente $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ é derivável em \mathbb{R} e sua derivada é

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

PROPOSIÇÃO 16
DERIVADA DO ARCO
TANGENTE

Seja $f(x) = \tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$. Como podemos observar no gráfico da figura 12.10, f é crescente no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Logo, pelo Teorema da função inversa, f^{-1} é derivável em \mathbb{R} e

DEMONSTRAÇÃO

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x.$$

Como $y = \tan x$ e $1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, segue que

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Portanto,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Sendo $f^{-1}(x) = \arctan x$, segue o resultado.

EXEMPLO 17

Encontre a derivada de $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Como o domínio de $h(x) = \arctan x$ é \mathbb{R} , não temos que nos preocupar com a imagem de $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Então, para $x \neq 1$, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x)) g'(x) = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \right) \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + (x+1)^2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{2}{2x^2 + 2} = -\frac{1}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Como a função inversa de uma função f é representada por f^{-1} , alguns autores utilizam a notação $\sin^{-1}x$ para a função $\arcsen x$, $\cos^{-1}x$ para $\arccos x$ e $\tan^{-1}x$ $\arctan x$. É importante ficar atento porque assim a notação fica confusa. Repare: $\sin^2 x = (\sin x)^2$, mas $\sin^{-1}x$ é a inversa de $\sin x$ e não $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$.

As escolhas que fizemos para os domínios de $\arcsen x$, $\arccos x$ e $\arctan x$ são as escolhas usuais, mas não são únicas. Por exemplo, para a função $\arcsen x$ qualquer intervalo I tal que $\sin : I \rightarrow [-1, 1]$ é bijetora seria uma escolha tão legítima quanto a escolha $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Assim, o intervalo $I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ seria tão bom quanto.

Encerramos aqui esta unidade. O estudo da derivabilidade das funções arco secante, arco cossecante e arco cotangente será deixado como exercício.



12.3 Exercícios

Escolha domínios apropriados e defina as funções:

1. Arco secante $y = \operatorname{arcsec} x$.
2. Arco cossecante $y = \operatorname{arccosec} x$.
3. Arco cotangente $y = \operatorname{arccotan} x$.

Prove as seguintes relações:

4. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsen x$
5. $\operatorname{arccosec} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$
6. $\operatorname{arccosec} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x$
7. $\arcsen(-x) = -\arcsen x$
8. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
9. $\arctan(-x) = -\arctan x$
10. $\arccos(1/x) = \operatorname{arcsec} x$
11. $\arcsen(1/x) = \operatorname{arccosec} x$
12. $\arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \operatorname{arccotan} x$, se $x > 0$

Usando o Teorema da função inversa, mostre que:

13. $(\operatorname{arccotan} x)'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
14. $(\operatorname{arcsec} x)'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
15. $(\operatorname{arccosec} x)'(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Para cada uma das funções abaixo, determine seu domínio, os pontos onde é derivável e sua derivada.

16. $f(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$
17. $f(x) = \arccos(x^2 - 1)$
18. $f(x) = \arccos(\sen x)$
19. $f(x) = \arcsen \sqrt{x^2 - x + 2}$
20. $f(x) = \frac{\arccos\left(\frac{x}{2}\right)}{x-1}$



12.4 Textos Complementares

Para Saber Mais

DEMONSTRAÇÃO

Demonstração do Teorema 5

Demonstraremos os três itens do Teorema para uma função f crescente. A prova para uma função decrescente é inteiramente análoga.

Começemos provando (i). Como a função $f: I \rightarrow f(I)$ é crescente, então é injetora e, como o contradomínio é a imagem $f(I)$, é bijetora. Toda função bijetora é invertível, logo f tem inversa f^{-1} .

Para provar (ii), sejam $y_1, y_2 \in f(I)$ com $y_1 < y_2$. Sejam $x_1, x_2 \in I$ tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Então $y_1 < y_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$. Se $x_1 \geq x_2$ então, como f é crescente, $f(x_1) \geq f(x_2)$, contrariando $f(x_1) < f(x_2)$. Logo $x_1 < x_2$. Mas $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$, logo

$$y_1 < y_2 \implies f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2),$$

o que mostra que f^{-1} é uma função crescente.

Observe que até aqui não usamos a continuidade de f .

Agora a prova de (iii). Seja $y \in f(I)$ e seja uma sequência $(y_n) \subset f(I)$ tal que $y_n \rightarrow y$. Para provar a continuidade de f^{-1} basta mostrar que $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y)$.

Dado $\epsilon > 0$, sejam $r, s \in I$ tais que

$$f^{-1}(y) - \epsilon < r < f^{-1}(y) < s < f^{-1}(y) + \epsilon.$$

Se $f^{-1}(y)$ for um extremo de I , não haverá r ou s . Estes casos devem ser analisados separadamente, mas a análise é análoga a que é feita aqui.

Como f é crescente,

$$f(r) < f(f^{-1}(y)) = y < f(s).$$

Como $y_n \rightarrow y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale $f(r) < y_n < f(s)$. Usando o fato de que se f é crescente então f^{-1} é crescente (provado no item anterior), temos

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(r)) < f^{-1}(y_n) < f^{-1}(f(s)) &\implies r < f^{-1}(y_n) < s \\ \implies f^{-1}(y) - \epsilon < r < f^{-1}(y_n) < s < f^{-1}(y) + \epsilon. \end{aligned}$$



Portanto,

$$|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| < \epsilon$$

o que conclui a demonstração.



Para Saber Mais

DEMONSTRAÇÃO

Demonstração do Teorema 7

Seja $x \in I$ e seja $y = f(x) \in f(I)$. Seja $w \neq 0$ tal que $y + w \in f(I)$. Então $f^{-1}(y + w) \in I$. Seja $h = f^{-1}(y + w) - x$, logo $f^{-1}(y + w) = x + h$ e $y + w = f(x + h)$. Então

$$\frac{f^{-1}(y + w) - f^{-1}(y)}{w} = \frac{(x + h) - x}{w} = \frac{h}{w} = \frac{h}{f(x + h) - y} = \frac{1}{\frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

Como f é crescente ou decrescente e contínua por ser derivável, pelo Teorema 5, f^{-1} é contínua, logo

$$\lim_{w \rightarrow 0} h = \lim_{w \rightarrow 0} ((x + h) - x) = \lim_{w \rightarrow 0} f^{-1}(y + w) - f^{-1}(y) = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{h \rightarrow 0} w = \lim_{h \rightarrow 0} ((y + w) - y) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x + h) - f(x)) = 0.$$

Assim, $h \rightarrow 0$ se, e somente se, $w \rightarrow 0$.

Aplicando a propriedade do quociente para limites, obtemos:

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y + w) - f^{-1}(y)}{w} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x + h) - f(x)}{h}} = \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)},$$

o que mostra que f' é derivável em $y = f(x)$ e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$



13

TEOREMA DO VALOR MÉDIO E APLICAÇÕES

Sumário

13.1	Máximos e mínimos	2
13.2	O Teorema do Valor Médio	12
13.3	O Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio .	14
13.4	Textos Complementares	24

Uma parte importante das aplicações do Cálculo Diferencial está relacionada ao problema de encontrar máximos e mínimos de funções. São os chamados *problemas de otimização* e que consistem, de maneira geral, em construir um modelo matemático do problema no qual alguma grandeza é dada por uma função derivável de uma ou mais variáveis e a informação que buscamos consiste em encontrar o máximo ou mínimo da função.

Máximos e mínimos de uma função são, respectivamente, os maiores e menores valores que a função assume em seu domínio, são os chamados *valores extremos* da função. Estes são extremos absolutos. No entanto, são também importantes os valores extremos em uma vizinhança de um ponto. São os chamados extremos locais.

Na próxima seção, estudaremos máximos e mínimos (locais e absolutos) e veremos como identificá-los usando derivadas. Basicamente, pontos de máximo e mínimo locais possuem derivada nula. Na seção seguinte, usaremos este fato para provar um dos teoremas mais importantes do Cálculo: o Teorema do Valor Médio. Este, por sua vez, será a chave para estudar o comportamento global de uma função usando suas derivadas, o que será feito na próxima unidade.

13.1 Máximos e mínimos

O valor máximo (mínimo) de uma função em todo seu domínio é chamado máximo (respectivamente, mínimo) absoluto. Iremos formalizar esta definição e, em seguida, veremos as noções de máximo e mínimo relativos.

DEFINIÇÃO 1

Um função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tem *máximo absoluto* em c se $f(x) \leq f(c)$ para todo x no domínio D de f . Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado *valor máximo* de f em D .

DEFINIÇÃO 2

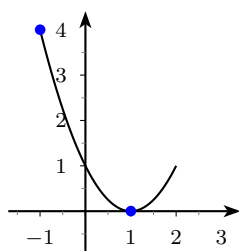
Um função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tem *mínimo absoluto* em c se $f(x) \geq f(c)$ para todo x no domínio D de f . Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado *valor mínimo* de f em D .

Os valores de máximo e mínimo absoluto de uma função são chamados *valores extremos* da função.

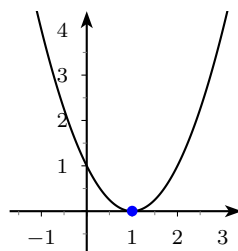


EXEMPLO 3

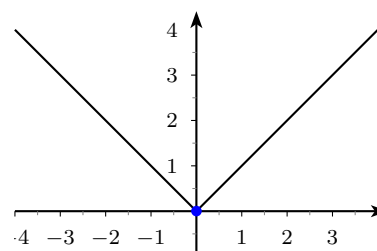
- A função $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x - 1)^2$ possui máximo absoluto em $x = -1$ e mínimo absoluto em $x = 1$. (figura 13.1a).
- A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x - 1)^2$ possui mínimo absoluto em $x = 1$ e não possui máximo absoluto. (figura 13.1b).
- A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ possui mínimo absoluto em $x = 0$ e não possui máximo absoluto. (figura 13.1c).



(a)



(b)



(c)

Figura 13.1

Observe agora a figura a seguir:

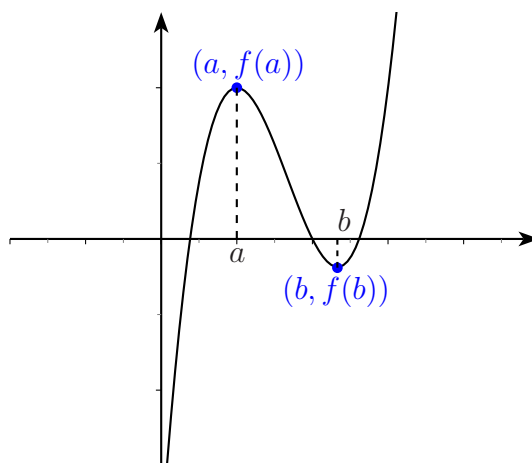


Figura 13.2

Claramente, o gráfico na figura 13.2 não possui máximo ou mínimo absoluto. No entanto, $f(a)$ é maior que todos os valores $f(x)$ para x próximo de a , ou

seja, $f(a)$ é um valor máximo em um certo intervalo aberto contendo a . Nesta situação, dizemos que $f(a)$ é valor máximo local de f .

Da mesma forma, $f(b)$ é menor que todos os valores $f(x)$ para x próximo de b . Dizemos que $f(b)$ é valor mínimo local de f .

DEFINIÇÃO 4

Uma função tem *máximo local* (ou *máximo relativo*) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I , tal que $c \in I$ e $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor máximo local de f .

DEFINIÇÃO 5

Uma função tem *mínimo local* (ou *mínimo relativo*) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I , tal que $c \in I$ e $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor mínimo local de f .

Pontos de máximo local e pontos de mínimo local são chamados *extremos locais* (ou *extremos relativos*).

EXEMPLO 6

- A função $f(x) = x^2$ tem mínimo local e absoluto em $x = 0$.
- A função cujo gráfico está mostrado na figura 13.2 tem máximo local $x = a$ e mínimo local em $x = b$. Não possui extremos absolutos.
- A função $f(x) = x^3$ não possui nem ponto de máximo nem ponto de mínimo absolutos. Também não possui extremos locais. Ver figura 13.3a.
- A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ possui mínimo local e absoluto em $x = 0$. A função não possui máximos locais ou absolutos. Ver figura 13.3b.

Os exemplos até aqui mostram que uma função pode ou não ter máximos e mínimos absolutos e relativos. A questão chave passa então a ser a seguinte: *como determinar quando uma função tem valores extremos e como identificá-los*.

Nós já conhecemos uma parte da resposta: na Unidade 8, estudamos o Teorema de Weierstrass para valores extremos que garante que uma função



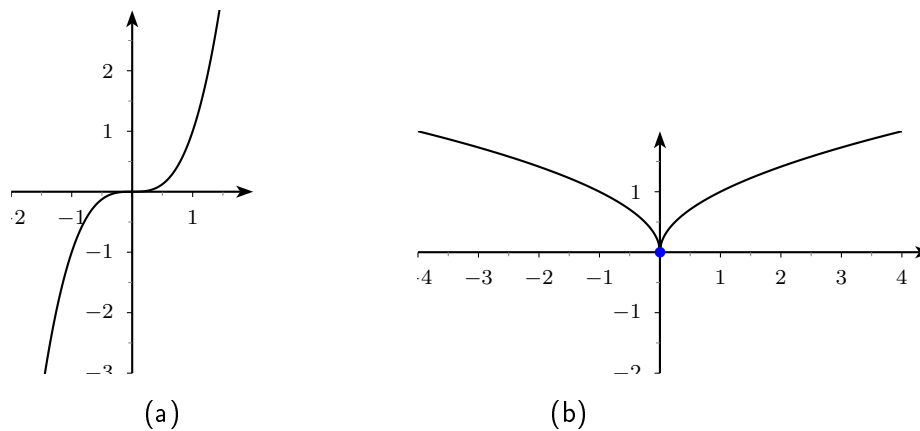


Figura 13.3

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, definida em um intervalo fechado possui um máximo e um mínimo absoluto em $[a, b]$.

Os valores extremos podem corresponder a pontos do interior do intervalo ou serem os extremos $f(a)$ ou $f(b)$. Veja os exemplos a seguir:

Exemplos de extremos de funções definidas em intervalos fechados.

EXEMPLO 7

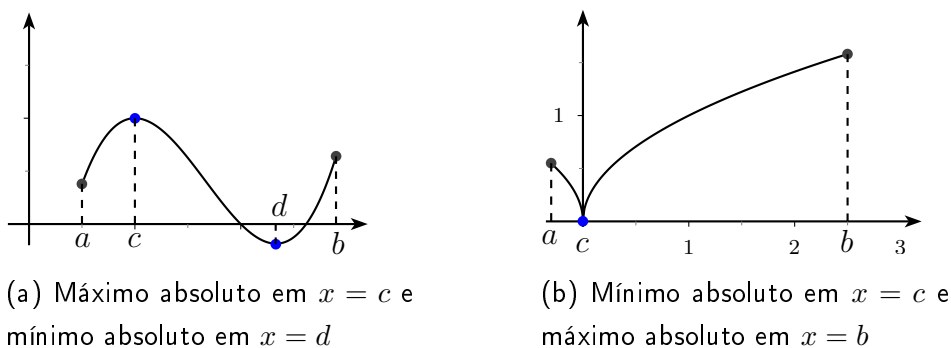


Figura 13.4

Lembramos que, como visto na Unidade 8, as condições da função ser contínua e do intervalo ser fechado, no Teorema de Weierstrass, são necessárias. Relaxando qualquer uma das duas condições, pode não haver valores máximo ou mínimo absoluto no gráfico da função.

O próximo passo é descobrir como encontrar os máximos e mínimos relativos e absolutos de uma função. Veremos que para funções deriváveis, os extremos

locais são pontos de derivada nula, embora nem todo ponto de derivada nula seja extremo local. Portanto, encontrando os pontos onde a derivada se anula, teremos os candidatos a extremos locais. Outros critérios serão mostrados para determinar, dentre estes candidatos, quais são de fato mínimos e máximos locais.

Observe a figura 13.5, onde mostramos um máximo local (figura 13.5a) e um mínimo local (figura 13.5b) em $x = c$ de uma função f . Suponha que f seja derivável em um intervalo aberto I e $c \in I$.

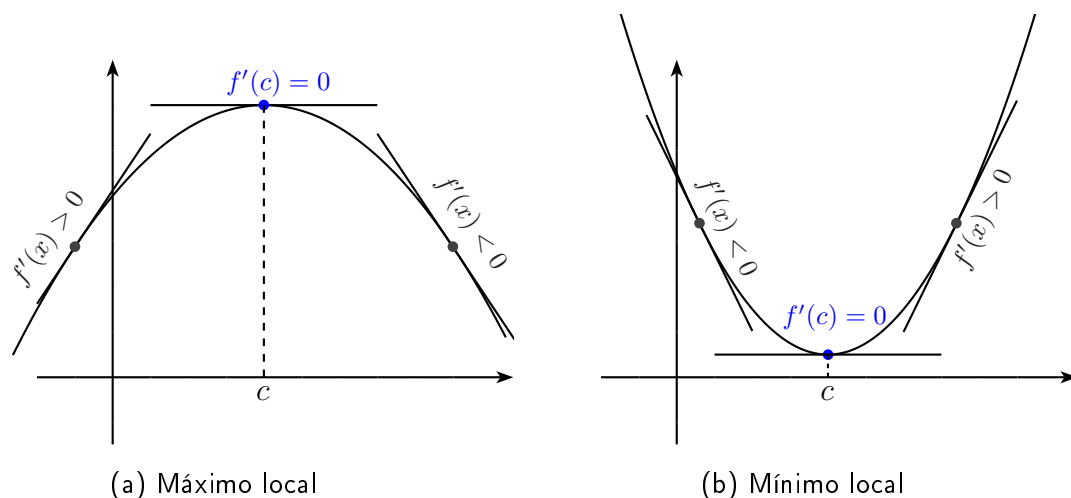


Figura 13.5

No caso de um máximo local, a função passa de crescente (pela figura, $f'(x)$ positivo) antes de $x = c$ para função decrescente (pela figura, $f'(x)$ negativo) depois de $x = c$, passando por $f'(x) = 0$ no ponto $x = c$.

No caso de um mínimo local, a função passa de decrescente ($f'(x)$ negativo) antes de $x = c$ para função crescente ($f'(x)$ positivo) depois de $x = c$, passando por $f'(x) = 0$ no ponto $x = c$.

O raciocínio anterior nos leva a crer que a função f tem derivada nula nos pontos de máximo e de mínimo locais. O próximo teorema mostra que isso é verdade sempre que f seja derivável no extremo local.

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função f contínua definida em um intervalo aberto I . Se f tem máximo ou mínimo local em $x = c$, $c \in I$ e f é derivável em c então $f'(c) = 0$.

TEOREMA 8

Suponha que f tenha um máximo local em $x = c$. A prova do caso em que f tem mínimo local em c é totalmente análoga.

DEMONSTRAÇÃO

Como f é derivável em c , então

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

Como $f(c)$ é máximo local, há um intervalo (a, b) no domínio de f tal que $c \in (a, b)$ e $f(x) \leq f(c)$. Portanto, $f(x) - f(c) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Se $x < c$ então $x - c < 0$ e, portanto $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ para $x \in (a, b)$, logo

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \quad (13.1)$$

Por outro lado, $x > c$ então $x - c > 0$ e, portanto, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ para $x \in (a, b)$, logo

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \quad (13.2)$$

Comparando as desigualdades 13.1 e 13.2 e levando em conta que são o mesmo número, resulta

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = 0.$$

A recíproca do teorema *não é verdadeira*. Seja, por exemplo, a função $f(x) = x^3$. Como $f'(x) = 3x^2$ então $f'(0) = 0$. No entanto, f não possui máximo ou mínimo local em $x = 0$. Na verdade, a função não possui extremo local. Veja figura 13.3a.

Também é verdade que uma função pode possuir máximo ou mínimo local sem que seja derivável neste ponto. Já vimos um exemplo: a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



dada por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ possui mínimo local em $x = 0$, mas não é derivável neste ponto (figura 13.3b).

Este último fato motiva a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 9

Um ponto c no domínio de uma função f é chamado *ponto crítico* se ocorre um dos dois seguintes casos:

- (a) f não é derivável em $x = c$.
- (b) f é derivável em c e $f'(c) = 0$.

O teorema 8 nos diz que qualquer máximo ou mínimo local c deve ser ponto crítico, pois se f não for derivável em c então é ponto crítico (item (a) da definição acima) e se f for derivável em c então $f'(c) = 0$ pelo teorema e c é ponto crítico de f (item (b) da definição acima). Resulta que podemos reescrever o Teorema 8 como *Se $x = c$ é máximo ou mínimo local de f então c é ponto crítico de f .*

Portanto, a busca pelos máximos e mínimos locais de f deve se dar pelos pontos onde f não é derivável e pelos pontos onde é derivável e sua derivada é nula.

Para encontrar o máximo e mínimo absoluto da função definida em um intervalo, devemos ainda considerar seus valores no ponto inicial e final do intervalo, caso estejam no domínio da função. O seguinte método resume o procedimento para uma função definida em um intervalo fechado.

Para determinar o máximo e mínimo absoluto de uma função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deve-se proceder da seguinte maneira:

1. Determine os pontos críticos de f no intervalo aberto (a, b) .
2. Determine $f(a)$ e $f(b)$.
3. Compare os valores assumidos por f nos pontos críticos com $f(a)$ e $f(b)$. O maior dentre eles será o máximo absoluto de f em $[a, b]$ e o menor entre eles será o mínimo absoluto de f em $[a, b]$.

Encontre os valores de máximo e mínimo da função $f: [-4, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 2.$$

A função é derivável no intervalo aberto $(-4, 2)$. A derivada da função é $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$. Os únicos pontos críticos de f são os valores em que

$$f'(x) = 0 \implies 3x^2 + 4x - 4 = 0 \implies x = -2 \text{ ou } x = \frac{2}{3}.$$

Os valores de f nos pontos críticos são $f(-2) = 6$ e $f(\frac{2}{3}) = -\frac{94}{27}$.

Os valores de f nos pontos inicial e final do intervalo são $f(-4) = -18$ e $f(2) = 6$.

Comparando estes números, concluímos que o mínimo absoluto da função no intervalo é $f(-4) = -18$ e o máximo absoluto da função é $f(-2) = f(2) = 6$. Veja a figura 13.6.

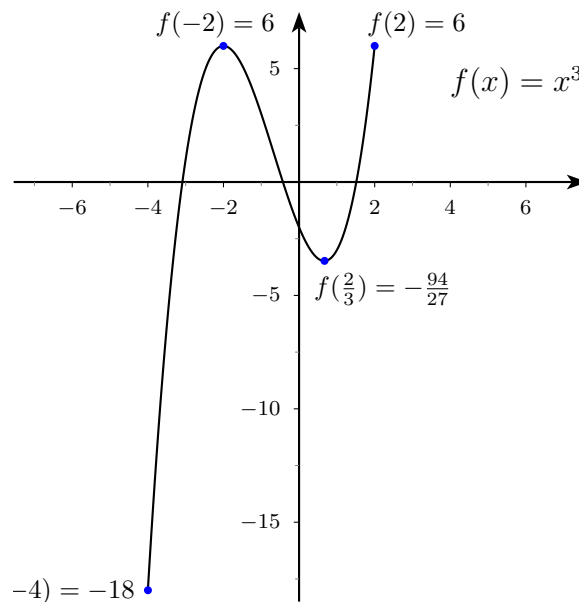


Figura 13.6

Encontre os valores de máximo e mínimo da função $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

EXEMPLO 10

EXEMPLO 11



A função é derivável para todo $x \in (-4, 4)$, exceto em $x = 0$. Para ver que não é derivável em $x = 0$, observe que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h-0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{h}}{h} = \infty .$$

O limite acima basta para mostrar que f não é derivável em $x = 0$, mas fazendo o limite à esquerda de 0 também obtemos ∞ , o que mostra que a tangente em x tende a uma reta vertical quando $x \rightarrow 0$, tanto pela esquerda quanto pela direita.

Derivando f em $(-4, 0) \cup (0, 4)$, obtemos:

$$x \in (0, 4) \implies f(x) = 1 - \sqrt{x} \implies f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

$$x \in (-4, 0) \implies f(x) = 1 - \sqrt{-x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} .$$

Nos dois casos $f'(x)$ não se anula, portanto o único ponto crítico de f é $x = 0$.

Calculando o valor da função no ponto crítico $x = 0$ e nos extremos do intervalo $[-4, 4]$, obtemos:

$$f(0) = 1 , \quad f(4) = -1 \quad \text{e} \quad f(-4) = -1 .$$

Comparando estes números resulta que o valor máximo da função é $f(0) = 1$ e o valor mínimo é $f(4) = f(-4) = -1$. Observe a figura 13.7.

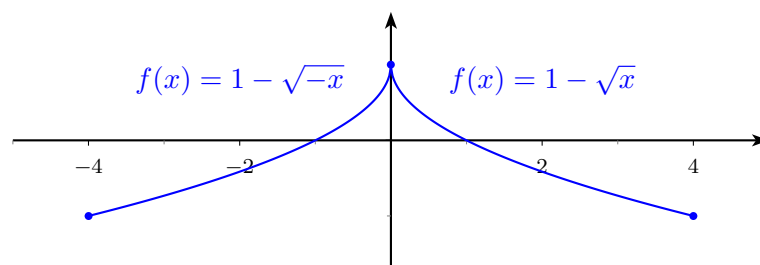


Figura 13.7

Até o momento, sabemos que os pontos de máximo e mínimo local são pontos críticos. No entanto, dado um ponto crítico, não sabemos ainda determinar se é ponto de máximo local, mínimo local ou nenhum dos dois. Voltaremos a esta questão futuramente.

Exercícios

Esboce o gráfico de uma função contínua f definida no intervalo $[0, 6]$ que tenha as seguintes propriedades:

1. Máximo absoluto em $x = 1$, mínimo absoluto em $x = 3$, máximo local em $x = 4$ e mínimo local em $x = 5$.
2. Não tem máximo e mínimo absolutos, mas tem máximo local em $x = 2$ e mínimo local em $x = 4$.
3. Máximo absoluto em $x = 6$, mínimo absoluto em $x = 2$, máximo local em $x = 3$ e mínimo local em $x = 4$.
4. Máximo absoluto em $x = 0$, mínimo absoluto em $x = 6$, ponto crítico em $x = 3$, mas nenhum ponto extremo local.

Encontre os pontos críticos da seguintes funções:

5. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

6. $f(x) = |2x + 1|$

7. $f(x) = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}$

8. $x^{2/3}(x - 1)^2$

Determine os máximos e mínimos absolutos das seguintes funções:

9. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ em $[0, 5]$

10. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ em $[-2, 2]$

11. $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ em $[0, \pi]$

12. $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2$ em $[-2, 2]$

13. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

14. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ em $[0, 3]$

15. Se a e b são números inteiros positivos, encontre o valor de máximo da função $f(x) = x^a(1 - x)^b$, no intervalo $[0, 1]$.



13.2 O Teorema do Valor Médio

Um dos resultados mais importantes do Cálculo Diferencial é o chamado Teorema do Valor Médio. Ele será utilizado para provar resultados nesta e nas próximas unidades que permitem analisar aspectos do comportamento global de uma função (como intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade etc.) a partir de sua função derivada.

Vamos iniciar com alguns exemplos, antes de formalizar o enunciado do Teorema.

EXEMPLO 12

Se um objeto está na posição $s = 10$ m no tempo $t = 1$ s e está na posição $s = 40$ m no tempo $t = 7$ s, então podemos calcular sua velocidade média por

$$v_m = \frac{40 - 10}{7 - 1} = 5 \text{ m/s}.$$

O Teorema do Valor Médio mostra que não só a velocidade média é de 5 m/s, como a velocidade instantânea em algum instante do percurso é de 5 m/s.

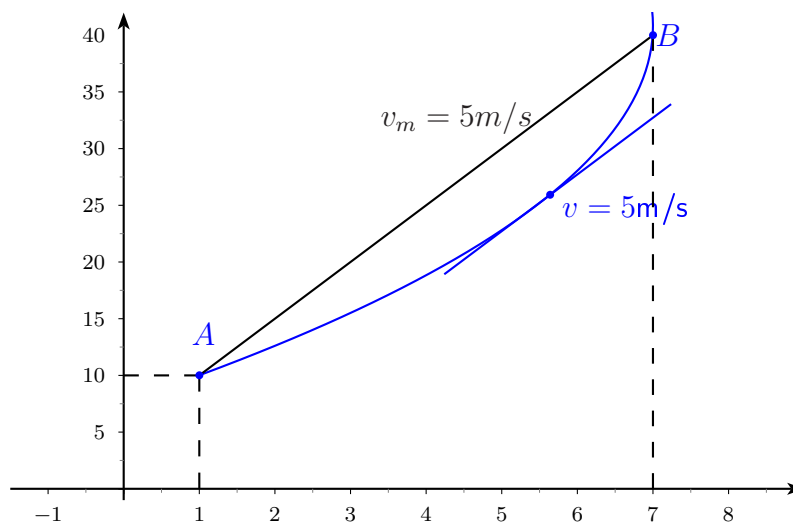


Figura 13.8

Observe como o Teorema do Valor Médio relaciona um aspecto global do comportamento da função (a velocidade média em todo o percurso) com um aspecto local (a velocidade instantânea em um ponto).

Este exemplo está representado no gráfico da figura 13.8. O movimento do objeto está representado pela curva em azul. Na verdade, não temos nenhuma informação sobre a curva que representa o movimento. Mas, pelo Teorema do Valor Médio, independente da curva exata, para algum instante t haverá um ponto com velocidade $v = 5$ m/s, isto é, há um ponto da curva com abscissa entre $t = 1$ e $t = 7$ cuja tangente tem coeficiente angular igual a 5.

Dois carros em uma corrida largam na mesma posição ao mesmo tempo e terminam empatados. O Teorema do Valor Médio permite concluir que em algum instante eles tiveram exatamente a mesma velocidade.

EXEMPLO 13

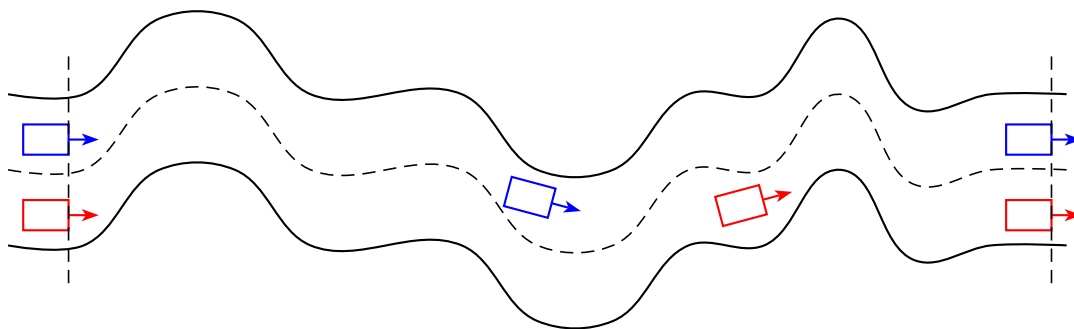


Figura 13.9

Voltaremos a estes dois exemplos na próxima seção, mas esperamos que tenham servido não só para começar a entender o Teorema do Valor Médio como para despertar sua curiosidade!

Na próxima seção, enunciaremos e provaremos o Teorema de Rolle, que pode ser visto como uma forma mais restrita do Teorema do Valor Médio, como um caso especial em que a função tem o mesmo valor nos extremos do intervalo fechado.

Na verdade, provaremos primeiro o Teorema de Rolle e, depois, usaremos este último para provar o Teorema do Valor Médio.

13.3 O Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio

Observe os dois gráficos da figura 13.10 a seguir. Neles podemos observar o gráfico de função definidas em um intervalo $[a, b]$, em que $f(a) = f(b)$. O que se observa nos dois gráficos é que existe algum $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. O Teorema de Rolle afirma que este é sempre o caso.

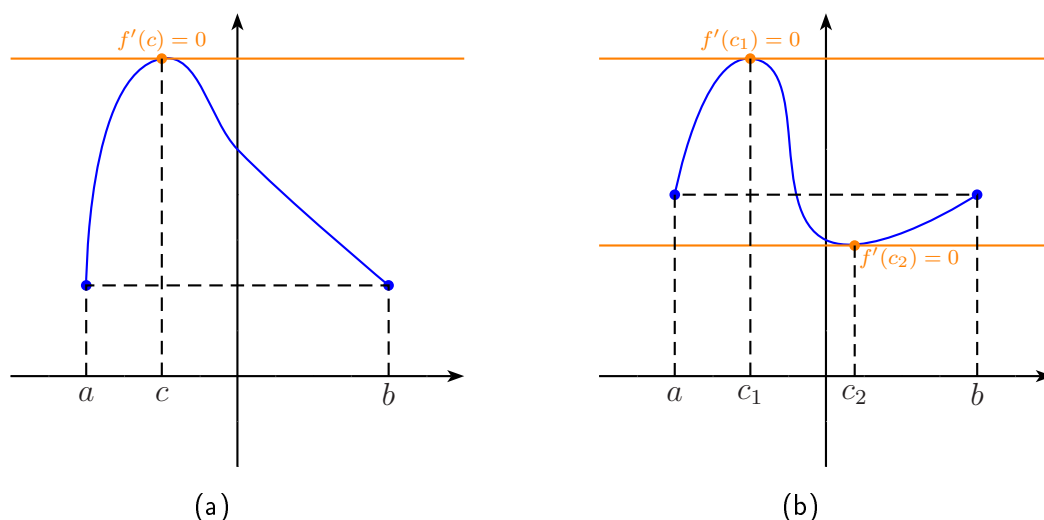


Figura 13.10

TEOREMA 14 TEOREMA DE ROLLE

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) e $f(a) = f(b)$ então existe pelo menos um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO

Pelo Teorema de Weierstrass, a função f contínua em $[a, b]$ possui valor máximo e mínimo no intervalo. Sejam m e M os valores de mínimo e máximo absolutos de f em $[a, b]$, respectivamente.

Se estes valores são assumidos nos extremos do intervalo, por exemplo, $f(a) = m$ e $f(b) = M$, então, como $f(a) = f(b)$ por hipótese, o mínimo e o máximo da função são o mesmo valor e, portanto, a função é constante em todo o intervalo. Como a derivada da função constante é nula, temos $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$, o que prova o Teorema de Rolle neste caso.



Caso o mínimo ou máximo absoluto da função não estejam nos extremos do intervalo, então há um ponto c no intervalo aberto (a, b) tal que $f(c)$ é máximo ou mínimo de f . Então c é extremo local de f e, pelo Teorema 8, como f é derivável em (a, b) temos $f'(c) = 0$, o que conclui a demonstração.

Seja a função $f(x) = x^3 - x + 1$. Temos que $f(-1) = f(1) = 1$. Pelo Teorema de Rolle, há pelo menos um valor de $x \in (-1, 1)$ tal que $f'(x) = 0$.

De fato, como $f(x) = x^3 - x + 1 \implies f'(x) = 3x^2 - 1$, então

$$f'(x) = 0 \implies 3x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{3} \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tanto $\frac{\sqrt{3}}{3}$ quanto $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ estão contidos no intervalo $(-1, 1)$. Observe o gráfico da figura 13.11.

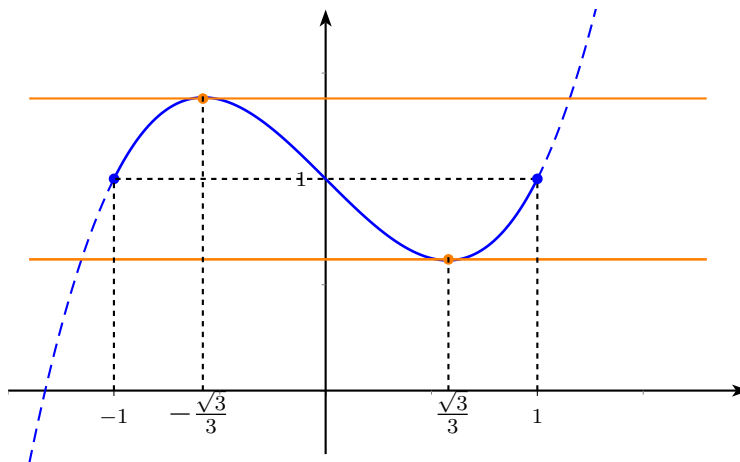


Figura 13.11: $f(x) = x^3 - x + 1$

Mostre que a função $f(x) = x^3 + ax + b$, com $a > 0$, possui uma única raiz real.

Como $f(x)$ é uma função polinomial de grau ímpar,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

EXEMPLO 15

EXEMPLO 16

Pelo Teorema do Valor Intermediário, estudado na Unidade 8, existe um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$. (O mesmo raciocínio mostra que o mesmo vale para qualquer função polinomial de grau ímpar. Veja a Proposição 3 da Unidade 8).

Vamos usar o Teorema de Rolle para mostrar que a raiz é única.

Vamos fazer a prova por contradição. Se houvesse outra raiz x_1 , então teríamos $f(x_0) = f(x_1)$. Portanto, existe um $c \in (x_0, x_1)$ (caso $x_0 < x_1$) ou $c \in (x_1, x_0)$ (caso $x_1 < x_0$) tal que $f'(c) = 0$.

Mas observe que a derivada de f é $f'(x) = 3x^2 + a$. Assim,

$$f'(x) = 0 \implies 3x^2 + a = 0 \implies x = \pm \sqrt{\frac{-a}{3}}.$$

Como, por hipótese, $a > 0$, então f' não tem raiz real, contradizendo $f'(c) = 0$. Portanto, não há outra raiz x_1 .

 Para Saber Mais - Michel Rolle - Clique para ler

Iremos agora enunciar e provar o Teorema do Valor Médio, usando o Teorema de Rolle. Antes disso, observe os dois gráficos na figura 13.12 a seguir.

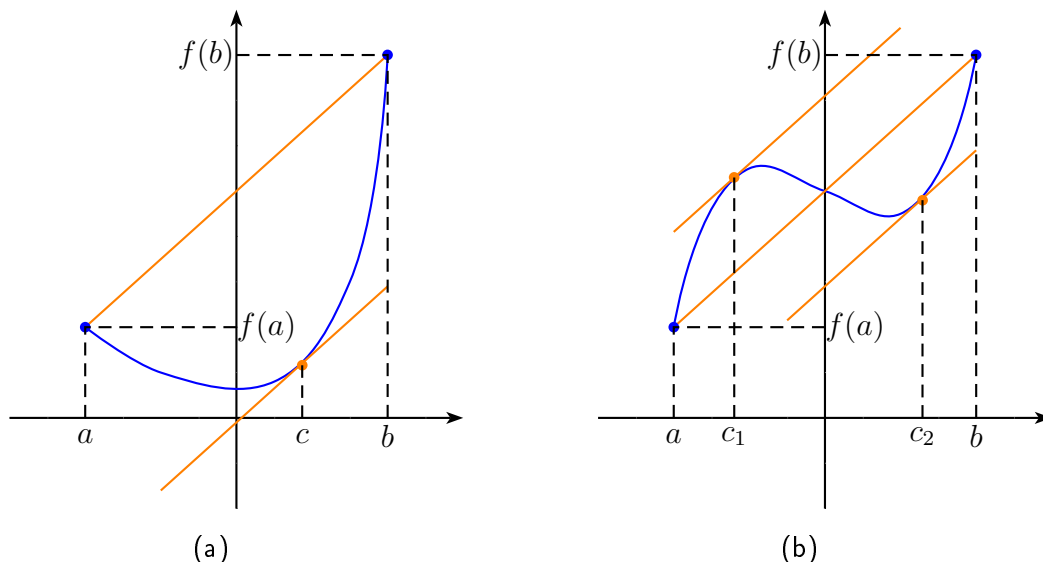


Figura 13.12: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Intuitivamente, se deslocarmos a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ mantendo a mesma inclinação, isto é, deslocarmos paralelamente a reta, em algum momento ela se torna tangente à curva em um ponto c . Então, a tangente obtida passando por c tem a mesma inclinação que a reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Logo, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

O argumento acima não constitui uma prova formal do Teorema do valor médio, mas somente um argumento geométrico que mostra sua plausibilidade. Seguem o enunciado e a prova formal do Teorema.

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) . Então existe pelo menos um número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

TEOREMA 17
TEOREMA DO VALOR
MÉDIO

Para aplicar o Teorema de Rolle, faremos uso de uma função g , definida a partir de f e tal que $g(a) = g(b)$.

Seja a função $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$

Então g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Além disso:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \text{ e } g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b \\ &= \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \end{aligned}$$

Logo, $g(a) = g(b)$. Podemos então aplicar o Teorema de Rolle para g e concluir que existe um $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Mas

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Logo, $g'(c) = 0 \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, o que completa a demonstração do Teorema do Valor Médio.

DEMONSTRAÇÃO

Vamos a alguns exemplos:



EXEMPLO 18

Seja $f: [0 : 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Seja $A = (0, 0)$ e $B = (2, 8)$ dois pontos do gráfico de f . Seja r a reta que passa por A e B . Encontre um número $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c)$ é igual ao coeficiente angular de r .

O coeficiente angular da reta que passa por A e B é

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{8}{2} = 4.$$

Como $f(x) = x^3$ então $f'(x) = 3x^2$. Portanto,

$$f'(x) = 3x^2 = 4 \implies x^2 = \frac{4}{3} \implies x = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Logo, para $c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in (0, 2)$, temos $f'(c)$ igual ao coeficiente angular de r .

Voltando aos exemplos do início da seção, no exemplo 12, supondo que a função posição $s = s(t)$ seja contínua no intervalo fechado $[1, 7]$ e derivável no intervalo aberto $(1, 7)$, então, pelo Teorema do Valor Médio, existe pelo menos um $t \in (1, 7)$ tal que

$$f'(t) = \frac{s(7) - s(1)}{7 - 1} = \frac{40 - 10}{6} = 5$$

Quanto ao exemplo 13, sejam $s_0(t)$ e $s_1(t)$ as funções que descrevem as posições dos dois carros. Suponha que a corrida iniciou em $t = 0$ e terminou em $t = T$. Assumindo as condições do Teorema do Valor Médio (continuidade em $[0, T]$ e diferenciabilidade em $(0, T)$) para ambas as funções, a função $s(t) = s_0(t) - s_1(t)$ atende às mesmas condições e $s(0) = s_0(0) - s_1(0) = 0$ (os carros largam juntos) e $s(T) = s_0(T) - s_1(T) = 0$ (os carros terminam empatados). Pelo Teorema do Valor Médio, há um número $t^* \in (0, T)$ tal que

$$s'(t^*) = \frac{s(T) - s(0)}{T - 0} = \frac{0}{T} = 0$$

Como $s'(t) = s'_0(t) - s'_1(t)$, então $s'(t^*) = 0 \implies s'_0(t^*) = s'_1(t^*)$, o que diz que os dois carros, no instante $t = t^*$, têm a mesma velocidade.



Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(0) = -2$ e $f'(x) \leq 5$. Qual o valor máximo possível para $f(2)$?

Pelo Teorema do Valor Médio, há um número $c \in (0, 2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{f(2) - (-2)}{2} = \frac{f(2) + 2}{2}.$$

Como $f'(c) \leq 5$, então

$$\frac{f(2) + 2}{2} \leq 5 \implies f(2) + 2 \leq 10 \implies f(2) \leq 8,$$

o que mostra que o maior valor possível para $f(2)$ é 8.

EXEMPLO 19

O exemplo a seguir mostra que *a condição de diferenciabilidade é necessária para o Teorema do Valor Médio*. Em outras palavras, se a função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não for derivável no intervalo aberto (a, b) , não se pode garantir que valha o resultado do teorema.

Considere a função módulo $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$. A função é contínua em $[-1, 1]$, mas não é derivável em $x = 0$.

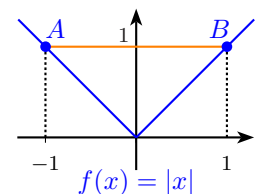
Para qualquer $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$ temos

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \implies f'(x) = 1 & \text{se } x < 0 \\ -x & \implies f'(x) = -1 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

O que mostra que para todo $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$, $f'(x) = \pm 1$.

A reta que passa pelos pontos $A = (-1, 1)$ e $B = (1, 1)$ tem coeficiente angular 0, o que não é igual $f'(x)$ para $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$.

EXEMPLO 20



O próximo exemplo mostra que a condição de continuidade nos extremos do intervalo $[a, b]$ também é condição necessária para o Teorema. O exemplo mostra uma função derivável (portanto, contínua) em um intervalo aberto (a, b) , mas que não é contínua nos extremos do intervalo fechado $[a, b]$ e para a qual não vale o resultado do teorema.

EXEMPLO 21

Seja a função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. A função é derivável em $(0, 1)$, mas não é contínua em $x = 0$.

Tomando $A = (0, 0)$ e $B = (1, 1)$ pontos do gráfico da função, não há um $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c)$ seja igual à inclinação da reta AB . Basta ver que todas as tangentes em pontos $(c, f(c))$, $c \in (0, 1)$ são retas descendentes (coeficiente angular negativo) enquanto a reta AB é ascendente (coeficiente angular positivo). Ver figura 13.13.

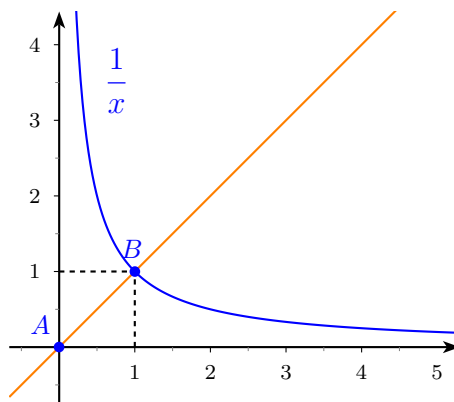


Figura 13.13

Para concluir esta seção, veremos duas consequências importantes do Teorema do Valor Médio. A primeira delas é que se uma função tem derivada nula em todo ponto então ela é uma função constante.

PROPOSIÇÃO 22

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então f é constante em (a, b) .

DEMONSTRAÇÃO

Sejam $x_0, x_1 \in [a, b]$, com $x_0 < x_1$. então f é contínua em $[x_0, x_1]$ e derivável em (x_0, x_1) . Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Mas $f'(c) = 0$, logo $f(x_1) - f(x_0) = 0 \implies f(x_1) = f(x_0)$, ou seja, a função tem o mesmo valor para quaisquer pontos $x_0, x_1 \in (a, b)$. Resulta que f é constante em (a, b) e, por continuidade, constante em $[a, b]$.

Usando esta proposição, podemos provar que se duas funções têm a mesma derivada em todo ponto então diferem no máximo por uma constante.

Sejam $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas e deriváveis em (a, b) . Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + k$ para todo $x \in (a, b)$.

PROPOSIÇÃO 23

Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Então h é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e

DEMONSTRAÇÃO

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0, \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Pela Proposição 22, $h(x)$ deve ser constante, isto é, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = k \implies f(x) = g(x) + k$, para todo $x \in (a, b)$.

Mostre que a posição e velocidade de um objeto em movimento uniformemente acelerado são dadas pelas equações:

EXEMPLO 24

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \end{aligned}$$

em que a é a aceleração, v a velocidade, s a posição, v_0, s_0 respectivamente a velocidade e posição em $t = 0$.

Um movimento uniformemente acelerado é aquele em que a aceleração a é constante. Assim, $v'(t) = a$. Mas a função $f(x) = at$ tem a mesma derivada que v , logo difere de v por uma constante, $v(t) = at + k$. Como $v_0 = v(0) = a \cdot 0 + k = k$, resulta

$$v(t) = at + v_0.$$

Com relação à posição $s(t)$, temos $s'(t) = v(t) = at + v_0$. Mas, comparando com a função $g(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, vemos que $g'(t) = v_0 + at = s'(t)$, ou seja, $g(t)$ e $v(t)$ têm a mesma derivada. Portanto $s(t) = g(t) + k$, para alguma constante k . Avaliando em $t = 0$, obtemos $s_0 = s(0) = v_0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 0^2 + k \implies s_0 = k$ e, portanto,

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$



Exercícios

1. Verifique se cada uma das funções abaixo, definidas no intervalo $[a, b]$, satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio. Caso afirmativo, determine um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
 - (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $[a, b] = [0, 4]$.
 - (b) $f(x) = x^2 - 4$, $[a, b] = [-2, 2]$.
 - (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ $[a, b] = [0, 1]$
 - (d) $f(x) = |x - 2|$, $[a, b] = [0, 4]$.
 - (e) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$ $[a, b] = [0, 5]$
 - (f) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \text{ e } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ $[a, b] = [0, 2]$
2. Seja $f(x) = x^3 - 2x + 1$, definida no intervalo $[a, b] = [0, 2]$. Encontre um valor $c \in (0, 2)$ que satisfaça as condições do Teorema do Valor Médio.
3. Seja $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x$, então $f'(x) = 4x^3 + 4x - 3$. Use o Teorema de Rolle para mostrar que a equação $4x^3 + 4x - 3 = 0$ possui pelo menos uma solução no intervalo $(0, 1)$.
4. Seja $f(x) = x^5 + 2x^3 + 4x - 5$.
 - (a) Determine seus valores em $x = 0$ e $x = 1$ e conclua que a função f possui algum zero no intervalo $(0, 1)$.
 - (b) Assuma que há dois zeros x_0 e x_1 no intervalo $(0, 1)$ e, usando o Teorema de Rolle, obtenha uma contradição.
 - (c) Conclua que a equação $x^5 + 2x^3 + 4x - 5 = 0$ possui uma, e somente uma, solução no intervalo $(0, 1)$.
5. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $f(1) = 5$ e $f'(x) \geq 3$ para todo $1 \leq x \leq 5$, qual o valor mínimo para $f(5)$?
6. Mostre que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

7. Mostre que a equação $2x - 1 - \sin x = 0$ tem exatamente uma raiz real.
8. Seja f uma função derivável em \mathbb{R} .
- (a) Mostre que se f tem duas raízes então f' tem pelo menos uma raiz.
 - (b) Mostre que se f tem derivada segunda e tem três raízes então f'' tem pelo menos duas raízes.
 - (c) É possível generalizar o resultado?
9. Mostre que:
- (a) um polinômio de grau 3 tem, no máximo, 3 raízes reais.
 - (b) um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes reais.
10. Calcule a velocidade inicial, altura máxima e tempo até atingir o solo de uma bola atirada verticalmente para cima a partir de uma altura $h = 2$ m, sabendo-se que atinge uma altura de 8 m após 1 segundo de movimento. Considere o movimento como sendo uniformemente acelerado com aceleração aproximada de $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- Este é exatamente o exemplo inicial da Unidade 9.



13.4 Textos Complementares

Para Saber Mais

Michel Rolle

Michel Rolle (1652–1719) foi um matemático francês cujos trabalhos versam sobre Álgebra, Análise Diofantina e Geometria. Ficou mais conhecido pelo "Teorema de Rolle", provado por ele em 1691. Sua obra mais importante é o *Traité d'algèbre*, publicado em 1690. Esta obra contém a primeira descrição publicada do Método de Eliminação Gaussiana (algoritmo para solução de equações lineares). No tratado, Rolle inventa a notação $\sqrt[n]{x}$ para a raiz n -ésima de x , que é usada até hoje. É interessante notar que somente no século XIX o Teorema que leva seu nome passou a ser chamado assim.



14

TRAÇADO DO GRÁFICO DE FUNÇÕES

Sumário

14.1 O crescimento da função e a derivada	2
14.2 Teste da derivada primeira e da derivada segunda .	8
14.3 Concavidade do gráfico de uma função	13
14.4 Textos Complementares	22

Para esboçar o gráfico de uma função dois aspectos essenciais devem ser analisados: os intervalos de crescimento e decrescimento e os intervalos de concavidade para cima e de concavidade para baixo do gráfico.

Veremos que para funções deriváveis o primeiro aspecto - crescimento - está relacionado aos sinais da função derivada enquanto que o segundo aspecto - concavidade - está relacionado aos sinais da derivada segunda.

14.1 O crescimento da função e a derivada

Nesta seção iremos relacionar a propriedade de crescimento de uma função e sua derivada.

A figura abaixo mostra a função $f(x) = \sin x$. Observe que a função é crescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e decrescente no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. No intervalo em que é crescente, a reta tangente a um ponto qualquer é uma reta crescente (portanto a derivada da função é positiva) e no intervalo em que é decrescente, a reta tangente a um ponto qualquer é uma reta decrescente (portanto a derivada da função é negativa). A derivada é nula em $x = \frac{\pi}{2}$.

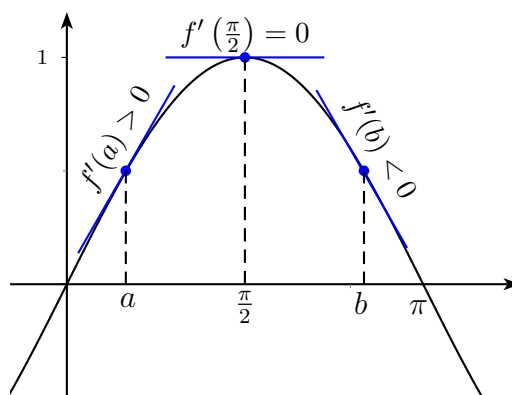


Figura 14.1: $f(x) = \sin(x)$

Assim, intuitivamente, a relação entre crescimento e derivada é a de que a função é crescente nos intervalos de derivada positiva e decrescente nos intervalos de derivada negativa. De fato, mostraremos o seguinte:

Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) então:

- (i) f é não decrescente em $[a, b]$ se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Além disso, se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$.
- (ii) f é não crescente em $[a, b]$ se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Além disso, se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$.

PROPOSIÇÃO 1

Demonstraremos o item (i). O item (ii) é análogo e deixaremos como exercício.

DEMONSTRAÇÃO

Suponha que f seja não decrescente em $[a, b]$ e vamos determinar o sinal de $f'(x)$.

Se $h > 0$, temos $x + h > x$ e, usando o fato de que f é não decrescente:

$$f(x + h) \geq f(x) \implies f(x + h) - f(x) \geq 0 \implies \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Se $h < 0$, temos $x + h < x$ e, como f é não decrescente:

$$f(x + h) \leq f(x) \implies f(x + h) - f(x) \leq 0 \implies \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Em ambos os casos, $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$. Portanto

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Suponha agora que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Sejam $x_0, x_1 \in [a, b]$ com $x_0 < x_1$. Aplicando o Teorema do valor médio no intervalo $[x_0, x_1]$, temos que existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Como $x_1 - x_0 > 0$ e $f'(c) \geq 0$ então $f(x_1) - f(x_0) \geq 0 \implies f(x_1) \geq f(x_0)$ e, portanto, f é não decrescente.



Por outro lado, se vale que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então fica garantido que $f'(c) > 0$ e vale que $f(x_1) - f(x_0) > 0 \implies f(x_1) > f(x_0)$, o que mostra que f é crescente.

Nos próximos exemplos iremos estudar os intervalos de crescimento e decrescimento de algumas funções, começando com o caso simples das funções quadráticas.

EXEMPLO 2

Seja $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função e esboce um gráfico.

Como $f'(x) = 2x - 2$, então $f'(x) > 0 \implies 2x - 2 > 0 \implies x > 1$ e $f'(x) < 0 \implies x < 1$. A derivada tem valor zero em $x = 1$. O valor do função no ponto $x = 1$ é $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.

Portanto, o trinômio decresce (derivada negativa) no intervalo $(-\infty, 1)$, atinge o ponto $V = (1, -4)$ e passa a crescer (derivada positiva). O vértice é um ponto de mínimo da função.

Os sinais de $f'(x)$ podem ser representados pelo diagrama a seguir:

intervalo	sinal de f'	f
$x < 1$	—	decrescente
$x > 1$	+	crescente

O gráfico da parábola está representado na figura a seguir. Observe que se trata de uma parábola com concavidade voltada para cima.

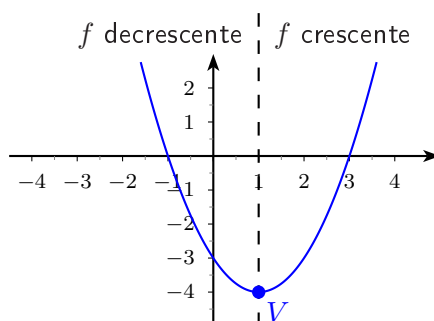


Figura 14.2: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Seja a função $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$. Determine os intervalos em que f é crescente e aqueles em que f é decrescente.

EXEMPLO 3

Vamos verificar os sinais da derivada $f'(x)$.

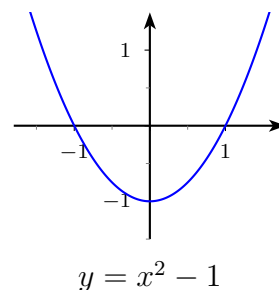
Como $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$, então $f'(x) = x^2 - 1$.

O gráfico de $f'(x) = x^2 - 1$ é uma parábola voltada para cima, com zeros em $x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$.

Os sinais $f'(x)$ são os seguintes:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < -1 \text{ ou } x > 1$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad -1 < x < 1$$



Veja a representação dos sinais de $f'(x)$ na reta a seguir.

intervalo	sinal de f'	f
$x < -1$	+	crescente
$-1 < x < 1$	-	decrescente
$x > 1$	+	crescente

Vamos agora usar estes dados de crescimento para esboçar o gráfico da função. Os valores da função nos pontos $x = \pm 1$ são $f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - (-1) = \frac{2}{3}$ e $f(1) = \frac{1^3}{3} - (1) = -\frac{2}{3}$.

O que fizemos até agora permite concluir o seguinte:

- (i) A função é crescente no intervalo $(-\infty, -1)$ atingindo o ponto $A = (-1, \frac{2}{3})$.
- (ii) A função é decrescente no intervalo $(-1, 1)$ atingindo o ponto $B = (1, -\frac{2}{3})$.
- (iii) A função é crescente no intervalo $(1, \infty)$.

Mas falta ainda um detalhe, quando dizemos que ela é crescente em $(-\infty, -1)$ e atinge o ponto $A = (-1, \frac{2}{3})$, ela cresce a partir de onde? Quando dizemos que cresce em $(1, \infty)$, saindo do ponto $B = (1, -\frac{2}{3})$, cresce até onde?

Para responder esta pergunta, devemos considerar os limites infinitos da função. Felizmente, estes são fáceis de serem calculados:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3} - x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3} - x = \infty.$$



A conclusão é a seguinte: a função vem de $-\infty$, cresce até o ponto $A = (-1, \frac{2}{3})$, passa a decrescer até o ponto $B = (1, -\frac{2}{3})$ e volta a crescer até $+\infty$. A figura 14.3 mostra o gráfico da função.

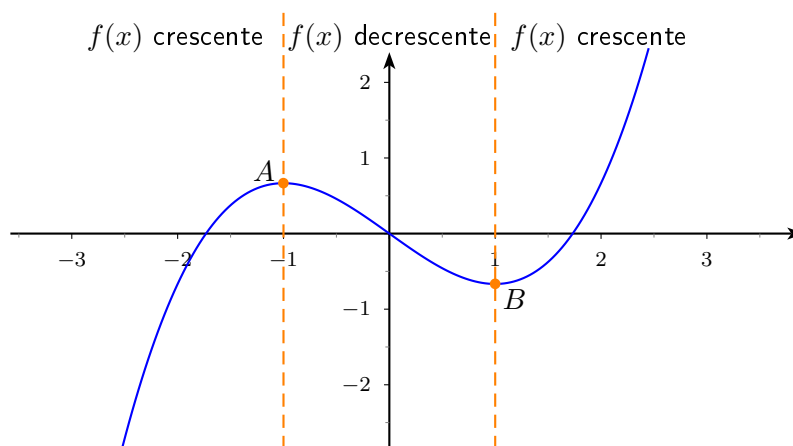


Figura 14.3: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$

Resumindo, para analisar o crescimento da função e esboçar seu gráfico, devemos fazer o seguinte:

1. Calcular a função derivada $f'(x)$ e estudamos seus sinais.
2. Calcular os valores de $f(x)$ nos pontos em que $f'(x)$ se anula.
3. Calcular os limites infinitos de $f(x)$.

A bem da verdade, o procedimento acima não é suficiente para esboçar o gráfico da função. Falta ainda um detalhe fundamental: a concavidade do gráfico função, que está relacionada com a derivada segunda e será estudada na próxima seção.

Vamos a mais um exemplo.

EXEMPLO 4

Seja a função $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 29$. Determine os intervalos em que f é crescente e aqueles em que f é decrescente.

Iniciamos determinando os sinais da derivada.

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 29$$

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x = 12x(x^2 + x - 6) = 12x(x + 3)(x - 2)$$

A fatoração de $f'(x)$ no produto de três fatores lineares facilita o cálculo dos sinais de $f'(x)$, basta analisar individualmente os sinais de cada fator e multiplicá-los. Os zeros de $f'(x)$ estão em

$$f'(x) = 12x(x+3)(x-2) = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = -3 \text{ ou } x = 2.$$

Observe o esquema abaixo para o cálculo de sinais de $f'(x)$.

intervalo	$12x$	$x+3$	$x-2$	sinal de f'	f
$x < -3$	-	-	-	-	decrecente
$-3 < x < 0$	-	+	-	+	crescente
$0 < x < 2$	+	+	-	-	decrecente
$x > 2$	+	+	+	+	crescente

O valor da função $f(x)$ nos pontos em que $f'(x) = 0$ são:

$$f(-3) = 3(-3)^4 + 4(-3)^3 - 36(-3)^2 + 29 = -160, f(0) = 29 \text{ e } f(2) = -35.$$

Os limites para $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow \infty$ são facilmente determináveis:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 29 = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 29 = \infty.$$

Reunindo toda essa informação, temos o seguinte: a função vem de ∞ , decresce até $A = (-3, -160)$, cresce até $B = (0, 29)$, volta a decrescer até $C = (2, -35)$ e cresce novamente tendendo para ∞ . Observe a figura 14.4.

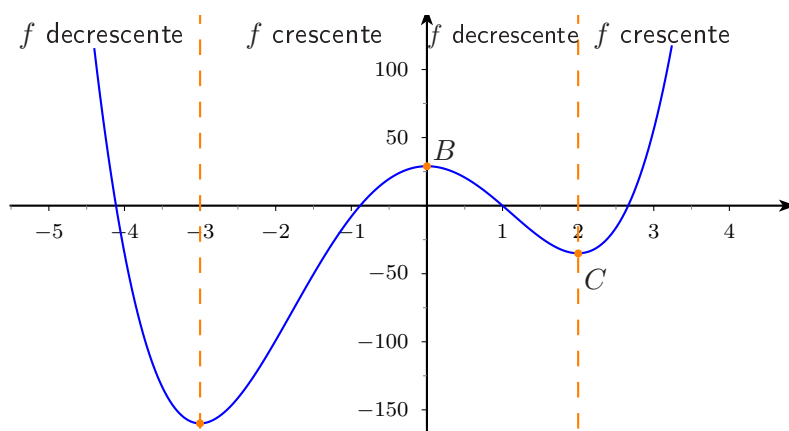


Figura 14.4: Gráfico de $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 29$

14.2 Teste da derivada primeira e da derivada segunda

Na Unidade 13 vimos que se $f'(c) = 0$ então $x = c$ é ponto crítico de f e $f(c)$ pode ser mínimo local, máximo local ou nenhum dos dois. Agora que relacionamos crescimento e decrescimento do gráfico de função com o sinal da derivada, podemos usar esta para, dado um ponto com $x = c$ tal que $f'(c) = 0$, dizer em quais dos três casos ele se enquadra.

Inicialmente, verifique na figura 14.5 a seguir os casos possíveis:

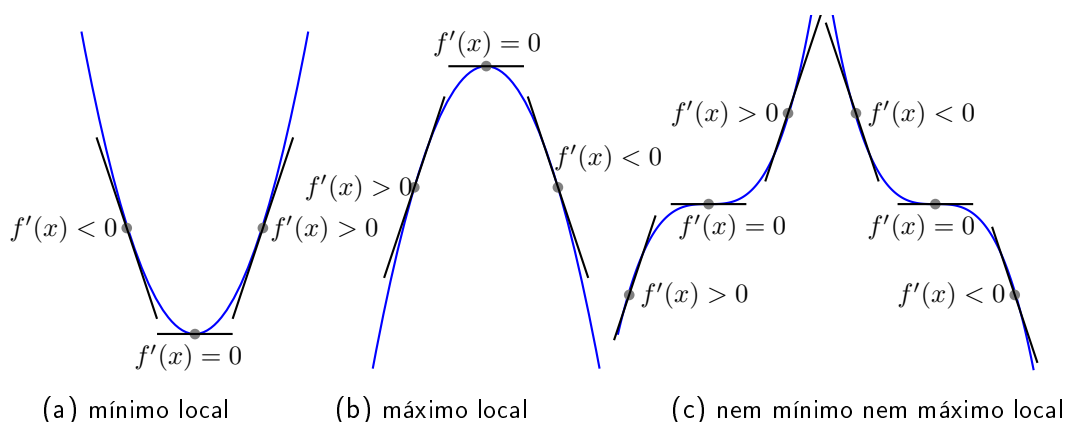


Figura 14.5

Vemos que os máximos e mínimos locais acontecem exatamente quando há mudança de sinal de $f'(x)$. Mais precisamente, temos o chamado Teste da derivada primeira:

PROPOSIÇÃO 5 TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA

Seja a função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) e seja c um ponto crítico de f .

- (i) Se f' passa de positiva para negativa em c então f tem máximo local em c .
- (ii) Se f' passa de negativa para positiva em c então f tem mínimo local em c .
- (iii) Se f' não muda de sinal em c então não tem máximo nem mínimo local em c .

Vamos demonstrar o item (i). Se f' passa de positiva para negativa em c então existem $x_0, x_1 \in (a, b)$, $x_0 < c < x_1$, tais que $f'(x) > 0$ se $x \in (x_0, c)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (c, x_1)$.

Pela Proposição 1, f é crescente em $[x_0, c]$ e decrescente em $[c, x_1]$, segue que $f(c)$ é valor máximo de f no intervalo $[x_0, x_1]$ que contém c .

Analogamente, se f' passa de negativa para positiva em c , então existe intervalo $[x_0, x_1]$ contendo c tal que f é decrescente em $[x_0, c]$ e crescente em $[c, x_1]$. Portanto, $f(c)$ é valor mínimo no intervalo $[x_0, x_1]$, o que demonstra (ii).

Para provar o item (iii), seja $I \subset [a, b]$ um intervalo contendo c . Como f' não muda de sinal em c então há um intervalo $[x_0, x_1]$ contendo c tal que f é crescente (respectivamente, decrescente) em $[x_0, c]$ e continua crescente (respectivamente, decrescente) em $[c, x_1]$. Aproximando x_0 e x_1 de c o que for necessário, podemos supor que $[x_0, x_1] \subset I$. Portanto, $f(c)$ não pode ser valor máximo nem mínimo em I .

DEMONSTRAÇÃO

Encontre os mínimos e máximos locais da função $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

EXEMPLO 6

A derivada da função é

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Logo,

$$f'(x) = 0 \implies 1 - x^2 = 0 \implies x = \pm 1.$$

Vamos verificar os sinais de f' :

intervalo	$1 - x^2$	$(x^2 + 1)^2$	sinal de f'	f
$x < -1$	−	+	−	decrescente
$-1 < x < 1$	+	+	+	crescente
$x > 1$	−	+	−	decrescente

Vemos que:

$x = -1$ é mínimo local pois f' passa de negativa para positiva em $x = -1$.



$x = 1$ é máximo local, pois em $x = 1$ a derivada f' passa de positiva para negativa.

Se f é diferenciável em um intervalo aberto I , e $c \in I$ é tal que $f'(c) = 0$ e $f''(c)$ existe, um outro instrumento para determinar se o ponto crítico $x = c$ é máximo local ou mínimo local é a derivada segunda de f .

PROPOSIÇÃO 7
TESTE DA DERIVADA
SEGUNDA

Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I e seja $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. Se $f''(c)$ existe então:

(i) Se $f''(c) < 0$ então f possui um máximo local em c .

(ii) Se $f''(c) > 0$ então f possui um mínimo local em c .

O teste é inconclusivo caso $f''(c) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO

Demonstraremos o caso (i). O caso (ii) é análogo.

Suponha $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$. então

$$f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0.$$

Logo, há um intervalo (a, b) contendo c tal que $\frac{f'(x)}{x - c} < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Portanto,

$$a < x < c \implies x - c < 0 \text{ e } \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \implies f'(x) > 0.$$

$$c < x < b \implies x - c > 0 \text{ e } \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \implies f'(x) < 0.$$

Portanto, f passa de crescente para decrescente em c . Pelo teste da derivada primeira, f tem máximo local em $x = c$.

EXEMPLO 8

Encontre os valores de máximo e mínimo local da função $f(x) = x^3 - x^2$. Derivando a função obtemos $f'(x) = 3x^2 - 2x$. Os pontos críticos de f são:

$$f'(x) = 0 \implies 3x^2 - 2x = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3}.$$



Derivando novamente e aplicando nos pontos críticos, obtemos $f''(x) = 6x - 2$. Usando o Teste da derivada segunda:

$$f''(0) = -2 < 0 \implies x = 0 \text{ é máximo local.}$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{2}{3}\right) - 2 = 2 > 0 \implies x = \frac{2}{3} \text{ é mínimo local.}$$

O gráfico da função está representado na Figura 14.6.

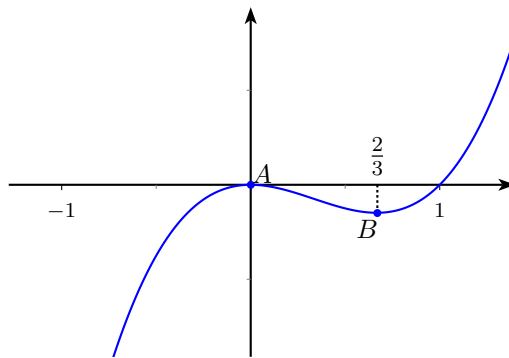


Figura 14.6: $f(x) = x^3 - x^2$

O próximo exemplo ilustra como o teste é inconclusivo para $f''(c) = 0$.

Determine os máximos e mínimos locais para $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ e $h(x) = -x^4$.

A três funções são deriváveis em todo o domínio e

$$f'(x) = 0 \implies 3x^2 = 0 \implies x = 0.$$

$$g'(x) = 0 \implies 4x^3 = 0 \implies x = 0.$$

$$h'(x) = 0 \implies -4x^3 = 0 \implies x = 0.$$

Como vemos, nos três casos, $x = 0$ é o único ponto crítico. É fácil ver que $f''(0) = g''(0) = h''(0) = 0$. No entanto, $x = 0$ não é mínimo nem máximo local de f , é ponto de mínimo local de g e ponto de máximo local de h . Ver Figura 14.7.

EXEMPLO 9

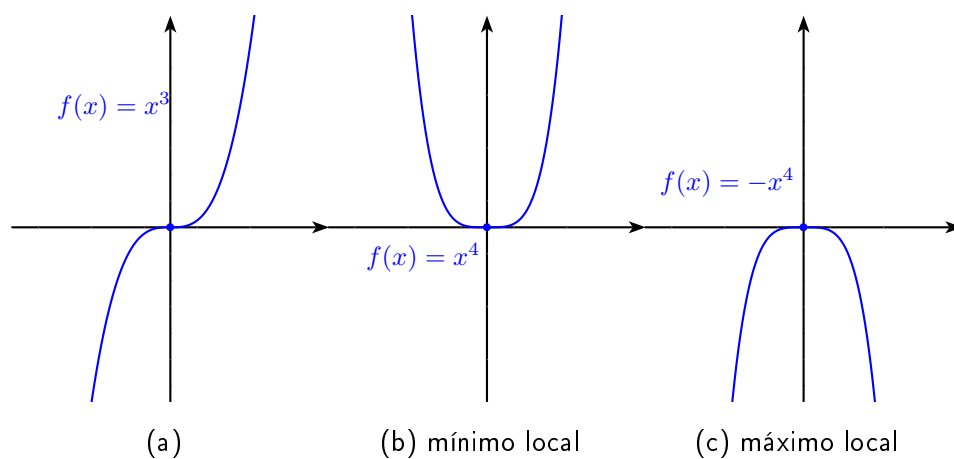


Figura 14.7

O teste da derivada segunda não pode ser aplicado quando $f''(c)$ não existe e, como vimos, é inconclusivo quando $f''(c) = 0$. Nestes dois casos devemos usar o teste da derivada primeira, que pode ser aplicado em qualquer caso.

14.3 Concavidade do gráfico de uma função

Nesta seção iremos aprender a distinguir gráficos de funções côncavas para cima de gráficos côncavos para baixo e aprender como a concavidade está relacionada à segunda derivada da função.

Observe os gráficos das funções f e g na figura 14.8.

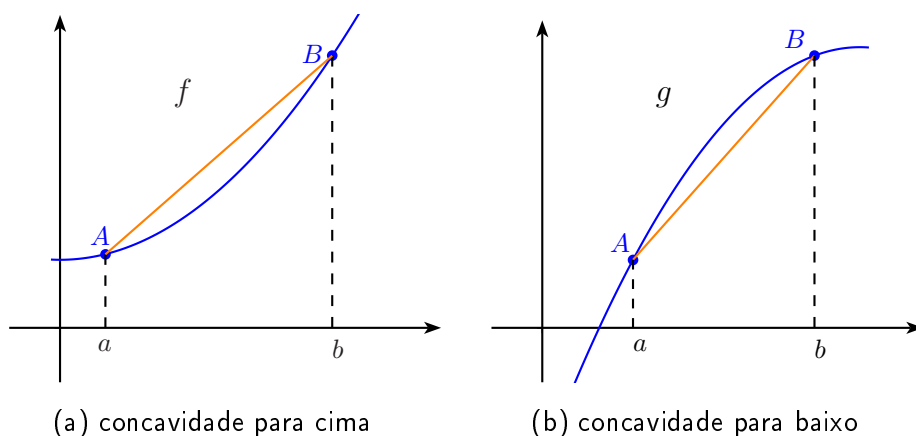


Figura 14.8

Tanto o gráfico da função f quanto o gráfico da função g são crescentes entre os pontos A e B , a diferença está na forma da curvatura do gráfico. O gráfico de f entre A e B se situa abaixo da reta que liga A e B , enquanto o gráfico de g está acima da reta que liga A e B .

Outra forma de distinguir os dois tipos de curva é por meio das tangentes nos pontos da curva. Observe a figura 14.9.

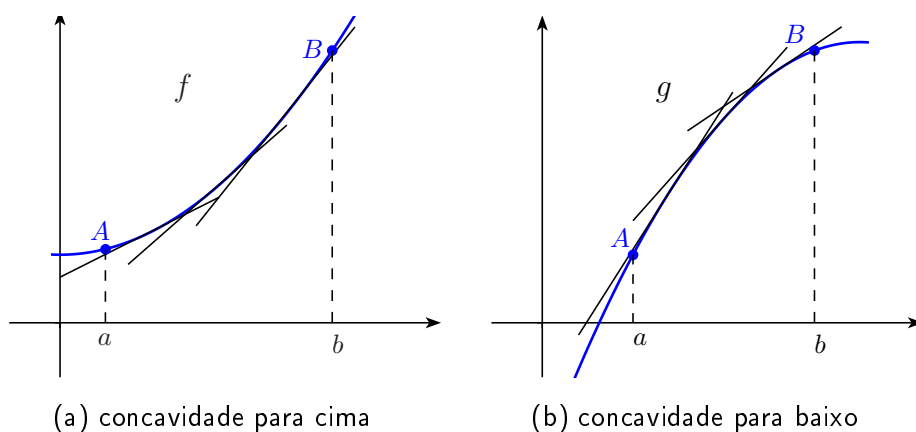


Figura 14.9

O que se observa é que no gráfico de f , a curva está sempre acima das tangentes nos pontos do intervalo (a, b) , enquanto que no gráfico de g a curva está sempre abaixo das tangentes. Usaremos esta característica como definição de concavidade.

DEFINIÇÃO 10

Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I . Se o gráfico de f se situa sempre acima das retas tangentes no intervalo I , dizemos que o gráfico tem **concavidade para cima** em I . Se o gráfico de f se situa sempre abaixo das retas tangentes no intervalo I , dizemos que tem **concavidade para baixo** em I .

Embora nossos exemplos tenham sido de funções crescentes, a mesma definição vale para funções decrescentes.

A próxima figura mostra o gráfico da função $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. A função é decrescente e côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e decrescente e côncava para cima no intervalo $(0, \infty)$.

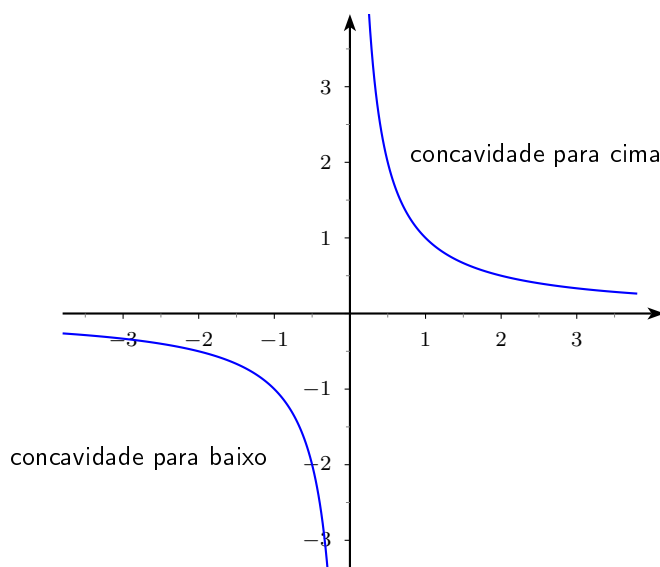


Figura 14.10: $f(x) = \frac{1}{x}$

Agora relacionaremos à concavidade do gráfico de uma função f à derivada segunda de f . Sabemos que a inclinação da tangente é dada pela função derivada f' . Olhando o gráfico 14.9a, percebemos que aumentando o valor de

x , as tangentes aumentam de inclinação, o que indica que $f'(x)$ é uma função crescente quando o gráfico tem concavidade para cima. Como a derivada de uma função crescente é positiva, devemos ter $(f'(x))' = f''(x)$ positivo no caso de concavidade para cima.

Por outro lado, o gráfico 14.9b mostra que aumentando o valor de x , as tangentes diminuem de inclinação, o que indica que $f'(x)$ é uma função decrescente quando o gráfico tem concavidade para baixo. Como a derivada de uma função decrescente é negativa, devemos ter $f''(x)$ negativo no caso de concavidade para baixo.


A próxima proposição, chamada Teste da concavidade, mostra que vale a recíproca do resultado acima.

Seja f uma função duas vezes derivável no intervalo aberto I .

- (i) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f tem concavidade para cima em I .
- (ii) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f tem concavidade para baixo em I .

PROPOSIÇÃO 11
TESTE DA CONCAVIDADE

A demonstração da Proposição está no link a seguir.

 [Para Saber Mais - Prova do teste da concavidade - Clique para ler](#)

Seja a função $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Verifique seus intervalos de crescimento e concavidade.

EXEMPLO 12

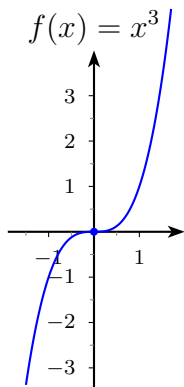
Derivando uma vez, obtemos $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Como $-\frac{1}{x^2} < 0$ para todo $x \neq 0$, a função é decrescente em todo seu domínio. Derivando novamente, obtemos $f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$. Logo

$$x < 0 \implies f''(x) = \frac{2}{x^3} < 0 \quad \text{e} \quad x > 0 \implies f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0.$$

Portanto, o gráfico de f tem concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e concavidade para cima no intervalo $(0, \infty)$. Verifique as conclusões obtidas sobre o gráfico de f na figura 14.10.

EXEMPLO 13

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento e a concavidade do gráfico da função $f(x) = x^3$.



A derivada primeira é $f'(x) = 3x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$. Portanto, a função é crescente para todo intervalo aberto que não contenha $x = 0$ e, na verdade, é fácil ver que é crescente em toda a reta.

A derivada segunda é $f''(x) = (3x^2)' = 6x$. Temos que $f''(x) > 0$ para $x > 0$ e $f''(x) < 0$ para $x < 0$. Portanto, o gráfico tem concavidade voltada para cima no intervalo $(0, \infty)$ e concavidade voltada para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$.

No exemplo anterior, a concavidade muda de direção no ponto $(0, 0)$. Tais pontos recebem o nome de pontos de inflexão.

DEFINIÇÃO 14

Um ponto P no gráfico de uma função $f(x)$ é chamado *ponto de inflexão* se f é contínua em P e há uma mudança de concavidade do gráfico de f no ponto P .

EXEMPLO 15

Esboce um gráfico possível para uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- (a) f é contínua em \mathbb{R} e duas vezes derivável em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$.
- (b) $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (2, 6)$.
- (c) $f''(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ e $f''(x) < 0$ para $x \in (-1, 4)$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

A condição (b) nos diz que a função é crescente para $x < 2$ ou $x > 6$ e decrescente em $2 < x < 6$. A condição (c) nos diz que a função tem concavidade para cima para $x < -1$ ou $x > 4$ e concavidade para baixo em $-1 < x < 4$. Reunindo esta informação temos:



intervalo	crescimento	concavidade
$x < -1$	crescente	para cima
$-1 < x < 2$	crescente	para baixo
$2 < x < 4$	decrescente	para baixo
$4 < x < 6$	decrescente	para cima
$x > 6$	crescente	para cima

Para esboçar um possível gráfico, temos que levar em conta os limites infinitos da condição (d). Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ então o gráfico tem uma assíntota horizontal em $y = -2$. O gráfico da figura 14.11 mostra um possível gráfico para a função.

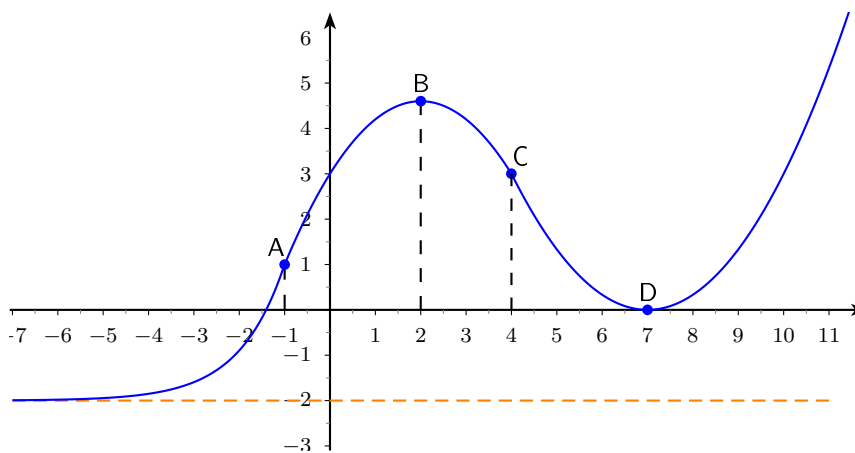


Figura 14.11

Considere a função

$$f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{1}{3}}.$$

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função. Estude a concavidade do gráfico da função e faça um esboço.

EXEMPLO 16

A derivada da função é

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}-1}(x-3)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}(x-3)^{\frac{1}{3}-1} \\ &= \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{x - \frac{5}{3}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}}.
\end{aligned}$$

Temos que $f'(\frac{5}{3}) = 0$ e que f não é derivável em $x = -1$ e em $x = 3$.

Para conhecer os sinais da derivada f' devemos multiplicar os sinais dos fatores $(x - \frac{5}{3})$, $(x+1)^{\frac{1}{3}}$ e $(x-3)^{\frac{2}{3}}$. Observe a tabela a seguir:

	$(x - \frac{5}{3})$	$(x+1)^{\frac{1}{3}}$	$(x-3)^{\frac{2}{3}}$	$f'(x)$
$x < -1$	—	—	+	+
$-1 < x < \frac{5}{3}$	—	+	+	—
$\frac{5}{3} < x < 3$	+	+	+	+
$x > 3$	+	+	+	+

Concluimos que $f(x)$ é crescente em $(-\infty, -1) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$ e decrescente no intervalo $(-1, \frac{5}{3})$.

Para estudar a concavidade, vamos derivar novamente a função:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{x - \frac{5}{3}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}} \right)' \\
&= \frac{1 \cdot (x+1)^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}} - (x - \frac{5}{3}) \left(\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-3)^{-\frac{1}{3}} \right)}{(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}} - (x - \frac{5}{3}) \left(\frac{1}{3} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{\frac{1}{3}} \right)}{(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{-32/9}{(x+1)^{\frac{4}{3}}(x-3)^{\frac{5}{3}}}
\end{aligned}$$

O estudo dos sinais de $f''(x)$ resulta em:

	$-\frac{32}{9}$	$(x+1)^{\frac{4}{3}}$	$(x-3)^{\frac{5}{3}}$	$f''(x)$
$x < -1$	—	+	—	+
$-1 < x < 3$	—	+	—	+
$x > 3$	—	+	+	—



O resultado é que a concavidade é para cima para $x < 3$ e para baixo para $x > 3$.

Os limites infinitos são

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{1}{3}} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{1}{3}} = \infty.$$

A figura 14.12 mostra o gráfico da função. Observe o ponto de inflexão $B = (3, 0)$ e o ponto de mínimo $C = (\frac{5}{3}, f(\frac{5}{3}))$.

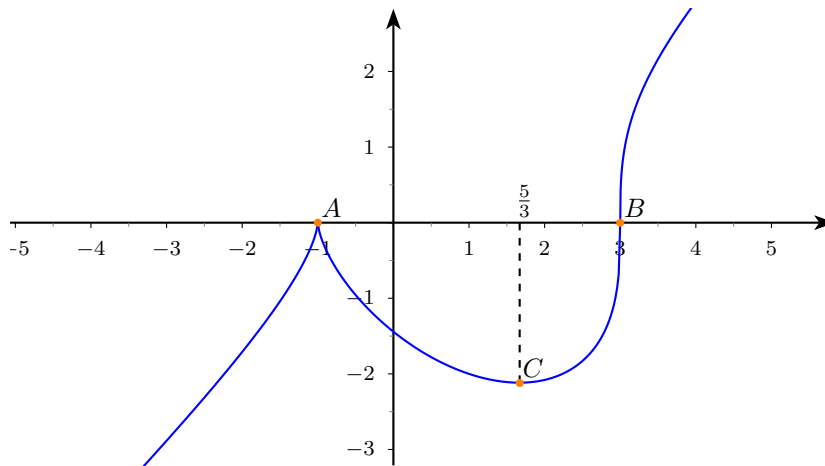


Figura 14.12: Gráfico da função $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{1}{3}}$

Mostre que $\tan x > x$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

EXEMPLO 17

Seja $f(x) = \tan x - x$. Queremos mostrar que $f(x) > 0$ em $(0, \frac{\pi}{2})$. Temos que $f(0) = \tan 0 - 0 = 0$. Basta então mostrar que $f(x)$ é crescente em $(0, \frac{\pi}{2})$.

Mas

$$f'(x) = (\tan x - x)' = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x > 0 \quad \text{para } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$



Exercícios

Para cada uma das funções dos itens 1 a 4, encontre os intervalos em que ela é crescente e decrescente.

1. $f(x) = x^3 - 5x + 4$.

2. $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 24x^2 - 7$.

3. $f(x) = (1 - x)^2(1 + x)^3$.

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \geq -1 \\ 2x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$.

5. $f(x) = x + \cos x$.

6. Mostre que a composta de duas funções crescentes é uma função crescente e que a composta de duas funções decrescentes também é uma função crescente. Dê um exemplo de cada caso.

Use o teste da derivada primeira ou o teste da derivada segunda para encontrar os mínimos e máximos relativos das seguintes funções.

7. $f(x) = x^5 - 5x$.

8. $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$ em $(-\infty, 1)$.

9. $f(x) = x + 1/x$.

10. $f(x) = x\sqrt{x + 1}$.

Encontre os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente e estude a concavidade da função. Faça um esboço do gráfico.

11. $f(x) = x^3 - x$.

12. $f(x) = x^3 + 2x^2$.

13. $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 12$.

14. $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$.

15. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}$.
16. $f(x) = \frac{x}{x+2}$.
17. $f(x) = 2\cos(x) - \cos(2x)$.
18. Esboce gráfico de uma função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $f(0) = f(3) = 0$; $f'(x) > 0$ para $x \in (0, 2)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$; $f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$ e $f''(x) > 0$ para $x \in (3, \infty)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$; f não é derivável em $x = 0$ e em $x = 3$.
19. Esboce gráfico de uma função contínua $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{3\}$; $f''(x) < 0$ para $x < 3$ e $f''(x) > 0$ para $x > 3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty$.
20. Seja f uma função derivável no intervalo aberto I . Suponha que f tenha concavidade para cima em I . Mostre que para quaisquer $a, b \in I$, vale que

$$f(ta + (1-t)b) < tf(a) + (1-t)f(b), \text{ para todo } t \in (0, 1).$$

Interprete geometricamente o resultado acima.



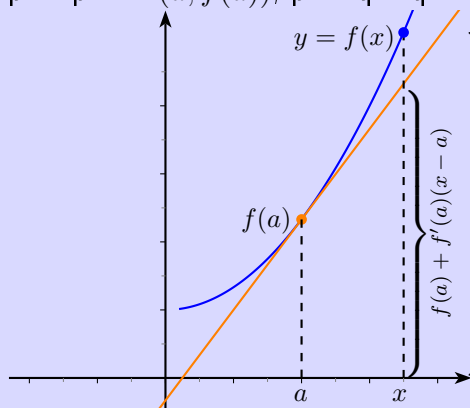
14.4 Textos Complementares

Para Saber Mais

Prova do Teste da concavidade.

Iremos provar o item (a) da Proposição 11. O caso (b) é análogo.

Seja f uma função duas vezes derivável em um intervalo I tal que $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$. Queremos provar que o gráfico de f tem concavidade para cima, o que é o mesmo que dizer que $f(x)$ está acima da reta tangente passando pelo ponto $(a, f(a))$, para qualquer $a \in I$.



Portanto, dado $a \in I$, devemos provar que

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) ,$$

para todo $x \in I, x \neq a$. Vamos fazer isso usando o Teorema do valor médio.

Vamos primeiro lidar com o caso $x > a$. Aplicando o Teorema do valor médio no intervalo $[a, x]$, temos que existe um $c \in (a, x)$ tal que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) . \quad (14.1)$$

Como $f''(x) > 0$ em I então $f'(x)$ é uma função crescente e, portanto $f'(a) < f'(c)$. Multiplicando essa equação pelo fator positivo $(x - a)$, resulta:

$$\begin{aligned} f'(c) > f'(a) &\implies f'(c)(x - a) > f'(a)(x - a) \\ &\implies f(a) + f'(c)(x - a) > f(a) + f'(a)(x - a) . \end{aligned}$$

Mas, pela equação 14.1, $f(x) = f(a) + f'(c)(x - a)$, logo

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

o que mostra que a curva está acima da tangente em $(a, f(a))$ para $x > a$.

O caso $x < a$ é análogo. Existe $c \in (x, a)$ tal que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ e $f'(c) < f'(a)$ já que f' é crescente. Multiplicando pelo fator negativo $(x - a)$ inverte-se o sinal da desigualdade e

$$f'(c) < f'(a) \implies f'(c)(x - a) > f'(a)(x - a) \implies f(x) - f(a) > f'(a)(x - a)$$

o que mostra que $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$.



15

TRAÇADO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO; OTIMIZAÇÃO

Sumário

15.1 Traçado do gráfico de uma função	2
15.2 Problemas de otimização	15

15.1 Traçado do gráfico de uma função

Estudamos até agora vários conceitos e métodos que dizem respeito a aspectos do comportamento de uma função e que podem ser utilizados para o esboço de seu gráfico. Nesta seção iremos sistematizar o uso destas ferramentas e utilizá-las em vários exemplos.

O seguinte roteiro reúne o que se deve conhecer de cada função para a qual queremos traçar o gráfico:

- (i) domínio e continuidade da função;
- (ii) assíntotas verticais e horizontais;
- (iii) derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento;
- (iv) valores de máximo e mínimo locais;
- (v) concavidade e pontos de inflexão;
- (vi) esboço do gráfico.

É importante notar que nem todo item é relevante para toda função. Por exemplo, uma função pode não ter assíntotas. Por outro lado, para o esboço final do gráfico pode ser interessante também determinar os pontos de interseção do gráfico da função com os eixos coordenados.

No caso de haver assíntotas verticais ou horizontais, para melhor compreensão do gráfico da função, é interessante desenhar as retas assintotas no gráfico. Lembramos que uma função contínua f tem assíntota vertical na reta $x = a$ se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

e que uma função contínua f tem assíntota horizontal na reta $y = b$ se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Faremos agora exemplos do esboço de gráfico de função, seguindo o roteiro acima.



Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

EXEMPLO 1

(i) Domínio e continuidade de f .

A função f está definida e é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Assíntotas verticais e horizontais.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = 0.$$

Logo, $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

(iii) Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

A derivada da função é:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Como $(x^2 + 1)^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos considerar apenas os sinais de $1 - x^2$.

intervalo	$1 - x^2$	sinal de f'	f
$x < -1$	—	—	decrescente
$-1 < x < 1$	+	+	crescente
$x > 1$	—	—	decrescente

Portanto,

f é decrescente em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ e f é crescente em $(-1, 1)$.

(iv) Valores de máximo e mínimo locais.

Os pontos críticos de f são:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

Observando os sinais de f' , pelos teste da derivada primeira resulta que

f tem mínimo local em $x = -1$ e f tem máximo local em $x = 1$.

(v) Concavidade e pontos de inflexão.

Derivando novamente a função:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \right)' = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\
 &= \frac{2x(x^2+1)(-(x^2+1) - 2(1-x^2))}{(x^2+1)^4} \\
 &= \frac{2x(x^2+1)(x^2-3)}{(x^2+1)^4} \\
 &= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.
 \end{aligned}$$

Como $(x^2+1)^3$ é sempre positivo, podemos considerar apenas o sinal de $2x(x^2-3)$. As raízes de x^2-3 são $x = \pm\sqrt{3}$. O estudo de sinais está no quadro a seguir:

intervalo	$2x$	x^2-3	sinal de f''	concavidade
$x < -\sqrt{3}$	-	+	-	para baixo
$-\sqrt{3} < x < 0$	-	-	+	para cima
$0 < x < \sqrt{3}$	+	-	-	para baixo
$x > \sqrt{3}$	+	+	+	para cima

Com relação aos pontos de inflexão, há três mudanças de concavidade no domínio da função. os pontos $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ e $x = \sqrt{3}$ são todos pontos de inflexão do gráfico de f .

(vi) Esboço do gráfico.

Usando as informações reunidas nos itens anteriores, esboçamos o gráfico na Figura 15.1. A interseção com o eixo y é o ponto $(0, f(0)) = (0, 0)$. marcamos no gráfico os pontos de máximo e mínimo locais (em azul) e os pontos de inflexão (em vermelho).

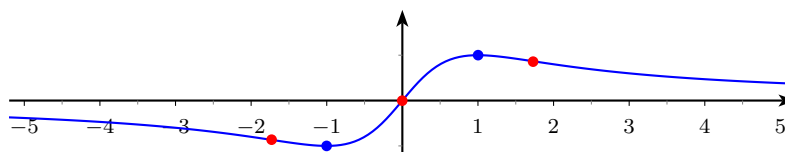


Figura 15.1: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

EXEMPLO 2

(i) Domínio e continuidade de f .

A função f não está definida para $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, portanto o domínio é

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

Esta separação do domínio em três intervalos é interessante porque teremos que investigar o comportamento da função quando x se aproxima dos extremos destes intervalos.

(ii) Assíntotas verticais e horizontais.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = 0.$$

Logo, $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

Como $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 1 = 0$, mas $x^2 - 1 > 0$ se $x < -1$ e $x^2 - 1 < 0$ se $-1 < x < 1$ então

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \infty.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$, mas $x^2 - 1 > 0$ se $x > 1$ e $x^2 - 1 < 0$ se $-1 < x < 1$ então

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \infty.$$

Portanto, o gráfico de f tem assíntotas verticais em $x = -1$ e em $x = 1$ e assíntota horizontal em $y = 0$. A informação sobre os limites infinitos e limites no infinito permite fazer o esboço prévio da Figura 15.2.



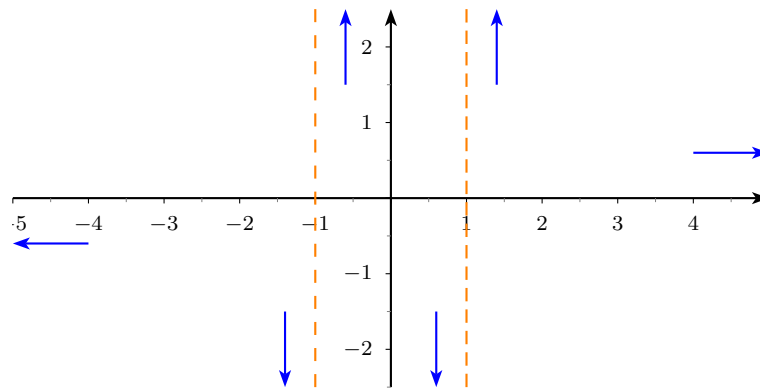


Figura 15.2

- (iii) Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

A derivada da função é:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^2 - 1) - x(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-(1 + x^2)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Como $(x^2 - 1)^2 > 0$ para todo $x \neq \pm 1$ e $-(1 + x^2) < 0$ para todo x , temos que $f'(x) < 0$ em todo seu domínio. A função é sempre decrescente.

- (iv) Valores de máximo e mínimo local.

A função f é derivável em todo seu domínio e a derivada $f'(x) = -\frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}$ nunca se anula, logo não há máximos ou mínimos locais.

- (v) Concavidade e pontos de inflexão.

Derivando f' :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-(1 + x^2)}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \frac{-2x(x^2 - 1)^2 + (x^2 + 1) \cdot 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2 - 1)(x^2 - 1 - 2(x^2 + 1))}{(x^2 - 1)^4} \\ &= \frac{2x(x^2 - 1)(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^4}. \end{aligned}$$

Como $x^2 + 3$ e $(x^2 - 1)^4$ são sempre positivos (para $x \neq \pm 1$), então podemos considerar apenas os sinais de $2x(x^2 - 1)$. O estudo de sinais está no quadro a seguir:

intervalo	$2x$	$x^2 - 1$	sinal de f''	concavidade
$x < -1$	-	+	-	para baixo
$-1 < x < 0$	-	-	+	para cima
$0 < x < 1$	+	-	-	para baixo
$x > 1$	+	+	+	para cima

Com relação aos pontos de inflexão, há várias mudanças de concavidade, mas $x = -1$ e $x = 1$ não estão no domínio da função. O ponto $x = 0$ está no domínio de f e a concavidade muda em $x = 0$, logo f tem ponto de inflexão em $x = 0$.

(vi) Esboço do gráfico.

Usando as informações reunidas nos itens anteriores, esboçamos o gráfico na Figura 15.3. A interseção com o eixo y é o ponto $(0, f(0)) = (0, 0)$ que é também ponto de inflexão da função.

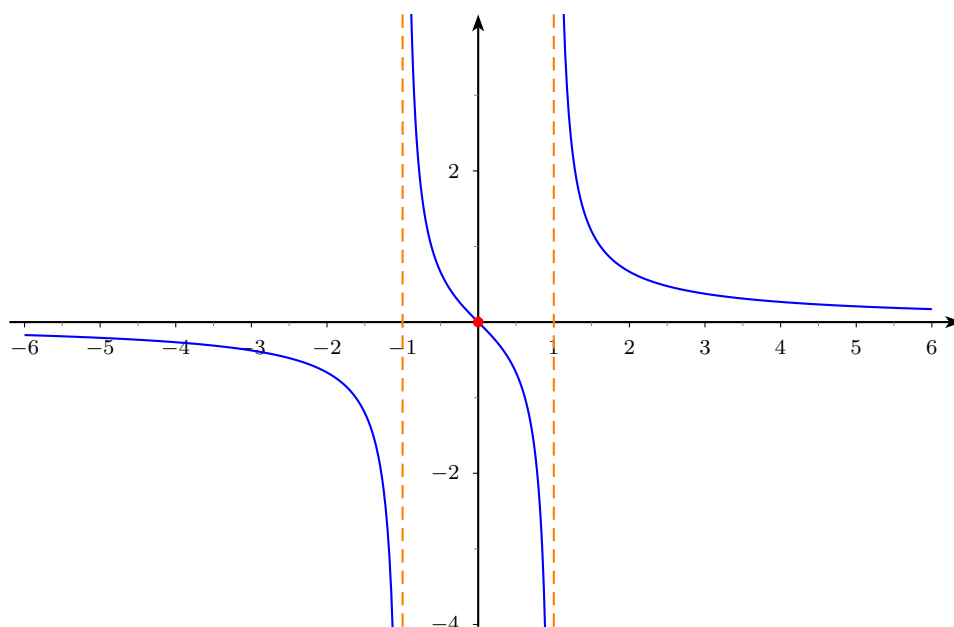


Figura 15.3: $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

EXEMPLO 3

Esboce o gráfico da função

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}.$$

(i) Domínio e continuidade de f .A função f está definida e é contínua em \mathbb{R} .

(ii) Assíntotas verticais e horizontais.

f é contínua então não possui assíntotas verticais. Para encontrar os limites no infinito, observamos que $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{1}{3}}(1 + x)$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} = \infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x) = \infty &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}}(1 + x) = \infty. \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{\frac{1}{3}} = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x) = -\infty &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{\frac{1}{3}}(1 + x) = \infty. \end{aligned}$$

Portanto, o gráfico de f não possui assíntotas horizontais.

(iii) Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

Temos que $(x^{\frac{4}{3}})' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$, logo $x^{\frac{4}{3}}$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas $(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, o que mostra que $x^{\frac{1}{3}}$ não é derivável em $x = 0$. Portanto $f(x)$ não é derivável em $x = 0$ e para $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} \left(4 + \frac{1}{x} \right).$$

Para o estudo de sinais de f' observe que $x^{\frac{1}{3}} > 0$ se $x > 0$ e $x^{\frac{1}{3}} < 0$ se $x < 0$. Quanto aos sinais de $4 + \frac{1}{x}$, temos que $4 + \frac{1}{x} = \frac{4x+1}{x}$. O numerador muda de sinal em $x = -\frac{1}{4}$ e o denominador em $x = 0$.

O estudo de sinais de $f'(x)$ está representado no quadro a seguir:

intervalo	$x^{\frac{1}{3}}$	$4x + 1$	x	sinal de f'	f
$x < -\frac{1}{4}$	—	—	—	—	decrescente
$-\frac{1}{4} < x < 0$	—	+	—	+	crescente
$x > 0$	+	+	+	+	crescente

Vemos que f é decrescente em $(-\infty, -\frac{1}{4})$ e crescente em $(-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, \infty)$.

(iv) Valores de máximo e mínimo locais.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} \left(4 + \frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{4}.$$

Mas f não é derivável em $x = 0$, logo f' se anula apenas em $x = -\frac{1}{4}$. O teste da derivada primeira (ver quadro anterior quanto aos sinais de f') mostra que f tem mínimo local em $x = -\frac{1}{4}$ e não tem nem máximo nem mínimo local no ponto crítico $x = 0$.

(v) Concavidade e pontos de inflexão.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} \left(4 + \frac{1}{x}\right) \right)' = \frac{1}{9}x^{-\frac{2}{3}} \left(4 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \\ &= \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Como $x^{-\frac{2}{3}} > 0$ para todo $x \neq 0$ então o sinal de f'' é o sinal de $2 - \frac{1}{x}$. Quanto aos sinais de $2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$:

intervalo	$2x - 1$	x	sinal de f''	concavidade
$x < 0$	—	—	+	para cima
$0 < x < \frac{1}{2}$	—	+	—	para baixo
$x > \frac{1}{2}$	+	+	+	para cima

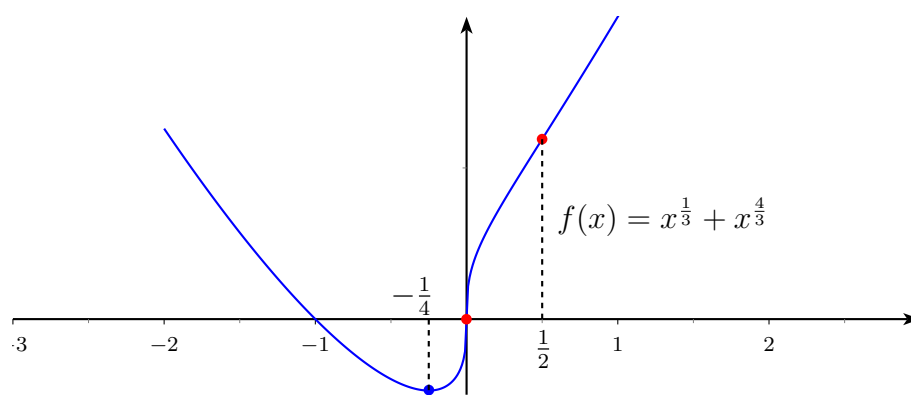
Portanto, a função tem concavidade para cima em $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ e concavidade para baixo em $(0, \frac{1}{2})$.

Há uma mudança de concavidade em $x = \frac{1}{2}$ e em $x = 0$ que são, portanto, os pontos de inflexão.

(vi) Esboço do gráfico.

Usando as informações reunidas nos itens anteriores, esboçamos o gráfico na Figura 15.4. O gráfico de f corta o eixo y no ponto $(0, 0)$ e corta o eixo x em $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1+x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -1$. Representamos no gráfico o ponto de mínimo em azul e os pontos de inflexão em vermelho.



Figura 15.4: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}$

EXEMPLO 4

Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \sin 2x + 2 \cos x .$$

(i) Domínio e continuidade de f .

A função f está definida e é contínua em \mathbb{R} . É interessante notar também que a função é *periódica* com período igual a 2π .

(ii) Assíntotas verticais e horizontais.

A função não possui assíntotas horizontais ou verticais. Não existem os limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin 2x + 2 \cos x \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin 2x + 2 \cos x .$$

A função repete indefinidamente o padrão que possui entre 0 e 2π .

(iii) Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

A função é derivável em todo ponto e

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin 2x + 2 \cos x)' = 2 \cos 2x - 2 \sin x \\ &= 2(1 - 2 \sin^2 x) - 2 \sin x = -2(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) , \end{aligned}$$

em que usamos a relação trigonométrica $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$.

Para o estudo de sinais, dada a periodicidade da função, vamos nos restringir ao intervalo $(0, 2\pi)$.

Temos que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x + 1 = 0 \text{ ou } 2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2}$$

Mas $\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, os pontos críticos são os pontos $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$.

$\sin x + 1 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $2\sin x - 1$ será positiva para

$$\sin x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}.$$

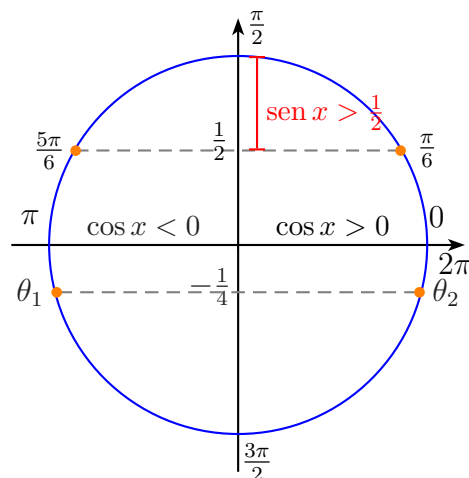


Figura 15.5

Reunindo as informações sobre os sinais de $f'(x) = -2(\sin x + 1)(2\sin x - 1)$:

intervalo	$-2(\sin x + 1)$	$2\sin x - 1$	signal de f'	f
$0 < x < \frac{\pi}{6}$	—	—	+	crescente
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$	—	+	—	decrecente
$\frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$	—	—	+	crescente
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	—	—	+	crescente

(iv) Valores de máximo e mínimo locais.

Pelo teste da derivada primeira, olhando o quadro acima, concluímos que $x = \frac{\pi}{6}$ é máximo local, $x = \frac{5\pi}{6}$ é mínimo local e $x = \frac{3\pi}{2}$ não é máximo nem mínimo local.

(v) Concauidade e pontos de inflexão. Derivando novamente a função, obtemos:

$$f''(x) = (2 \cos 2x - 2 \sin x)' = -4 \sin 2x - 2 \cos x = -2 \cos x (4 \sin x + 1).$$

Para o estudo dos sinais, observe que $\cos x > 0$ em $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ e $\cos x < 0$ em $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Com relação ao fator $4 \sin x + 1$, há dois valores θ_1, θ_2 no intervalo $(0, 2\pi)$ cujo seno é $-\frac{1}{4}$ (Observe a figura 15.5). Segue que $4 \sin x + 1 > 0 \Rightarrow \sin x > -\frac{1}{4}$ ocorre para $x \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi)$ e $4 \sin x + 1 < 0 \Rightarrow \sin x < -\frac{1}{4}$ para $x \in (\theta_1, \theta_2)$.

Portanto,

intervalo	$-2 \cos x$	$4 \sin x + 1$	sinal de f''	concauidade
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	—	+	—	para baixo
$\frac{\pi}{2} < x < \theta_1$	+	+	+	para cima
$\theta_1 < x < \frac{3\pi}{2}$	+	—	—	para baixo
$\frac{3\pi}{2} < x < \theta_2$	—	—	+	para cima
$\theta_2 < x < 2\pi$	—	+	—	para baixo

Há mudança de concauidade nos pontos $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \theta_1$, $x = \frac{3\pi}{2}$ e $x = \theta_2$, que são os pontos de inflexão.

(vi) Esboço do gráfico.

Basta fazer os esboço no intervalo $[0, 2\pi]$ e usar o fato de que a função $f(x) = \sin 2x + 2 \cos x$ é periódica de período 2π , ou seja, basta fazer a translação do gráfico de um valor 2π , à direita e à esquerda, indefinidamente.

Temos que $f(0) = f(2\pi) = 2$, $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6$, $f(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2,6$ e $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{3\pi}{2}) = 0$.



Segue o esboço do gráfico. Os pontos de máximo e mínimo locais no intervalo $(0, 2\pi)$ estão marcados em azul e os pontos de inflexão no mesmo intervalo estão marcados em vermelho.

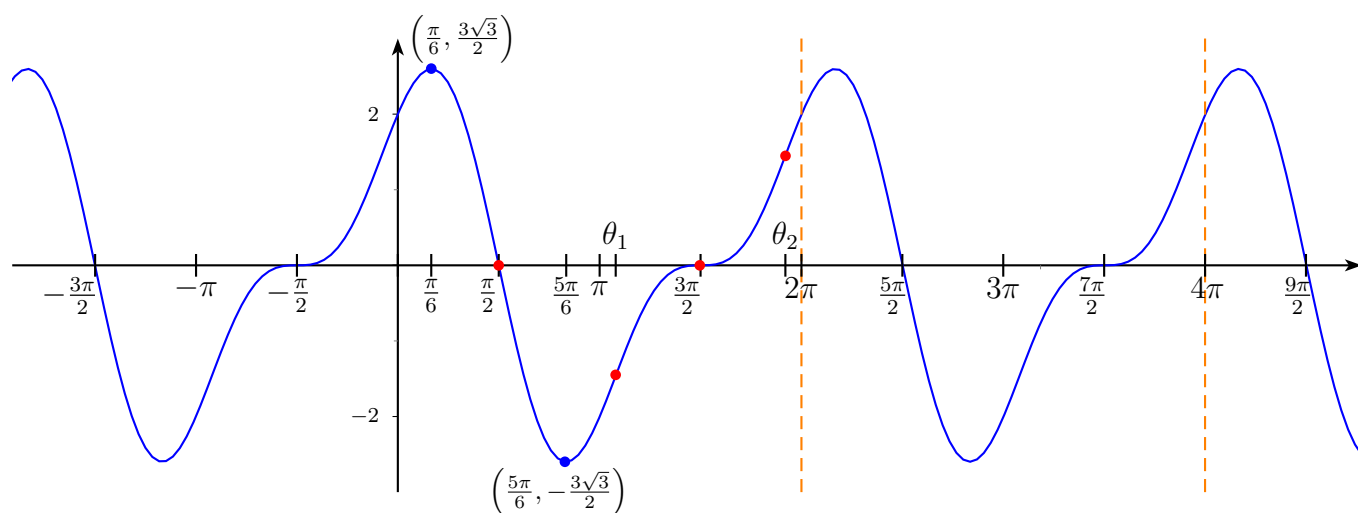


Figura 15.6: $f(x) = \text{sen } 2x + 2 \cos x$

Exercícios

Para cada uma das funções a seguir:

- (a) Encontre as assíntotas horizontais e verticais;
- (b) Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento;
- (c) Encontre os pontos de máximo e mínimo locais;
- (d) Encontre os intervalos de concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão;
- (e) Esboce o gráfico da função.

1. $f(x) = x^3 - x^2$.

2. $f(x) = x^4 - 2x^3$.

3. $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

4. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

5. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

6. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

7. $f(x) = (x^2+1)^3$.

8. $f(x) = (x^2-1)^3$.

9. $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}} - x$.

10. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$.

11. $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$.

12. $f(x) = x - 2\operatorname{sen}(x)$.



15.2 Problemas de otimização

Uma das aplicações mais comuns do Cálculo são os problemas de otimização. Tratam-se de problemas que são modelados por uma função e buscamos obter os valores de máximo ou mínimo da função.

Nesta seção, daremos vários exemplos de problemas de otimização, em várias áreas do conhecimento, mostrando como o Cálculo pode ser aplicado nos mais diversos campos do conhecimento humano.

Para resolver um problema de otimização, usamos em geral o seguinte roteiro aproximado:

- (i) Identificamos as variáveis do problema, isto é, quais grandezas representam a situação descrita no problema. O desenho de gráficos e diagramas pode ser útil para isso.
- (ii) Identificamos os intervalos de valores possíveis para as variáveis. São os valores para os quais o problema tem sentido físico.
- (iii) Descrevemos as relações entre estas variáveis por meio de uma ou mais equações. Em geral, uma destas equações dará a grandeza que queremos *otimizar*, isto é encontrar seu máximo ou mínimo. Se há mais de uma variável no problema, substituindo uma ou mais equações naquela principal permitirá descrever a grandeza que queremos otimizar em função de uma só variável.
- (iv) Usando a primeira e segunda derivada da função que queremos otimizar, encontramos seus pontos críticos e determinamos aquele(s) que resolve(m) o problema. Neste ponto é importante estar atento para o fato de que alguns dos pontos críticos da função podem estar fora do intervalo de valores possíveis para a variável (item ii) e devem ser desprezados.

Vimos um primeiro problema de otimização: o Exemplo 6 da Unidade 8, que reproduzimos aqui.

EXEMPLO 5

Uma caixa retangular aberta deve ser fabricada com uma folha de papelão de 15×30 cm, recortando quadrados nos quatro cantos e depois dobrando a folha nas linhas determinadas pelos cortes. Existe alguma medida do corte que produza uma caixa com volume máximo?

Seja x o lado do quadrado que é cortado nos cantos da caixa. Veja a figura 15.7.

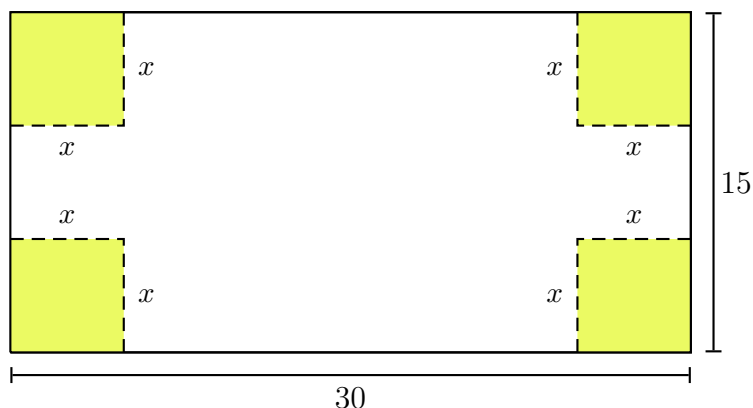


Figura 15.7

A caixa terá como base um retângulo de lados $30 - 2x$ e $15 - 2x$ e altura x . Seu volume é dado por

$$V(x) = x(30 - 2x)(15 - 2x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x ,$$

observando que devemos ter $0 < x < \frac{15}{2}$ para que seja possível fazer o corte do retângulo.

Derivando, temos:

$$V'(x) = 12x^2 - 180x + 450 \quad \text{e} \quad V''(x) = 24x - 180 .$$

Os pontos críticos de $V(x)$ são $V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 180x + 450 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm 5\sqrt{3}}{2}$. São dois pontos críticos: $x_1 = \frac{15+5\sqrt{3}}{2} \approx 11,8$ e $x_2 = \frac{15-5\sqrt{3}}{2} \approx 3,2$. O primeiro valor deve ser desprezado por estar fora do intervalo $(0, \frac{15}{2})$.

Usando o teste da derivada segunda no ponto crítico x_2 , temos

$$V''(x_2) = 24x_2 - 180 \approx -103,9 < 0 ,$$

o que mostra que o ponto é de máximo.

Portanto, obteremos uma caixa de volume máximo para um corte quadrado de lado $x_2 = \frac{15-5\sqrt{3}}{2} \approx 3,2$.

Encontre dois números não negativos cuja soma é 30 e tal que o produto de um dos números e o quadrado do outro é máximo.

EXEMPLO 6

Sejam x e y os números. Então $x + y = 30$ e queremos maximizar $P = xy^2$. Devemos ter $0 < x, y < 30$ para que os números sejam não negativos.

Escrevendo $y = 30 - x$, obtemos $P(x) = x(30 - x)^2 = x^3 - 60x^2 + 900x$.

As derivadas de $P(x)$ são

$$P'(x) = 3x^2 - 120x + 900 \quad \text{e} \quad P''(x) = 6x - 120.$$

Os pontos críticos são

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 120x + 900 = 0 \Rightarrow x = 10 \quad \text{ou} \quad x = 30.$$

Como a solução $x = 30$ deve ser desprezada, resta $x = 10$. Usando o teste da derivada segunda, $P''(10) = 6 \cdot 10 - 120 = -60 < 0$, mostra que $P = xy^2$ é máximo para $x = 10$.

Um reservatório de água tem o formato de um cilindro sem a tampa superior e tem uma superfície total de $36\pi \text{ m}^2$. Encontre os valores da altura h e raio da base r que maximizam a capacidade do reservatório.

EXEMPLO 7

O volume de um cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura. Logo, $V = \pi r^2 h$. A superfície lateral do cilindro é $S = 2\pi r h$ e a área da base é πr^2 , logo

$$2\pi r h + \pi r^2 = 36\pi \Rightarrow h = \frac{36 - r^2}{2r},$$

o que resulta em

$$V = V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{36 - r^2}{2r} = \frac{\pi r(36 - r^2)}{2}.$$

Derivando $V(r)$, obtemos:

$$V'(r) = \frac{3\pi}{2}(12 - r^2) \quad \text{e} \quad V''(r) = -3\pi r.$$



Os pontos críticos de V são

$$V'(r) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{2}(12 - r^2) = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{ou} \quad r = 2\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad r = -2\sqrt{3}.$$

Como somente valores positivos de r fazem sentido para o problema, nosso único candidato a solução é $r = 2\sqrt{3}$. Como $V''(r) < 0$ para $r > 0$, o teste da derivada segunda mostra que o volume é máximo para $r = 2\sqrt{3}$.

EXEMPLO 8

Encontre o ponto (x, y) do gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ mais próximo do ponto $(2, 0)$.

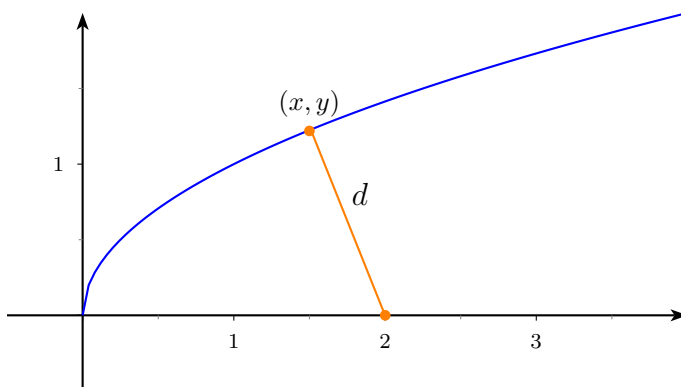


Figura 15.8

A distância d entre o ponto (x, y) do gráfico de $y = \sqrt{x}$ e o ponto $(2, 0)$ é

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4},$$

em que substituímos $y = \sqrt{x}$ na equação. Devemos ter $x > 0$ para que o ponto (x, y) esteja no gráfico de $y = \sqrt{x}$.

Derivando a função $d = d(x)$, obtemos:

$$d'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}} \quad \text{e} \quad d''(x) = \frac{7}{4(x^2-3x+4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Há apenas um ponto crítico:

$$d'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2},$$

e, como $x^2 - 3x + 4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $d''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e o teste da derivada segunda mostra que $x = \frac{3}{2}$ é ponto de mínimo.

Uma fazenda produz laranjas e ocupa uma certa área com 50 laranjeiras. Cada laranjeira produz 600 laranjas por ano. Verificou-se que para cada nova laranjeira plantada nesta área a produção por árvore diminui de 10 laranjas. Quantas laranjas devem ser plantadas no pomar de forma a maximizar a produção?

EXEMPLO 9

Para x novas árvores plantadas, o número total de árvores passa a ser $50 + x$, mas a produção individual passa a ser de $600 - 10x$ laranjas por árvore, totalizando uma produção de $P(x) = (50 + x)(600 - 10x) = 30000 + 100x - 10x^2$ laranjas por ano na fazenda.

Devemos ter $x > 0$ (não se pode plantar um número negativo de árvores) e, como a produção não pode ser negativa, devemos ter $600 - 10x > 0 \Rightarrow x < 60$.

Derivando $P(x)$, obtemos:

$$P'(x) = 100 - 20x \quad \text{e} \quad P''(x) = -20 .$$

Portanto, há um ponto crítico em $100 - 20x = 0 \Rightarrow x = 5$. Este ponto será de máximo, pois $P''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, deve-se plantar 5 novas árvores para maximizar a produção.



Exercícios

1. Divida o número 200 em duas partes de forma que o produto das partes seja máximo.
2. Se $xy = 48$, encontre o valor mínimo de $x + y^3$ para x e y positivos.
3. Encontre o ponto do gráfico de $f(x) = x^2$ mais próximo de $(0, 2)$.
4. Encontre o ponto no eixo OX que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos pontos $(0, 1)$ e $(3, 4)$.
5. Prove que o retângulo de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio fixado é um quadrado.
6. Um carro B se encontra 30 km a leste de um carro A . Ao mesmo tempo, o carro A começa a se mover para o norte com uma velocidade de 60 km/h e o carro B para oeste com uma velocidade de 40 km/h. Encontre a distância mínima entre os carros.

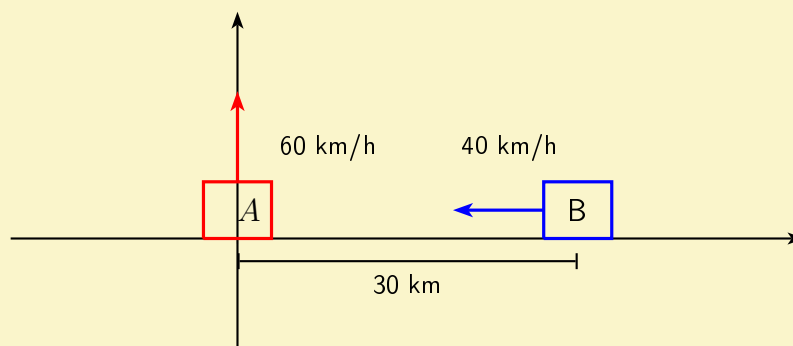


Figura 15.9

7. Uma lata cilíndrica deve ter a capacidade de $50\pi \text{ cm}^3$. O material do topo e base da caixa custa R\$ 25,00 por m^2 , enquanto que o material com o qual os lados são feitos custa R\$ 20,00 por m^2 . Encontre o raio da base e a altura da lata que minimiza o custo da lata.
8. Encontre as dimensões do cone de máximo volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio 1.

9. Seja um triângulo isósceles cujos lados iguais têm uma medida fixada. Qual ângulo entre estes lados resulta em um triângulo de área máxima.

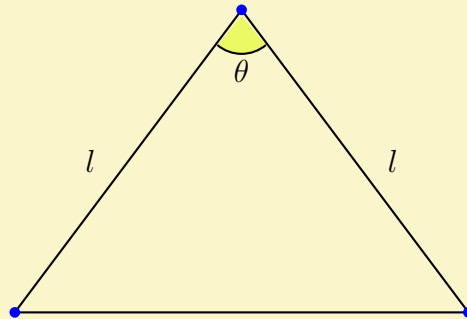


Figura 15.10

10. O material para a base de uma caixa retangular com tampa aberta e base quadrada custa R\$ 0,30 por cm^2 , enquanto que o material para as faces custa R\$ 0,20 por cm^2 . Encontre as dimensões para a caixa de maior volume que pode ser feita com R\$ 100,00.
11. Uma pessoa sai de um ponto A na margem de um rio de 1 km de largura. Ela deve atravessar o rio de canoa e então chegar o mais rápido possível até um ponto B situado a 2 km de distância pela margem do rio. Se ela consegue remar a canoa a 6km/h e correr a 9km/h, a que distância de B ele deve terminar a travessia de canoa?

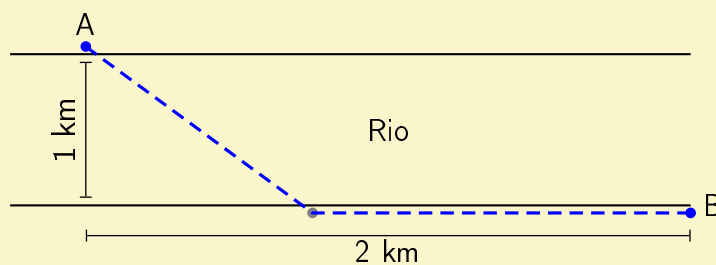


Figura 15.11

12. Em um cinema a tela tem 4 metros de altura e está posicionada 2 metros acima da linha horizontal que passa pelos seus olhos. A que distância da parede deve se situar uma pessoa para que seu ângulo de visão seja máximo? Observe a figura a seguir.

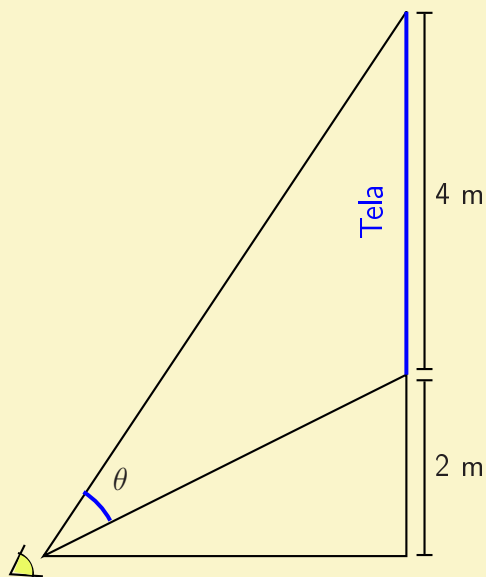


Figura 15.12

16

REGRA DE L'HÔPITAL; APROXIMAÇÕES POR POLINÔMIOS

Sumário

16.1	Introdução	2
16.2	Regra de L'Hôpital	3
16.3	Exercícios	11
16.4	Aproximações por polinômios	12
16.5	Exercícios	18
16.6	Textos complementares	19

16.1 Introdução

Alguns limites do tipo $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ são bem determinados a partir dos valores de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e de $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Por exemplo, com as propriedades de limites que estudamos até o momento, sabemos que se $L, M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M, \quad \text{então} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Alguns limites de quocientes de funções cujos limites são iguais a 0 ou $\pm\infty$ também são determinados. Por exemplo, para $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \quad \text{então} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

E se $f(x)$ é limitada,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

No entanto, alguns limites de quocientes de funções não podem ser determinados apenas com o conhecimento do limites de cada função. Veja o exemplo a seguir:

EXEMPLO 1

Sejam $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ e $h(x) = 2x^2$ então:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0.$$

Mas observe os seguintes limites de quocientes destas funções:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^4} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$



Dizemos que o limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ para funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ é uma *forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$*

DEFINIÇÃO 2

Portanto, se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ não há como dizer o valor de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ somente sabendo-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. O limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ pode ser um valor real qualquer ou pode não existir, como mostrou o exemplo anterior.

Há outras formas indeterminadas além de $\frac{0}{0}$:

$$0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty \quad \text{e} \quad \infty^0.$$

A *Regra de L'Hôpital* é um método para solução de formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. As outras formas indeterminadas podem ser transformadas em indeterminações do $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ por meio de transformações algébricas simples, como veremos nos exemplos.

 Para Saber Mais - O Marquês de L'Hôpital - Clique para ler

16.2 Regra de L'Hôpital

Enunciaremos a seguir a Regra de L'Hôpital e faremos alguns exemplos.

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I , exceto possivelmente em um ponto $a \in I$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou é $\pm\infty$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

O mesmo vale se a for substituído por a^+ , a^- , ∞ e $-\infty$, ou seja, o mesmo vale para limites laterais e limites no infinito. No caso de limites no infinito o intervalo I deve ser do tipo (b, ∞) para $x \rightarrow \infty$ e do tipo $(-\infty, b)$ para $x \rightarrow -\infty$.

TEOREMA 3
REGRA DE L'HÔPITAL

Antes de demonstrar o teorema, vejamos alguns exemplos iniciais.

EXEMPLO 4

Usando a Regra de L'Hôpital, calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Na Unidade 5 calculamos este limite diretamente. Como $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, então o limite é uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Usando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Apesar de parecer muito mais simples, este desenvolvimento não serve para demonstrar o limite fundamental, uma vez que para calcular a derivada de $\sin x$ é necessário utilizar este limite.

EXEMPLO 5

Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3}$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 2 = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + x - 3 = 0$, o limite pedido é do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)'}{(2x^2 + x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{4x + 1} = \frac{3}{5}.$$

Este último limite poderia também ter sido calculado diretamente fatorando numerador e denominador e cancelando o termo comum.

EXEMPLO 6

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, o limite é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}.$$

Mas $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0$, logo caímos em outra forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital uma segunda vez, resulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6},$$



em que usamos o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Para provar A Regra de L'Hôpital, precisaremos do seguinte resultado, que estende o Teorema do valor médio.

Sejam f e g funções contínuas em um intervalo $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) . Se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

TEOREMA 7
TEOREMA DO VALOR
MÉDIO DE CAUCHY

O Teorema estende o Teorema do valor médio porque se f segue as condições do teorema acima e fizermos $g(x) = x$, então $g'(x) = 1$ e a conclusão do teorema é exatamente a conclusão do Teorema do valor médio.

Para demonstrar o teorema, inicialmente observe que se $g(b) = g(a)$, então, pelo teorema de Rolle, deve haver $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, o que contraria as hipóteses do teorema. Portanto, $g(b) \neq g(a)$.

Seja agora h a função definida em $[a, b]$ por

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Claramente h é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) (pois f e g o são) e $h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$. Mas

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) \quad \text{e}$$

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$$

Logo, $h(a) = h(b)$. Aplicando o teorema de Rolle à função h concluímos que existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$$

Levando em conta que $g'(c) \neq 0$ por hipótese e que $g(b) - g(a) \neq 0$, resulta que


$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

o que conclui a demonstração.

DEMONSTRAÇÃO



Usando o teorema que acabamos de provar, podemos fazer a demonstração da Regra de L'Hôpital, que você pode encontrar no link a seguir.

 [Para Saber Mais - Demonstração da Regra de L'Hôpital - Clique para ler](#)

Mais alguns exemplos:

EXEMPLO 8

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin px}{\sin qx}$, em que $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \sin px = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \sin qx = 0$, o limite é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin px}{\sin qx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin px)'}{(\sin qx)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p \cos px}{q \cos qx} = \frac{p}{q}.$$

EXEMPLO 9

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{p}{x}\right)}{\sin\left(\frac{q}{x}\right)}$, em que $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se $x \rightarrow \infty$ então $\frac{p}{x} \rightarrow 0$ e $\frac{q}{x} \rightarrow 0$. Por continuidade da função seno, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{p}{x}\right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{q}{x}\right) = 0$. Portanto, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{p}{x}\right)}{\sin\left(\frac{q}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sin\left(\frac{p}{x}\right)\right)'}{\left(\sin\left(\frac{q}{x}\right)\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{p}{x}\right) \left(-\frac{p}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{q}{x}\right) \left(-\frac{q}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p \cos\left(\frac{p}{x}\right)}{q \cos\left(\frac{q}{x}\right)} = \frac{p}{q}$$

Observe que poderíamos transformar o limite do exemplo 9 no limite do exemplo 8, por meio da substituição $t = \frac{1}{x}$.

O cálculo de alguns limites requerem a aplicação da Regra de L'Hôpital várias vezes, como no exemplo seguinte.

EXEMPLO 10

Calcule o $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 2x}{x - \sin x}$.



O limite é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Para resolvê-lo aplicamos a Regra de L'Hôpital três vezes:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 2x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x - 2 \cos 2x}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin x + 4 \sin 2x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \cos x + 8 \cos 2x}{\cos x} \\ &= \frac{-3 + 8}{1} = 5\end{aligned}$$

Algumas vezes uma simples substituição pode tornar o cálculo de um limite muito mais simples, como no exemplo a seguir:

Calcule o limite $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

EXEMPLO 11

Como $x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ e vale que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, estamos diante de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \cos \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \cos 0 = 1$$

Outra possibilidade seria fazer a substituição $t = \frac{1}{x}$ antes de aplicar a Regra de L'Hôpital, lembrando que se $|x| \rightarrow \infty$ então $t \rightarrow 0$.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \operatorname{sen} t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

Indeterminações da forma $\frac{\infty}{\infty}$

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, dizemos que o limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Há uma versão da Regra de L'Hôpital que vale para indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$:



TEOREMA 12

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I , exceto possivelmente em um ponto $a \in I$. Se $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$, $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

O mesmo vale para os limites laterais, para limites no infinito e no caso em que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

A demonstração deste teorema será omitida.

EXEMPLO 13

Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{3x^2 - 2x + 2}$.

Trata-se de uma forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{3x^2 - 2x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{6x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Outras formas indeterminadas

Podemos utilizar a Regra de L'Hôpital para resolver outras indeterminações se transformando-as em indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$ é uma indeterminação da forma $0 \cdot \infty$. Fazendo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

reduzimos aos casos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, o que for mais conveniente para a solução do exercício.

EXEMPLO 14

Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x}$.



Pela continuidade da função tangente, $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan \frac{1}{x} = \tan \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \tan 0 = 0$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x}$ é uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. Uma solução é a seguinte:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \sec^2 \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sec^2 \frac{1}{x} = \sec^2 0 = 1. \end{aligned}$$

Em que transformamos o limite dado em uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$ e aplicamos a Regra de L'Hôpital.

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x)$ é uma indeterminação da forma $\infty - \infty$. Fazendo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

reduzimos ao caso $\frac{0}{0}$.

Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$.

EXEMPLO 15

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, temos uma forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$. Mas

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

que é uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Observe que aplicamos a Regra de L'Hôpital duas vezes no desenvolvimento acima.



A Regra de L'Hôpital também pode ser usada para resolver indeterminações do tipo 0^0 , ∞^0 e 1^∞ , mas para resolvê-las precisamos das funções exponencial e logaritmo, que serão estudadas posteriormente.

16.3 Exercícios

Calcule o valor dos seguintes limites:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + x - 2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x + 2}{x^3 + x - 2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 1}{4x^4 + x - 1}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x^2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x - 2}{\sin^2 x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsen x - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sec x - \tan x).$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos px - \cos qx}{x^2}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2/x)}{3/x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \tan \pi x / 2.$$

16. No estudo de Processamento de sinais digitais utiliza-se uma função chamada *função sinc normalizada*, definida por $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sinc}(x) = 1.$$

17. Seja f derivável em um intervalo aberto I . Mostre que se a derivada de f é contínua em I então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

18. Seja f duas vezes derivável em um intervalo aberto I . Mostre que se f'' é contínua em I então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$



16.4 Aproximações por polinômios

A *Série de Taylor* de uma função fornece uma aproximação da função por meio de polinômios.

A expressão de uma função como soma infinita de monômios é utilizada por matemáticos desde muito antes da invenção do Cálculo. Há evidências de que o matemático indiano Madhava de Sangramagrama (1350–1425) descobriu a série que representa $\sin x$ para resolver problemas de astronomia.

No Séc. XVII, o matemático escocês James Gregory (1638–1675), formulou a expansão em série das funções $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$ e $\arccos x$, publicando esta descoberta em 1667.

Embora Gregory tivesse obtido algumas séries particulares, foi o matemático inglês Brook Taylor (1685–1731) o primeiro a apresentar uma fórmula geral para a construção de séries de potências de funções, publicando o método em seu trabalho *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* de 1715.

Na fórmula de Taylor iremos lidar com a n -ésima derivada de f , denotada $f^{(n)}$. Seja f função definida em um intervalo aberto I . Dizemos que f é n vezes derivável no ponto $a \in I$ se f é $n - 1$ vezes derivável em uma vizinhança de a e $f^{(n-1)}$ é derivável em a .

Denota-se por $f^{(0)}$ a própria função f , ou seja, f é sua derivada de ordem zero.

Polinômios de Taylor

DEFINIÇÃO 16

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida no intervalo aberto I e n vezes derivável em $a \in I$. O *polinômio de Taylor de ordem n de f em a* é o polinômio

$$p(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que as derivadas de ordem $k \leq n$ de $p(x)$ em $x = a$ coincidem com as derivadas de mesma ordem de $f(x)$ em $x = a$

Podemos determinar facilmente os coeficientes do polinômio de Taylor em função das derivadas de f :



Como

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n ,$$

substituindo x por a , temos

$$f(a) = c_0 .$$

Derivando f , obtemos:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} ,$$

o que mostra que

$$c_1 = f'(a) = \frac{f'(a)}{1!} .$$

Se $n > 1$, podemos derivar novamente a série para obter

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + 4 \cdot 3c_4(x-a)^2 + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} ,$$

O que mostra que

$$f''(a) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2!} .$$

Derivando mais uma vez e substituindo $x = a$:

$$f'''(a) = 3 \cdot 2c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{f'''(a)}{3!} .$$

Derivando sucessivamente, obtemos o valor dos coeficientes:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad \text{para } k \leq n .$$

O Teorema de Taylor, que veremos nesta seção, mostra que uma função f n vezes derivável em $x = a$, o polinômio de Taylor $p(x)$ é uma boa aproximação de $f(x)$ próximo a a . Mas o isso quer dizer exatamente?

Seja $r(x) = f(x) - p(x)$, a diferença entre a função e seu polinômio de Taylor em a . Então $r: I \rightarrow \mathbb{R}$ é n vezes diferenciável em a e, como $f(x)$ e $p(x)$ têm as mesmas derivadas de ordem k para $k \leq n$ resulta

$$r(a) = r'(a) = r''(a) = \cdots = r^{(n)}(a) = 0 .$$

A próxima proposição mostra que isto equivale a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.



PROPOSIÇÃO 17

Seja $r: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em $a \in I$. Então $r^{(k)}(a) = 0$ para $0 \leq k \leq n$ se, e somente se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

A demonstração será omitida.

A proposição mostra que a diferença de uma função n vezes derivável em a e seu polinômio de Taylor de ordem n em a não só vai a zero como, por assim dizer, vai a zero "mais rápido" que $(x-a)^n$.

Finalmente, podemos formular o Teorema de Taylor:

TEOREMA 18
TEOREMA DE TAYLOR

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em $a \in I$. A função $r: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x),$$

satisfaz $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Reciprocamente, se $p(x)$ é um polinômio de grau $\leq n$ tal que $r(x) = f(x) - p(x)$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$ então $p(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em a .

DEMONSTRAÇÃO

Como vimos, a função $r(x)$ definida pela diferença de $f(x)$ e o polinômio de Taylor $p(x)$ satisfaz $r^{(k)}(a) = 0$ para $0 \leq k \leq n$. Logo, pela proposição 17, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Reciprocamente, se $r(x) = f(x) - p(x)$ é tal que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$, então, pela proposição 17, as derivadas de ordem k , $0 \leq k \leq n$ de $r(x)$ se anulam em $x = a$. Portanto, $p^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ em $x = a$ para $0 \leq k \leq n$, ou seja, $p(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em a .

EXEMPLO 19

Encontre os polinômios de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ em $x = 0$.



As derivadas de $f(x)$ são:

$$f'(x) = ((1-x)^{-1})' = -1(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2}.$$

$$f''(x) = ((1-x)^{-2})' = -2(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3}.$$

$$f'''(x) = (2(1-x)^{-3})' = -2 \cdot 3(1-x)^{-4}(-1) = 2 \cdot 3(1-x)^{-4}.$$

É fácil ver que a k -ésima derivada de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para $x \neq 1$ é

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Resulta que o k -ésimo coeficiente do polinômio de Taylor em $x = 0$ é

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\frac{k!}{(1-0)^{k+1}}}{k!} = 1.$$

O k -ésimo polinômio de Taylor em $x = 0$ é o polinômio

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k.$$

Oserve que $p(x)$ é a soma dos $k+1$ primeiros termos da progressão geométrica (PG) de termo inicial 1 e razão x . Se $0 < x < 1$, então a soma dos termos da PG infinita é

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Estimativa da função resto

A função $r(x) = f(x) - p(x)$, que é a diferença entre a função $f(x)$ e seu polinômio de Taylor de ordem n em um ponto $x = a$, é comumente chamada de *resto da série de Taylor*. O Teorema 18 fornece uma informação sobre o limite de $r(x)$ quando $x \rightarrow a$, mas não permite estimar o valor de $r(x)$ para uma dada função f , ordem n e ponto $x = a$.

Sob hipóteses um pouco mais fortes do que as do Teorema de Taylor, podemos usar o Teorema do valor médio para obter uma informação sobre o valor de $r(x)$.



TEOREMA 20
FÓRMULA DE TAYLOR

COM RESTO DE LAGRANGE

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ função $n + 1$ vezes derivável em $a \in I$. Dado $b \in I$, supondo que f seja $n + 1$ vezes derivável no intervalo aberto e contínua no intervalo fechado entre a e b , então existe c entre a e b tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

O termo

$$R_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

é chamada *forma de Lagrange* para o resto de Taylor. Há outras formas para o resto, como a forma de Cauchy e a forma integral do resto, que não serão discutidas aqui.

A prova do Teorema 20 se encontra no link a seguir.



Para Saber Mais - Prova da Fórmula de Taylor com resto de Lagrange

- Clique para ler

Série de Taylor

DEFINIÇÃO 21

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função infinitas vezes derivável em I e seja $a \in I$. A série infinita

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \quad (16.1)$$

é chamada *série de Taylor* da função f no ponto a .

Se a função f é derivável infinitas vezes, podemos sempre obter a série de Taylor 16.1, mas a série nem sempre converge em alguma vizinhança de a . Pode mesmo acontecer que convirja em uma vizinhança de $x = a$, mas não convirja para $f(x)$. O estudo da convergência da Série de Taylor está além dos objetivos deste livro e não será feito aqui.



A série de Taylor para $x = 0$ também é chamada *série de Maclaurin*.

No exemplo 19, vimos que a série de Maclaurin de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ converge para $f(x)$ para $0 < x < 1$.

Obtenha a série de Maclaurin da função $f(x) = \sin x$.

EXEMPLO 22

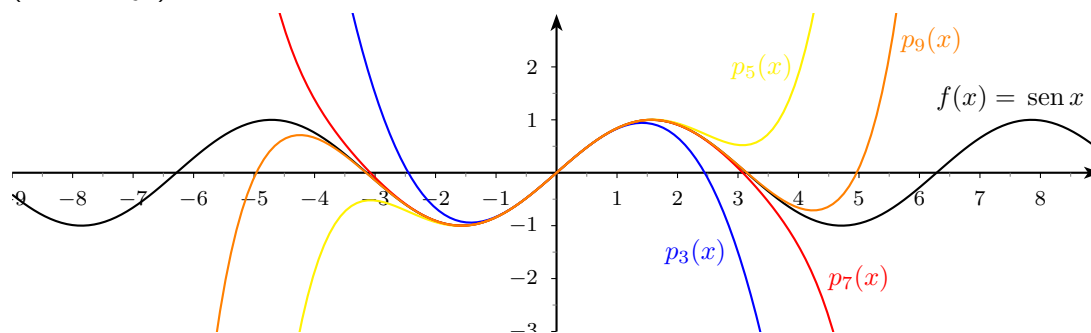
Obtendo as derivadas de $\sin x$ e avaliando em $x = 0$, obtemos:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \end{array}$$

Derivando sucessivamente, vemos que os valores da derivada se repetem em ciclos de período 4, de tal forma que $f^{(n)}(0) = 0$ para n é par e $f^{(n)}(0)$ alterna os valores 1 e -1 para n ímpar. Portanto, a série de Maclaurin da função $f(x) = \sin x$ é

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots \\ = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

A figura a seguir mostra como os polinômios de Taylor se aproximam cada vez mais da curva $y = \sin x$ próximo à origem. No gráfico temos $f(x) = \sin x$ (em preto), $p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ (em azul), $p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ (em amarelo), $p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$ (em vermelho) e $p_9(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}$ (em laranja).



16.5 Exercícios

1. Mostre que se uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $x = a$ e $p_1(x)$ é seu polinômio de Taylor de ordem 1 em a então $y = p_1(x)$ é a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x = a$.
2. Encontre a série de Taylor da função $f(x) = \cos x$ em $x = 0$.
3. Encontre a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{x}$ em $x = 1$.
4. Mostre que a série de Taylor da função $f(x) = (1+x)^p$, $p \in \mathbb{R}$, é dada por

$$1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

Mostre que se $p \in \mathbb{N}$, esta fórmula resulta na expansão do binômio de Newton para $(1+x)^p$.

5. Mostre que a série de Taylor da função $f(x) = \arctan x$ em $x = 0$ é dada por

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

6. Use o polinômio de Taylor de ordem 5 da função $f(x) = \sin x$ em $x = 0$ para estimar o valor de $\sin 0.3$. Usando a forma de Lagrange do resto de Taylor, estime o erro máximo da aproximação obtida.

16.6 Textos complementares

O Marquês de L'Hôpital

A Regra de L'Hôpital recebeu este nome em homenagem ao Matemático francês Guillaume François Antoine l'Hôpital (1661–1704), o Marquês de l'Hôpital.

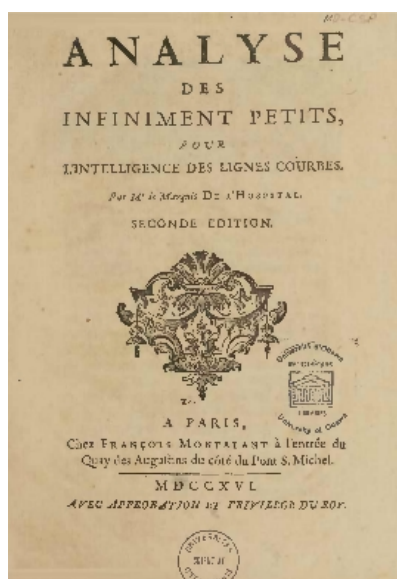
O Marquês é de família nobre e, após abandonar uma carreira militar por problemas de visão, dedicou-se à Matemática, tendo sido autor de trabalhos interessantes em Cálculo e a publicação de algumas obras importantes.

A Regra de L'Hôpital não foi descoberta por ele, mas apareceu pela primeira vez em sua obra *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* (Cálculo infinitesimal para o entendimento das linhas curvas), publicada em 1696, que teve grande importância histórica por ter sido a primeira apresentação sistemática do Cálculo Diferencial.

L'Hôpital deu crédito ao matemático Johann Bernoulli pelos resultados matemáticos no livro e, não desejando ele mesmo receber crédito pelas descobertas, publicou a primeira edição anonimamente.

A figura abaixo mostra a capa da segunda edição do livro, de 1716. Uma versão integral do livro em arquivo PDF e texto está disponível em <http://archive.org/details/infinimentpetits1716lhos00uoft>

Para Saber Mais



Para Saber Mais

Demonstração da Regra de L'Hôpital

Inicialmente, faremos a demonstração para limites laterais à direita $x \rightarrow a^+$. A demonstração para limites laterais à esquerda é análoga e, tendo demonstrado os dois limites laterais, fica demonstrado o caso $x \rightarrow a$.

Suponha então que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ e que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista. Provaremos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Considere as funções F e G definida em I por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}.$$

Seja $x \in I$, com $x > a$. Como f e g são deriváveis em $I \setminus \{a\}$, então F e G são deriváveis no intervalo $(a, x]$ e, portanto, contínuas em $(a, x]$. Mas F e G também são contínuas em a , pois

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = F(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 = G(a).$$

Assim, F e G são contínuas em $[a, x]$, deriváveis em (a, x) e vale que $G'(x) \neq 0$ em (a, b) (pois o mesmo vale para g , por hipótese). Portanto, atendem às condições do valor médio de Cauchy e existe um $c_x \in (a, x)$ tal que

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}.$$

Mas $F(a) = G(a) = 0$, $F'(c_x) = f'(c_x)$ e $G'(c_x) = g'(c_x)$ para $c_x \in (a, x)$. Portanto,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \quad (16.2)$$

Fazendo agora o limite quando $x \rightarrow a^+$ na equação 16.2, como $c_x \in (a, x)$, temos que $c_x \rightarrow a^+$, o que resulta em

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \rightarrow a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$



o que conclui a prova para o limite lateral à direita $x \rightarrow a^+$. A prova para o limite lateral à esquerda é análoga e podemos assim considerar provado o caso dos limites $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$ e $x \rightarrow a$.

Provaremos agora a Regra de L'Hôpital para limites no infinito $x \rightarrow \pm\infty$. Faremos para o caso $x \rightarrow \infty$. A prova do caso $x \rightarrow -\infty$ é análoga.

Sejam f e g funções deriváveis em intervalo (b, ∞) tais que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (b, \infty)$ e suponha que exista $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Provaremos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Fazendo $t = \frac{1}{x}$ para $x > b$, temos $0 < t < \frac{1}{b}$ para $b < x < \infty$ e $t \rightarrow 0^+$ se $x \rightarrow \infty$. A ideia da demonstração é usar a mudança de variável $t = \frac{1}{x}$ para reduzir ao caso já provado da Regra de L'Hôpital.

Sejam as funções $F, G: (0, \frac{1}{b}) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{e} \quad G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right).$$

Então

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} G(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Pela regra da cadeia, f e G são deriváveis em $(0, \frac{1}{b})$ e

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{e} \quad G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right).$$

Aplicando a parte que já provamos da Regra de L'Hôpital, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do teorema.



Para Saber Mais

DEMONSTRAÇÃO

Prova da Fórmula de Taylor com resto de Lagrange

Suponha que $b > a$ (o caso $b < a$ é análogo). Seja a função $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{M}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}, \quad (16.3)$$

em que $M \in \mathbb{R}$ é escolhida de forma que $g(a) = 0$.

Temos que $g(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Além disso, $g(a) = 0$ (pela escolha de M) e, substituindo $x = b$ na fórmula 16.3, vemos que $g(b) = 0$. Portanto, podemos aplicar o Teorema de Rolle e concluir que existe um $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Mas a derivada de $g(x)$ é

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(x) - (f''(x)(b-x) - f'(x)) - \left(\frac{f'''(x)}{2}(b-x)^2 - f''(x)(b-x) \right) \\ &\quad - \dots - \left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} \right) + \frac{M}{n!}(b-x)^n \\ &= \frac{M - f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \end{aligned}$$

Como $g'(c) = 0$ então $M = f^{(n+1)}(c)$. Substituindo x por a na fórmula 16.3 e lembrando que $g(a) = 0$, resulta em:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

que é a fórmula que queríamos demonstrar.



17

O CONCEITO DE INTEGRAL E SUAS PROPRIEDADES BÁSICAS

Sumário

17.1	Introdução	2
17.2	Integral definida de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$	5
17.3	Somas de Riemann	6
17.4	A integral definida $\int_a^b f(x) dx$	7
17.5	Exercícios	14
17.6	Propriedades das integrais definidas	16
17.7	Interpretação geométrica da integral	18
17.8	Exercícios	19

Enquanto a Álgebra e a Geometria estiveram separadas, seus progressos foram lentos e suas aplicações limitadas. No entanto, quando estas duas ciências foram unidas, deram uma a outra renovada vitalidade e seguiram rapidamente rumo à perfeição.
Lagrange

17.1 Introdução

Ao longo das unidades que restam lidaremos com duas questões que, aparentemente, não estão nem um pouco relacionadas.

Questão A: Sob que condições podemos afirmar que uma dada função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida em um intervalo aberto I da reta, é a função derivada de alguma função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$?

Ou seja, existe $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I?$$

Questão B: Como estender a noção clássica de área de figuras planas triangularizáveis para figuras mais gerais? Quais figuras não triangularizáveis poderão ser incluídas no processo?

Na primeira questão buscamos uma *função* enquanto que na segunda esperamos obter *números* nas respostas.

A continuidade, como veremos, é condição suficiente para respondermos positivamente a ambas as questões. Veremos também que há uma forte conexão entre elas, um resultado deveras importante, como seu nome indica: o Teorema Fundamental do Cálculo, que será objeto de estudo da próxima unidade.

Exemplos clássicos de figuras não triangularizáveis às quais atribuímos área são círculos e, mais geralmente, setores de curvas cônicas, como a parábola. Arquimedes deu a primeira prova rigorosa de que a área do círculo é igual à área do triângulo cuja base é igual a sua circunferência e cuja altura é igual a seu raio. Além disso, mostrou que

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}.$$



Ele também calculou áreas de setores parabólicos. Seus argumentos envolvem aproximações da região em questão por regiões triangularizáveis, o método de exaustão e suas demonstrações usam a redução ao absurdo.

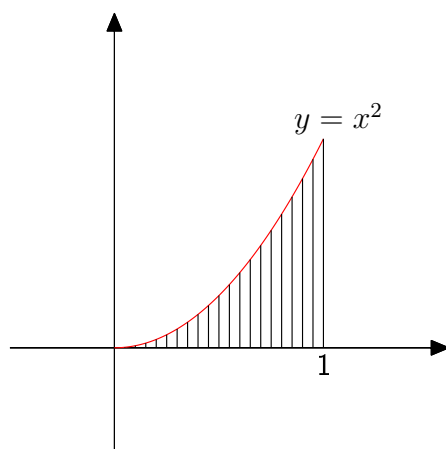
É importante notar que Arquimedes não dispunha de notação adequada nem de um sistema de numeração posicional como o que usamos.

Uma abordagem mais geral, como a que faremos, tornou-se viável devido à introdução da noção de coordenadas, resultado dos trabalhos de Descartes e Fermat.

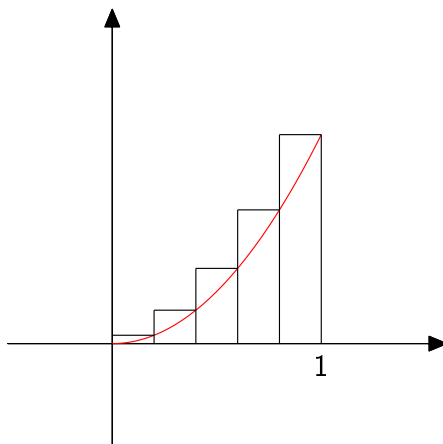
Para ilustrar a teoria de integral definida que apresentaremos, vamos começar com um exemplo.

Vamos calcular a área da região compreendida pelo eixo Ox , pela reta definida pela equação $x = 1$ e pelo trecho da parábola determinada pela equação $y = x^2$.

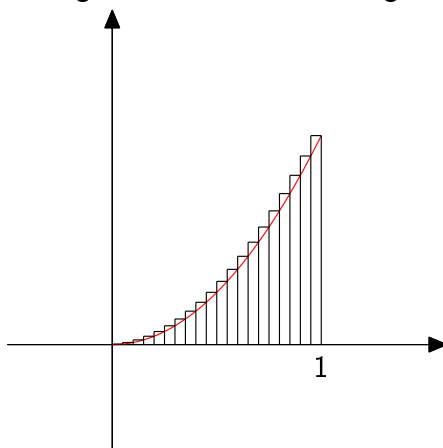
EXEMPLO 1



Aqui está a estratégia: vamos subdividir o intervalo $[0, 1]$ em subintervalos, para nossa conveniência, todos de comprimentos iguais, e considerar os retângulos com bases nesses intervalos. Cada um desses retângulos terá altura igual ao máximo valor da função restrita ao subintervalo base. Veja a figura para o caso desta subdivisão ser de cinco subintervalos, com os correspondentes retângulos.



A união desses retângulos é uma região à qual podemos atribuir área: a soma das áreas dos retângulos. Agora, tomando divisões com mais e mais subintervalos, obteremos uma sequência de números reais. Se essa sequência convergir, teremos um excelente candidato à área da região original. Note que isso é muito razoável, uma vez que a cada nova subdivisão do intervalo $[0, 1]$, a *diferença* entre a região original e a união de retângulos é menor.



Vamos aos números. A divisão do intervalo $[0, 1]$ será em n subintervalos, delimitados pelos pontos

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{i}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1.$$

Assim, o subintervalo $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ será a base do i -ésimo retângulo. A área deste retângulo é $A(i) = \frac{1}{n} \times \left(\frac{i}{n}\right)^2$, o produto do comprimento do intervalo

pela sua altura, o valor da função $f(x) = x^2$ calculada no extremo superior do intervalo, o ponto $\frac{i}{n}$.

Portanto, a área da união dos n retângulos é

$$S(n) = \sum_{i=1}^n A(i) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Tomando o limite, temos $\lim S(n) = \frac{1}{3}$, um excelente candidato à área da região original.

Vamos agora ao caso geral.

17.2 Integral definida de $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

Partições do intervalo $[a, b]$

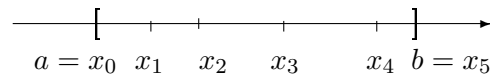
Seja $[a, b]$ um intervalo fechado e limitado da reta. Chamamos uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$ um conjunto finito de pontos $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, ordenado da seguinte forma:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Note que uma tal partição divide o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Cada um destes subintervalos tem comprimento $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e a soma destes comprimentos é igual a $b - a$, o comprimento do intervalo original:

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Veja um exemplo gráfico para $n = 5$.



$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4] \cup [x_4, x_5].$$

Note que as partições usadas no exemplo introdutório eram *homogêneas*. Isto é, todos os subintervalos de mesmo tamanho, um-enésimo do comprimento do intervalo original.

Chamamos *norma* da partição \mathcal{P} o comprimento do seu subintervalo mais longo:

$$\|\mathcal{P}\| = \max\{\Delta x_i ; i = 1, 2, \dots, n\}.$$

17.3 Somas de Riemann

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo fechado e limitado $[a, b]$ e seja \mathcal{P} uma partição de $[a, b]$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, escolhamos um ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Definimos a *Soma de Riemann* de f , relativa à partição \mathcal{P} e à escolha dos pontos c_i por

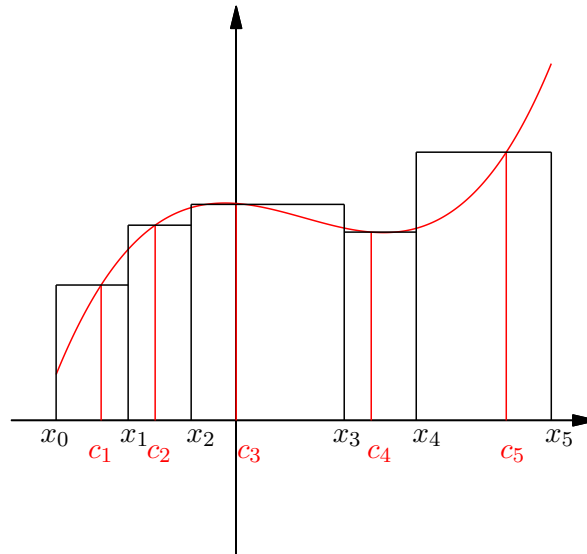
$$S(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i .$$

Observe que na notação $S(f, \mathcal{P})$ indicamos a dependência deste número em relação à partição \mathcal{P} , mas ele também depende da escolha dos pontos c_i .

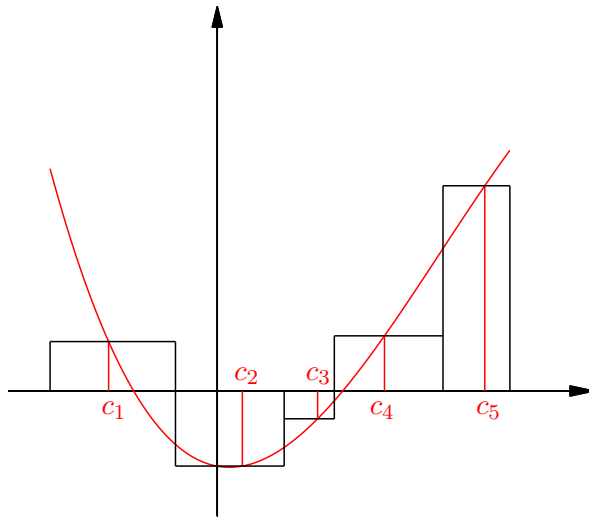
No exemplo introdutório, $S(n)$ corresponde à Soma de Riemann da função $f(x) = x^2$, definida no intervalo $[0, 1]$, com a partição homogênea de n subintervalos e as escolhas $c_i = \frac{i}{n}$:

$$S(n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} .$$

Note que, se f é uma função positiva, $S(f, \mathcal{P})$ é a área da região formada pela união dos retângulos de base $[x_{i-1}, x_i]$ e de altura $f(c_i)$, como mostra a figura a seguir.



No entanto, em geral, as Somas de Riemann de uma função qualquer, que assume valores positivos e negativos, corresponde a uma soma de números positivos ou negativos, dependendo dos valores $f(c_i)$. Assim, os retângulos que se encontrarem abaixo do eixo Ox , contribuirão com parcelas negativas. Veja a figura a seguir.



Neste exemplo gráfico, a Soma de Riemann é

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^5 f(c_i) \Delta x_i = A_1 - A_2 - A_3 + A_4 + A_5,$$

onde A_i representa a área do retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $|f(c_i)|$.

17.4 A integral definida $\int_a^b f(x) dx$

Gostaríamos de dizer que a *integral definida* da função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é o *limite* das suas Somas de Riemann quando as normas das partições tendem à zero:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} S(f, \mathcal{P}).$$

Para fazer isso, nos deparamos com uma dificuldade técnica. Tal limite é de natureza diferente dos limites com os quais temos lidado até agora: o limite de

sequência e o limite de função, o qual foi definido em termos do anterior. No caso do limite de uma sequência, queremos analisar o comportamento de um conjunto enumerável (e ordenado) de pontos. Quando lidamos com as partições, mais as escolhas dos pontos c_i 's, temos um conjunto enorme de números, sobre o qual queremos tomar o limite. Mesmo se nos restringíssemos às partições homogêneas, ainda teríamos que lidar com as escolhas dos c_i 's. No exemplo introdutório escolhemos os extremos superiores dos subintervalos: $c_i = x_i$. A escolha poderia ser outra, como x_{i-1} , os extremos inferiores, ou $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, os pontos médios dos subintervalos. Em cada um dos casos teríamos outra sequência, porém *o mesmo limite!*

Para superar essas dificuldades e continuar no escopo de um livro de Cálculo, lidaremos apenas com funções contínuas. Para isso, estabeleceremos, inicialmente, as afirmações a seguir.

- (a) Lidaremos, por conveniência, apenas com funções contínuas positivas. Isto é, assumiremos por agora que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.
- (b) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua e positiva, dada uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$, o conjunto das Somas de Riemann de f , relativas a \mathcal{P} , variando sobre as escolhas dos pontos c_i 's, será limitado por duas Somas de Riemann especiais, uma mínima e outra máxima.
- (c) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua e positiva e \mathcal{Q} for a partição de $[a, b]$ obtida da partição \mathcal{P} pela adição de um ponto extra, então a Soma de Riemann mínima de \mathcal{Q} será maior ou igual à Soma de Riemann mínima de \mathcal{P} e a Soma de Riemann máxima de \mathcal{Q} será menor ou igual à Soma de Riemann máxima de \mathcal{P} .
- (d) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua e positiva e $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$, então a Soma de Riemann mínima de \mathcal{P} convergirá para a Soma de Riemann máxima de \mathcal{P} . Este número será chamado a *integral definida de f em $[a, b]$* e denotado

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Vamos iniciar com a afirmação (b). Dada uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$, como $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, sua restrição $f_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$



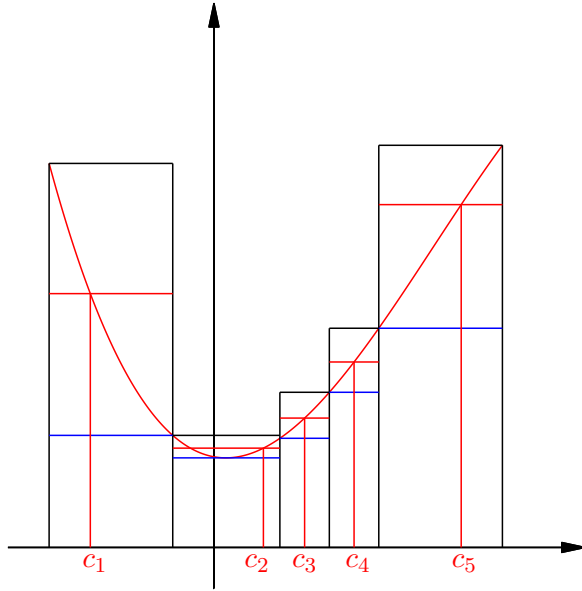
a cada um dos subintervalos da partição também é contínua. O Teorema dos Valores Extremos garante a existência de pontos e_i e d_i em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que

$$f(e_i) \leq f(x) \leq f(d_i), \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Portanto, se denotarmos por $S_-(f, \mathcal{P})$ a Soma de Riemann correspondente à escolha dos e_i 's mínimos e por $S_+(f, \mathcal{P})$ a Soma de Riemann correspondente à escolha dos d_i 's máximos, temos

$$S_-(f, \mathcal{P}) < S(f, \mathcal{P}) < S_+(f, \mathcal{P}),$$

onde $S(f, \mathcal{P})$ é uma Soma de Riemann associada a uma escolha genérica de c_i 's. Observe a figura a seguir, na qual os retângulos máximos, com lado superior em preto, somam área maior do que a área correspondente aos retângulos de lados superiores vermelhos, que por sua vez somam área maior do que a área correspondente aos retângulos mínimos, cujos lados superiores são azuis.



Vamos agora lidar com a afirmação (c). Mostraremos que, se \mathcal{Q} é obtida de \mathcal{P} pela adição de um ponto, então

$$S_+(f, \mathcal{Q}) \leq S_+(f, \mathcal{P}).$$

Suponhamos que \mathcal{Q} foi obtida de \mathcal{P} pela adição do ponto t :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < t < x_i < \cdots < x_n = b.$$

Então, $S_+(f, \mathcal{Q})$ é obtida de $S_+(f, \mathcal{P})$ substituindo a parcela $f(d_i) \Delta x_i$ por duas parcelas, digamos $f(\eta_1)(t - x_{i-1})$ e $f(\eta_2)(x_i - t)$, nas quais $f(\eta_1)$ é o valor máximo de f em $[x_{i-1}, t]$ e $f(\eta_2)$ é o valor máximo de f em $[t, x_i]$. Mas $f(d_i)$ é o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i] = [x_{i-1}, t] \cup [t, x_i]$. Portanto, $f(\eta_1) \leq f(d_i)$, $f(\eta_2) \leq f(d_i)$,

$$f(\eta_1)(t - x_{i-1}) + f(\eta_2)(x_i - t) \leq f(d_i)(t - x_{i-1}) + f(d_i)(x_i - t) = f(d_i) \Delta x_i$$

e podemos concluir que $S_+(f, \mathcal{Q}) \leq S_+(f, \mathcal{P})$.

A situação $S_-(f, \mathcal{P}) \leq S_-(f, \mathcal{Q})$ é análoga.

Queremos agora considerar a afirmação (c), onde lidaremos com um processo de convergência. Dada uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$, construímos uma nova partição \mathcal{P}_1 acrescentando a \mathcal{P} todos os pontos médios de seus subintervalos. Esta nova partição é tal que $\|\mathcal{P}_1\| = \frac{1}{2} \|\mathcal{P}\|$. Além disso, usando o item (c) iteradas vezes, temos

$$S_-(f, \mathcal{P}) \leq S_-(f, \mathcal{P}_1) \leq S_+(f, \mathcal{P}_1) \leq S_+(f, \mathcal{P}).$$

Repetindo o processo, obtemos uma nova partição \mathcal{P}_2 de \mathcal{P}_1 e assim sucessivamente. Dessa forma, obtemos uma sequência de partições \mathcal{P}_n , tais que $\|\mathcal{P}_n\| = \frac{1}{2^n} \|\mathcal{P}\|$, além de duas sequências de números, uma crescente: $(S_-(f, \mathcal{P}_n))$, uma decrescente: $(S_+(f, \mathcal{P}_n))$.

Como essas duas sequências de números são limitadas, inferiormente por $m(b-a)$ e superiormente por $M(b-a)$, onde m e M são, respectivamente, o mínimo e o máximo valores de f em $[a, b]$, ambas convergem. Chamamos seus limites de I_- e I_+ , respectivamente.

Vamos apresentar um argumento que garante que $I_- = I_+$. Observe a diferença entre as somas $S_+(f, \mathcal{P}_n)$ e $S_-(f, \mathcal{P}_n)$:

$$S_+(f, \mathcal{P}_n) - S_-(f, \mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^n (f(d_i) - f(e_i)) \Delta x_i,$$

onde $f(d_i)$ e $f(e_i)$ são, respectivamente, os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Sejam $M_n = \max\{f(d_i) - f(e_i), i = 1, \dots, n\}$ e $m_n = \min\{f(d_i) - f(e_i), i = 1, \dots, n\}$. Então,

$$m_n(b-a) \leq S_+(f, \mathcal{P}_n) - S_-(f, \mathcal{P}_n) \leq M_n(b-a).$$



Tomando o limite com $n \rightarrow +\infty$, o comprimento dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ converge para zero e a continuidade de f implica que as diferenças $f(d_i) - f(e_i)$ tendem a zero. Portanto, $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$. Assim, a diferença $S_+(f, \mathcal{P}_n) - S_-(f, \mathcal{P}_n)$ converge para zero e $I_+ = I_- = I$.

Resta um ponto a ser esclarecido. Como garantir que, partindo de possíveis diferentes partições, digamos \mathcal{P} e \mathcal{Q} , chegaremos, por esse processo, ao mesmo limite I ? Uma maneira de garantir isso seria usar a partição obtida da união delas, $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ e mostrar que esse limite é igual ao limite obtido a partir de \mathcal{P} e ao limite obtido a partir de \mathcal{Q} .

Para a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e positiva, definimos

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

DEFINIÇÃO 2

Observe que podemos usar qualquer família de partições para chegar a este limite.

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a função constante $f(x) = k$, para todo $x \in [a, b]$. Então, se \mathcal{P} é uma partição de $[a, b]$ e c_i é uma escolha qualquer de pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, a Soma de Riemann de f associada é

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n k \Delta x_i = k \sum_{i=1}^n \Delta x_i = k(b-a).$$

Portanto,

$$\int_a^b k dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} k(b-a) = k(b-a).$$

EXEMPLO 3
A INTEGRAL DA FUNÇÃO
CONSTANTE

Precisamos agora lidar com o item (a), para podermos estender a definição para funções contínuas quaisquer. Para isso, estabelecemos a proposição a seguir:

Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, existem duas funções $f_+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ambas contínuas, tais que $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$, $f_+(x) \geq 0$ e $f_-(x) \leq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

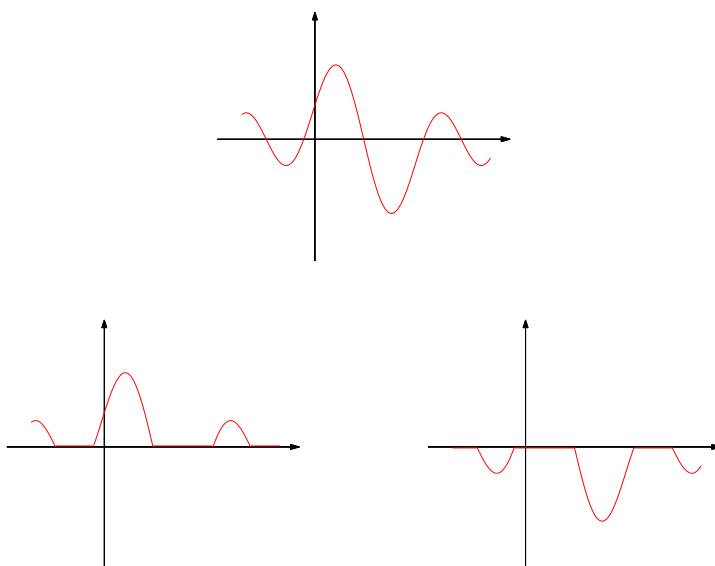
PROPOSIÇÃO 4



DEMONSTRAÇÃO

Basta escrever $f_+(x) = f(x)$, se $f(x) \geq 0$ e $f_+(x) = 0$, se $f(x) < 0$, assim como $f_-(x) = f(x)$, se $f(x) \leq 0$ e $f_-(x) = 0$, se $f(x) > 0$. Fica como exercício para o leitor a demonstração de que essas duas funções são contínuas.

Veja na figura um exemplo de f com suas respectivas f_+ e f_- .



No caso de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ser uma função tal que $f(x) \leq 0$, para todos os elementos $x \in [a, b]$, tomamos $g = -f$ e definimos

$$\int_a^b f(x) dx := - \int_a^b g(x) dx.$$

No caso geral, definimos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_+(x) dx + \int_a^b f_-(x) dx.$$

Completamos essa seção com algumas extensões da definição de integral.

DEFINIÇÃO 5

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. É conveniente convencionar as seguintes afirmações:



1. Seja c um ponto de $[a, b]$. Então $\int_c^c f(x) dx = 0$.

2. $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

No caso do item (1) podemos interpretar que $\{c\}$ é a única partição do intervalo $[c, c]$ e, portanto, $\Delta x_1 = 0$. No caso do item (2), tomamos $-\Delta x_i$ no lugar de Δx_i no cálculo das Somas de Riemann, uma vez que a integração está sendo feita no sentido inverso, de b para a .

17.5 Exercícios

1. Calcule $\int_0^1 x \, dx$, a área do triângulo retângulo de base $[0, 1]$ determinado pelo eixo Ox e pelas retas $y = x$ e $x = 1$ usando partições homogêneas.
2. Calcule a área da região compreendida pelo eixo Ox , pela reta definida pela equação $x = 1$ e pelo trecho da parábola determinada pela equação $y = x^2$, como no exemplo introdutório, usando os pontos extremos inferiores dos subintervalos.
3. Mostre que, dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, as correspondentes funções f_+ e f_- , definidas por $f_+(x) = f(x)$, se $f(x) \geq 0$ e $f_+(x) = 0$, se $f(x) < 0$, assim como $f_-(x) = f(x)$, se $f(x) \leq 0$ e $f_-(x) = 0$, se $f(x) > 0$, são obtidas diretamente das fórmulas

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|) \quad \text{e} \quad f_-(x) = \frac{1}{2}(f(x) - |f(x)|).$$

Conclua que, se f for contínua, então f_+ e f_- são contínuas.

4. Use partições homogêneas para mostrar que o processo ilustrado no exemplo introdutório, aplicado a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 1$, na qual $a \geq 0$, resulta na área $A = \frac{b^2 - a^2}{2} + b - a$, do respectivo trapézio.
5. Sejam $f, g : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, funções tais que $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = -g(-x)$, para todo $x \in [-a, a]$, f uma função par e g uma função ímpar. Mostre que

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx \quad \text{e} \quad \int_{-a}^a g(x) \, dx = 0.$$

6. Mostre que, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, positiva e m e M são, respectivamente, seus valores mínimo e máximo em $[a, b]$, então

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a).$$



7. Mostre que, se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

8. Mostre que, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, positiva e existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) > 0$, então

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$



17.6 Propriedades das integrais definidas

Iniciamos com algumas propriedades que completam a definição e enfatizam a interpretação geométrica da integral definida.

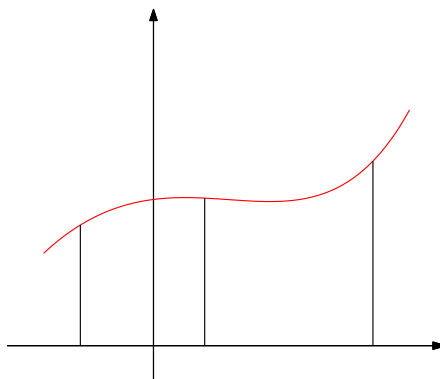
PROPOSIÇÃO 6 PROPRIEDADE 1

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida em intervalo I . Se a, b e $c \in I$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

DEMONSTRAÇÃO

Consideremos inicialmente a possibilidade $a < c < b$. Neste caso, $[a, c] \cup [c, b] = [a, b] \subset I$ e as restrições de f a cada intervalo mencionado é uma função contínua. A propriedade segue do fato de que, se \mathcal{P} é uma partição de $[a, c]$ e \mathcal{Q} é uma partição de $[c, b]$, então $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ será uma partição de $[a, b]$. O resultado então seguirá da propriedade do limite sobre as partições. Veja uma representação gráfica desta situação.



Nos casos de c coincidir com a ou com b ou se uma das situações, $c < a < b$ ou $a < b < c$ ocorrer, basta lembrar que $\int_c^c f(x) dx = 0$ e que $\int_a^c f(x) dx = -\int_c^a f(x) dx$.

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, $k \in \mathbb{R}$ e uma constante. Então

$$(i) \int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$(ii) \int_a^b (kf)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

PROPOSIÇÃO 7
PROPRIEDADE 2

Estas duas propriedades decorrem imediatamente das respectivas propriedades do limite das Somas de Riemann.

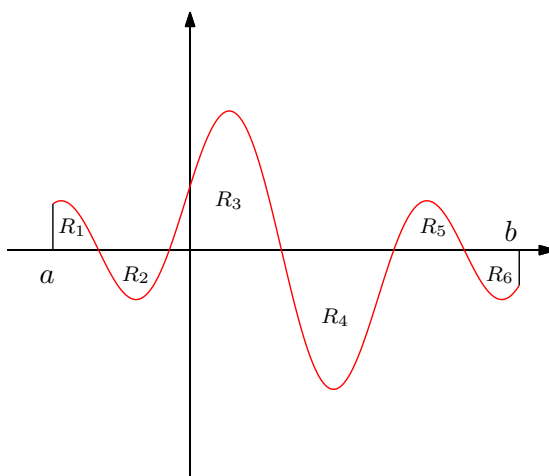


17.7 Interpretação geométrica da integral

Resumimos os fatos que relacionam a integral definida e áreas de regiões.

(a) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então o limite $\int_a^b f(x) dx$ é a área da região determinada pelo gráfico de f , pelo eixo Ox e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$.

(b) Em geral, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $\int_a^b f(x) dx$ é a soma das áreas *orientadas* das regiões determinadas pelo eixo Ox e pelo gráfico de f , entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$. Isto é, as regiões que ficam abaixo do eixo Ox contribuem com os valores negativos de suas áreas enquanto que as regiões que ficam acima do eixo contribuem com os valores positivos de suas áreas. Veja um



$$\int_a^b f(x) dx = A(R_1) - A(R_2) + A(R_3) - A(R_4) + A(R_5) - A(R_6).$$

17.8 Exercícios

1. Calcule $\int_a^b x \, dx$ usando partições homogêneas.
2. Calcule $\int_{-a}^a (x^2 + x + \operatorname{sen} x) \, dx$.
3. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que, se $x \in A$, então $-x \in A$. Dada uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definimos duas funções $f_p, f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ e $f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, para todo $x \in A$. Mostre que se A é um intervalo e f é contínua, então f_p e f_i são contínuas e

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_{-a}^a f_p(x) \, dx.$$



18

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Sumário

18.1	Introdução	2
18.2	O Teorema do Valor Intermediário para Integrais . .	3
18.3	Primeira Parte do Teorema Fundamental do Cálculo	4
18.4	Exercícios	7
18.5	Segunda Parte do Teorema Fundamental do Cálculo	8
18.6	Exercícios	11
18.7	O Teorema Fundamental do Cálculo e a Função Logaritmo	12
18.8	Exercícios	18
18.9	A Função Exponencial	19
18.10	Exercícios	23

A grande rio, grande ponte!

18.1 Introdução

A unidade anterior apresentou a teoria das Somas de Riemann, que permite estabelecer, para uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, o limite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

a *integral definida* de f no intervalo $[a, b]$.

Se f é uma função positiva, este número é usado para definir a área da região limitada pelo eixo Ox , pelo gráfico da função f e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$.

Observou-se também várias propriedades deste limite. Em particular, se M é o valor máximo e m o valor mínimo de f em $[a, b]$, então

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

Este limite tem um importante papel teórico, mas mesmo nos casos mais simples, é no mínimo trabalhoso calculá-lo. O objetivo desta unidade é apresentar o Teorema Fundamental do Cálculo que, no seu aspecto mais prático, nos fornecerá uma maneira simples de fazer isso. Além disso, ele responderá a uma das questões colocadas na introdução da unidade anterior, a saber, sob quais condições uma dada função é uma função derivada.

DEFINIÇÃO 1

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo aberto I . Dizemos que $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *primitiva* de f se, para todo $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

EXEMPLO 2

As funções $F(x) = \sin^2(x)$ e $G(x) = -\cos^2 x$ são ambas primitivas da função $f(x) = 2 \cos x \sin x$, como pode ser diretamente verificado.



18.2 O Teorema do Valor Intermediário para Integrais

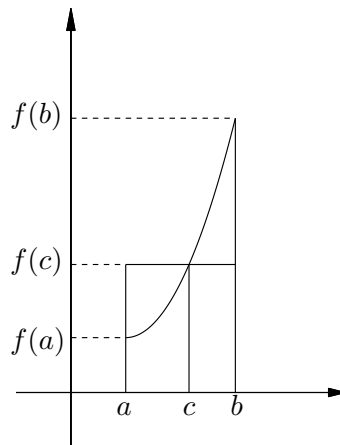
Iniciaremos com um teorema que é uma aplicação do Teorema do Valor Intermediário, para funções contínuas, e será útil nas argumentações ao longo da unidade.

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

TEOREMA 3

Veja, na figura, a interpretação do resultado, em um caso no qual a função f é positiva.



O teorema afirma que $\int_a^b f(x) dx$ (a área sob o gráfico de f) é igual a $f(c)(b-a)$ (a área do retângulo de base $[a, b]$ e altura $f(c)$). Isto é, a área que *falta* ao retângulo de base $[a, c]$ é igual à área que *excede* ao retângulo de base $[c, b]$.

O Teorema de Weierstrass para Valores Extremos afirma a existência de números $x_1, x_2 \in [a, b]$, tais que para todo $x \in [a, b]$,

DEMONSTRAÇÃO

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$



Integrando de a até b , temos

$$\int_a^b f(x_1) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x_2) dx.$$

Como $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são constantes e $\int_a^b K dx = K(b-a)$, obtemos

$$f(x_1)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq f(x_2)(b-a).$$

Dividindo por $b-a > 0$, obtemos a desigualdade

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(x_2).$$

O Teorema do Valor Intermediário garante a existência de $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

18.3 Primeira Parte do Teorema Fundamental do Cálculo

Aqui formularemos a parte prática do Teorema Fundamental do Cálculo que terá muitas aplicações nos cálculos das integrais definidas.

TEOREMA 4

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua definida no intervalo aberto I e seja $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f . Então, se $[a, b] \subset I$,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Estabelecemos a notação

$$F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

É imediato verificar que $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$. Então, o teorema permite calcular

$$\int_0^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9.$$

EXEMPLO 5

Note que o cálculo independe da escolha da primitiva. Se tomarmos, por exemplo, $G(x) = \frac{x^3}{3} + 15$, uma outra primitiva da função f , o resultado será o mesmo, pois ao fazermos $G(3) - G(0)$, a constante 15, somada a ambas as parcelas, será cancelada.

Sabemos que o cálculo do limite

DEMONSTRAÇÃO

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

independe da escolha dos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Vamos então fazer uma escolha muito especial.

Seja \mathcal{P} a partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. A função F é diferenciável e, portanto, contínua. Podemos então aplicar o Teorema do Valor Médio para F restrita a cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e escolher $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i}.$$

Ou seja, $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i) \Delta x_i$.

Para essa escolha de c_i 's, temos

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n F'(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a).$$

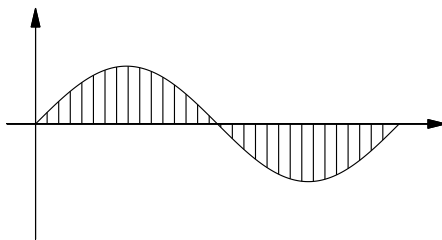
Fazendo essa escolha especial para cada partição \mathcal{P} , temos

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} [F(b) - F(a)] = F(b) - F(a).$$



EXEMPLO 6

Vamos calcular a área da região delimitada pelo gráfico da função $f(x) = \sin x$ e pelo eixo Ox , ao longo de um período completo, digamos $x \in [0, 2\pi]$.



A função $F(x) = -\cos x$ é uma primitiva de $f(x) = \sin x$. Observe que, se fizermos $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0.$$

Esse número certamente não é a área esperada, pois essa integral representa a soma *orientada* das áreas das duas regiões que, devido à simetria, são iguais. Para calcular a área esperada devemos fazer

$$A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos(\pi) + \cos 0] - [-\cos(2\pi) + \cos(\pi)] = 4.$$

18.4 Exercícios

1. Verifique, nos casos a seguir, se a função F é uma primitiva de f :

(a) $F(x) = \sin x - x \cos x$ e $f(x) = x \sin x$;

(b) $F(x) = -(x+2)\sqrt{1-x}$ e $f(x) = \frac{3x}{2\sqrt{1-x}}$;

(c) $F(x) = x - \arctan x$ e $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$;

(d) $F(x) = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x$ e $f(x) = x^2 \cos x$.

2. Use primitivas das funções para calcular as seguintes integrais:

(a) $\int_{-1}^2 x^2 dx$;

(b) $\int_{-\sqrt{2}}^1 x^3 dx$;

(c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$;

(d) $\int_2^3 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

3. Calcule a área da região compreendida pelo eixo Ox , pela reta definida por $x = 1$ e pelo gráfico da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.



18.5 Segunda Parte do Teorema Fundamental do Cálculo

Vamos agora considerar a questão da existência de primitivas. Ou seja, sob quais condições uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida em um intervalo aberto I da reta, admite funções primitivas?

TEOREMA 7

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, definida no intervalo aberto I , então existe $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, uma primitiva de f .

Isto é, existe uma função derivável $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, se $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

A demonstração deste teorema consiste na construção de uma função F que satisfaz a condição $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.

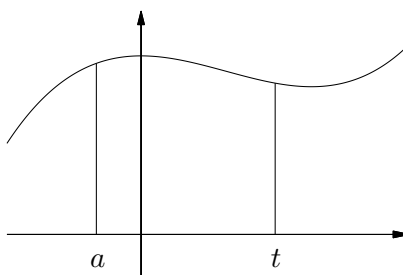
DEMONSTRAÇÃO

Começamos com a definição de F : escolha $a \in I$ e defina, para cada $t \in I$,

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

Como f é contínua, $F(t)$ está bem definido como o limite das Somas de Riemann, a integral definida de f no intervalo de extremos a e t . Em particular, $F(a) = 0$.

Veja na figura a seguir um exemplo no qual $t > a$ e f é uma função positiva.



Vamos calcular a derivada de F em um ponto $t \in I$. Para isso, estudaremos o quociente de Newton

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{t+h} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx \right].$$

Para facilitar, suponhamos $h > 0$, uma vez que argumentação análoga pode ser feita para o caso $h < 0$. Observe que, devido a propriedade de integral definida, podemos escrever

$$\int_a^{t+h} f(x) dx = \int_a^t f(x) dx + \int_t^{t+h} f(x) dx.$$

Assim, o quociente de Newton pode ser escrito como

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x) dx.$$

Sejam s_1 e s_2 respectivamente os pontos de mínimo e de máximo de f no intervalo $[t, t+h]$. Então,

$$f(s_1)h \leq \int_t^{t+h} f(x) dx \leq f(s_2)h.$$

Como $h > 0$, temos

$$f(s_1) \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x) dx \leq f(s_2).$$

Ora, se $h \rightarrow 0$, então $s_1 \rightarrow t$ e $s_2 \rightarrow t$. A continuidade de f e o Teorema do Confronto garantem que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x) dx = f(t).$$

Isso é, $F'(t) = f(t)$.

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \int_0^{2x+1} \sin(t^2) dt.$$

EXEMPLO 8



Vamos calcular $f'(x)$. Como $g(x) = \sin(x^2)$ é uma função contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo garante a existência de primitivas. Poderíamos tomar uma dessas primitivas, calcular uma expressão para f e usar as regras de derivação para determinar $f'(x)$. No entanto, essa é precisamente a dificuldade. Em muitos casos, como nesse particular exemplo, sabemos da existência da primitiva, mas não conhecemos uma formulação explícita. De qualquer forma, para calcular essa derivada bastará a garantia da existência. Seja $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de $g(x) = \sin(x^2)$. Então

$$f(x) = \int_0^{2x+1} \sin(t^2) dt = G(2x+1) - G(0).$$

Derivando a expressão $f(x) = G(2x+1) - G(0)$ obtemos $f'(x) = 2 G'(2x+1)$, devido à Regra da Cadeia. Assim, usando $G'(x) = g(x)$, temos

$$f'(x) = 2 \sin((2x+1)^2).$$

18.6 Exercícios

1. Calcule a derivada das funções a seguir:

(a) $F(x) = \int_0^{x^2} \cos^2 t \, dt;$

(b) $G(x) = \int_{-x^2}^1 \frac{1}{3 + \sin t} \, dt.$

2. Seja $f(x) = 1 + \int_0^{2x} \cos t^2 \, dt$. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto de abscissa 0.



18.7 O Teorema Fundamental do Cálculo e a Função Logaritmo

Como vimos no exemplo anterior, em muitos casos sabemos da existência de primitivas, mas não conhecemos uma fórmula explícita para as mesmas. Em alguns casos notórios, abreviamos a fórmula dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo usando alguma nomenclatura adequada e lidamos com a função primitiva através das informações que obtemos de suas características. A função logaritmo natural é um desses casos muito especiais, como veremos a seguir.

DEFINIÇÃO 9

Seja $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a primitiva da função $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, tal que $\ln 1 = 0$.

Em outras palavras,

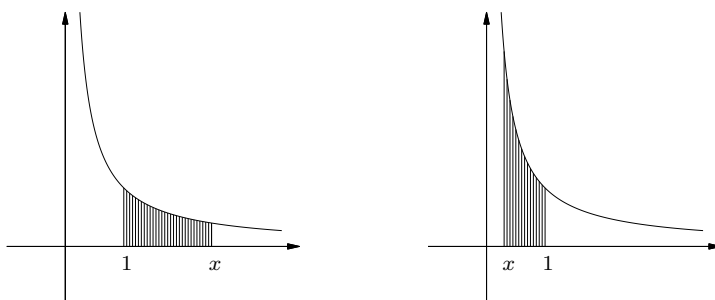
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

e

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Interpretação Geométrica de $\ln x$

Como a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é estritamente positiva no intervalo $(0, +\infty)$, $\ln x$ é positiva, se $x > 1$ e $\ln x$ é negativa, se $0 < x < 1$. Veja as figuras.



Se $x > 1$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ é igual a área da região hachurada na figura da esquerda. Se $0 < x < 1$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ é igual ao negativo da área da região hachurada na figura da direita.

Propriedades da Função Logaritmo

O que essencialmente caracteriza a função logaritmo é a propriedade a seguir:

Propriedade 1: Se a e b são números reais positivos, então

$$\ln ab = \ln a + \ln b.$$

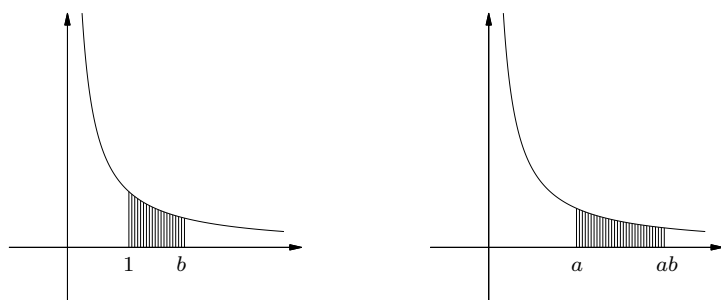
O fato crucial para a sua demonstração é o lema a seguir:

Se a e b são números positivos, então

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^b \frac{1}{x} dx.$$

LEMA 10

Veja a representação geométrica dessa afirmação, nas figuras a seguir, no caso em que $a > 1$ e $b > 1$.



O lema afirma que as áreas dessas duas regiões são iguais. Essencialmente, a expansão provocada na base, pela multiplicação de $[1, b]$ por a , é compensada por uma compressão na altura da figura, devido à forma da curva $y = \frac{1}{x}$. Veja a demonstração:

Usaremos partições adequadas para calcular os limites $\int_a^{ab} \frac{1}{x} dx$ e $\int_1^a \frac{1}{x} dx$ e verificaremos que são iguais.

Realmente, dada uma partição \mathcal{P} de $[1, b]$, digamos $1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, e feitas as escolhas de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, tomamos a

DEMONSTRAÇÃO



partição $a\mathcal{P}$ de $[a, ab]$, dada por $a = y_0 = ax_0 < y_1 = ax_1 < \dots < y_n = ax_n = ab$, com as escolhas de $d_i = ac_i \in [y_{i-1}, y_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Assim,

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

e

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x} dx = \lim_{\|a\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta y_i.$$

Mas $f(d_i) = \frac{1}{d_i} = \frac{1}{ac_i} = \frac{1}{a} f(c_i)$ e $\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = ax_i - ax_{i-1} = a\Delta x_i$.

Portanto,

$$\lim_{\|a\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta y_i = \lim_{\|a\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a} f(c_i) a\Delta x_i = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

Como $\|a\mathcal{P}\| \rightarrow 0$ se, e somente se, $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$, temos

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^a \frac{1}{x} dx.$$

DEMONSTRAÇÃO

[Demonstração da Propriedade:] Vamos mostrar que $\ln ab = \ln a + \ln b$. Realmente,

$$\ln ab = \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt = \ln a + \ln b.$$

COROLÁRIO 11

Se a e b são números positivos, então

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$



Aplicando a Propriedade 1 na equação $\ln \frac{a}{b}$, obtemos:

DEMONSTRAÇÃO

$$\ln a = \ln \frac{a}{b} b = \ln \frac{a}{b} + \ln b.$$

Veremos como a derivada é uma ferramenta poderosa.

Propriedade 2: Sejam $a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$. Então,

$$\ln a^r = r \ln a.$$

Consideremos as funções $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \ln x^r$ e $g(x) = r \ln x$. Usando as regras de derivação, especialmente a Regra da Cadeia, temos

DEMONSTRAÇÃO

$$f'(x) = \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = r \frac{1}{x}$$

e

$$g'(x) = r \frac{1}{x}.$$

Logo, para todo $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = g'(x)$. Isto é, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$. Como $f(1) = g(1) = 0$, concluímos que as duas funções coincidem.

O Gráfico de $f(x) = \ln x$

Veremos agora que temos elementos suficientes para esboçar o gráfico da função $f(x) = \ln x$.

É evidente da definição que, se $a > b > 0$, então $\ln a > \ln b$. No entanto, esta informação pode ser deduzida da derivada, assim como a concavidade voltada para baixo do gráfico, resultado da análise da segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad e \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

para todo $x \in (0, +\infty)$.

Veremos agora o comportamento da função nos extremos de seu domínio.



LEMA 12

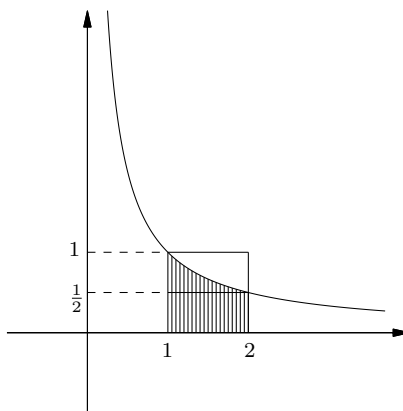
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

DEMONSTRAÇÃO

O fato que nos dará essas informações,

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1,$$

é geometricamente evidente:



Analiticamente, observe que, se $1 < x < 2$, então $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$. Portanto.

$$\frac{1}{2} = \int_1^2 \frac{1}{2} dx < \int_1^2 \frac{1}{x} dx < \int_1^2 1 dx = 1.$$

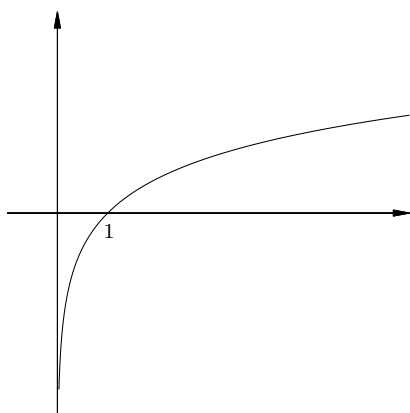
DEMONSTRAÇÃO

Demonstração do lema: Vamos mostrar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. Dado $N > 0$, escolha $n_0 > 2^{2N}$. Então, se $x > n_0$,

$$\ln x > \ln 2^{2N} = 2N \ln 2 > 2N \frac{1}{2} = N.$$

Fica como exercício para o leitor mostrar a outra afirmação do lema.

Podemos então esboçar o gráfico de $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, função invertível, pois é crescente.



Observe que o crescimento da função logaritmo é diferente do crescimento mesmo das funções polinomiais, quando $x \rightarrow +\infty$. Isto é, apesar da figura, para qualquer número $a \gg 0$, a reta $y = a$ intersesta o gráfico da função.

18.8 Exercícios

1. Calcule a derivada das funções a seguir:

(a) $f(x) = x \ln x$;

(b) $g(x) = x^2 \ln x$;

(c) $h(x) = x \ln x^2$;

(d) $k(x) = \ln(\cos x)$;

(e) $l(x) = \ln(\ln(x^2)x)$;

(f) $m(x) = x - \frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x}$.

2. Verifique que a curva normal à curva definida por $xy = \ln(1 + x^2 + y)$, na origem, é uma reta vertical.

3. Calcule a área da região delimitada pela curva $y = \frac{1}{x}$, pelo eixo Ox , reta $y = x$ e $x = 4$.

4. Verifique que as áreas das regiões delimitadas pela curva $y = \frac{1}{x}$, eixo Ox , sobre os intervalos $[\frac{1}{2}, 1]$ e $[1, 2]$, são iguais.

18.9 A Função Exponencial

Vamos agora considerar a função inversa de $f(x) = \ln x$, definida por $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\text{Exp}(x) = y$ se, e somente se, $\ln y = x$. Em particular, $\text{Exp}(0) = 1$, pois $\ln 1 = 0$.

Propriedades da Exponencial

A principal propriedade da função logaritmo se traduz na seguinte propriedade da exponencial:

Propriedade: Sejam a e b números reais. Então,

$$\text{Exp}(a + b) = \text{Exp}(a) \cdot \text{Exp}(b).$$

Sejam A e B números positivos tais que $\ln A = a$ e $\ln B = b$. Então,

$$\text{Exp}(a + b) = \text{Exp}(\ln A + \ln B) = \text{Exp}(\ln AB) = AB = \text{Exp}(a) \cdot \text{Exp}(b)$$

pois, $A = \text{Exp}(a)$ e $B = \text{Exp}(b)$.

DEMONSTRAÇÃO

Analogamente, o leitor pode provar as afirmações a seguir:

(a) Se a e b são números reais positivos, então $\text{Exp}(a - b) = \frac{\text{Exp}(a)}{\text{Exp}(b)}$.

(b) Se $r \in \mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{R}$, então $\text{Exp}(ra) = (\text{Exp}(a))^r$.

A Derivada da Exponencial

Como a função exponencial é a função inversa do logaritmo, podemos usar o Teorema da Função Inversa para calcular a sua derivada.

$$\text{Exp}'(x) = \frac{1}{\ln'(\text{Exp}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\text{Exp}(x)}} = \text{Exp}(x).$$

Ou seja, a derivada da exponencial é a própria exponencial. Além disso, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\text{Exp}(x) > 0$. Portanto, a função exponencial é estritamente



crescente e seu gráfico é sempre côncavo para cima. Devido aos dois limites fundamentais do logaritmo,

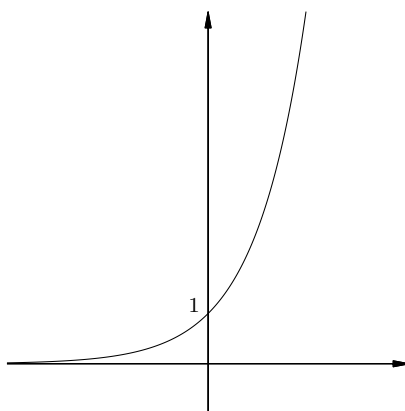
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty,$$

vale o seguinte lema, cuja demonstração fica a cargo do leitor.

LEMA 13

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Exp}(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Exp}(x) = 0.$$

Temos então todos os elementos para esboçar o gráfico da função exponencial:

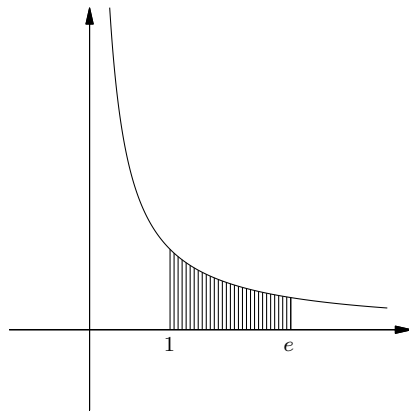


O Número e e Expoentes Irracionais

Você deve ter notado que temos usado a notação $\text{Exp}(x)$ para o que normalmente é denotado e^x . Na verdade, o número e é o único número real tal que

$$\ln e = 1.$$

Isto é, e é o único número tal que a área da região sob o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ entre as retas verticais $x = 1$ e $x = e$ é 1. Na figura, a área da região hachurada é igual a 1.



Até o momento, só dispomos de definição para potências racionais de números positivos. As propriedades de logaritmo e exponencial, a saber, se $a > 0$ e $r \in \mathbb{Q}$, então

$$\ln a^r = r \ln a \quad \text{e} \quad \text{Exp}(r a) = (\text{Exp}(a))^r,$$

permitem escrever

$$a^r = \text{Exp}(r \ln a).$$

Ou seja, dispomos de uma fórmula que nos permite estender a noção de potências racionais para potências de irracionais.

Sejam $a > 0$ um número real e $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ um número irracional. Então, definimos

$$a^x := \text{Exp}(x \ln a).$$

DEFINIÇÃO 14

$$\pi^{\sqrt{3}} = \text{Exp}(\sqrt{3} \ln \pi).$$

EXEMPLO 15

Fica como exercício para o leitor mostrar que as propriedades de expoentes, válidas para os números racionais, também são verdadeiras no caso dos irracionais. Por exemplo,

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= \text{Exp}((x+y) \ln a) = \\ &= \text{Exp}(x \ln a + y \ln a) = \\ &= \text{Exp}(x \ln a) \cdot \text{Exp}(y \ln a) = a^x \cdot a^y. \end{aligned}$$

Com essa definição podemos escrever

$$\text{Exp}(x) = \text{Exp}(x \ln e) = e^x,$$

uma vez que $\ln e = 1$. Assim, podemos resumir: para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$y = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln y.$$

18.10 Exercícios

1. Calcule a derivada das funções a seguir:

(a) $f(x) = x e^x$;

(b) $g(x) = e^{x^2} \cos x$

(c) $h(x) = e^{\cos 2x} + e^{\sin 2x}$;

(d) $k(x) = \cos e^x + \sqrt{1 + e^x}$.

2. Defina $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Mostre que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) \equiv 1$. Calcule $(\cosh(x))'$, $(\cosh(x))''$, $(\sinh(x))'$ e $(\sinh(x))''$. Esboce os gráficos de ambas as funções.

3. Use a definição $a^x := \text{Exp}(x \ln a)$ para derivar as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = (\sqrt{2})^{2x}$.

4. Sejam $a > 0$ e $b > 0$ tal que $b \neq 1$, números reais. Defina o logaritmo de a na base b usando a equação

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}.$$

Verifique a equação de mudança de base, para $c > 0$ tal que $c \neq 1$, dada por

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_c b}.$$

Calcule as derivadas até ordem 2 das funções $f(x) = \log_3 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ e esboce os seus gráficos.



19

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Sumário

19.1	Introdução	2
19.2	O símbolo $\int f(x) dx$	3
19.3	Diferencial de uma função	4
19.4	Integração e Regra da Cadeia - Método de Substituição	5
19.5	Exercícios	9
19.6	Integração por partes	11
19.7	Exercícios	15
19.8	Potências e produtos de funções trigonométricas . .	16
19.9	Exercícios	18

Para resolver essa integral, olhe fixamente para ela até que uma solução lhe ocorra.

d'après George Pólya

19.1 Introdução

O Teorema Fundamental do Cálculo garante a existência de primitivas de funções contínuas e permite calcular integrais definidas pela fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Para isso precisamos dispor de uma lei de definição de F em termos de funções elementares, tais como polinomiais e trigonométricas. Isso nem sempre é possível. Vide o caso de $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$, que tem a função logaritmo como primitiva.

As técnicas de integração, algumas das quais conheceremos nessa unidade, servem para isso: expressar primitivas de funções dadas em termos de funções elementares, entre as quais agora colocamos logaritmo e exponencial.

Essa parte do conteúdo de Cálculo é usualmente conhecida como *integração* e reúne algumas grandes ideias. Dominar essas técnicas e usá-las com criatividade é parte importante da formação matemática.

Vamos iniciar com um exemplo.

EXEMPLO 1

A Regra da Cadeia é usada para derivar a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x) = x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$.

Veja:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x \\ &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \arctan x. \end{aligned}$$

Portanto, $F(x)$ é uma primitiva da função $f(x) = \arctan x$ e, podemos calcular, por exemplo,

$$\int_0^1 \arctan x dx = F(1) - F(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$



Queremos agora seguir o percurso inverso: *antiderivar* $f(x) = \arctan x$. Isto é, à partir de f , chegar a $F(x) = x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$. A terminologia *integrar* $f(x) = \arctan(x)$ também é usada.

Antes de apresentar a primeira técnica, é preciso estabelecer alguma notação.

19.2 O símbolo $\int f(x) dx$

Dada uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo aberto I , usaremos a notação

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

para representar a família de primitivas de f , uma vez que duas primitivas nesta mesma família diferem por uma constante.

Realmente, se F_1 e F_2 são primitivas de f , então $(F_1 - F_2)'(x) = 0$, para todo $x \in I$, e toda função definida num intervalo, com derivada identicamente nula, é constante.

Chamamos $\int f(x) dx$ a *integral indefinida* de f .

Observe bem, $\int f(x) dx$ representa uma família de funções, enquanto que $\int_a^b f(x) dx$ é um número.

Veja algumas integrais definidas conhecidas:

$$\begin{aligned}\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, & \text{se } n \neq -1 \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln x + C \\ \int e^x dx &= e^x + C\end{aligned}$$

Usando essas fórmulas, podemos calcular integrais de combinações lineares dessas funções. Veja um exemplo. Para calcular as primitivas de $f(x) =$

EXEMPLO 2



$x^2 + 3 - \cos x$, fazemos

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 3 - \cos x) dx &= \int x^2 dx + 3 \int dx - \int \cos x dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 3x - \sin x + C.\end{aligned}$$

Precisamos estabelecer ainda mais uma notação. Isso será feito na seção a seguir.

19.3 Diferencial de uma função

Na Unidade 11 foi introduzida a noção de aproximação linear de uma função derivável f , dada pela equação

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

O símbolo Δf (ou Δy) representa a variação real de f correspondente ao acréscimo Δx em x_0 . O símbolo \approx quer dizer que esse acréscimo real é tão próximo do acréscimo linear $f'(x_0)\Delta x$ quanto menor for $f'(x_0)\Delta x$.

Para distinguir o acréscimo real Δf do acréscimo linear, passaremos a denotar este último por df . Além disso, como no caso da função identidade, denotada por $I(x) = x$, os acréscimos real e linear são iguais, colocaremos $\Delta x = dx$. Assim, temos o acréscimo real Δf e o acréscimo linear df , dados pelas equações a seguir:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0); \\ df &= dy = f'(x_0) dx.\end{aligned}$$

Este acréscimo linear também é chamado de *diferencial* de f em x_0 .

DEFINIÇÃO 1

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo aberto I , é derivável, definimos a *diferencial* de f como

$$df = dy = f'(x)dx.$$



Dada $f(x) = \ln x$, definida em $I = (0, +\infty)$, sua diferencial é dada por

$$df = \frac{1}{x} dx.$$

Calculando esta diferencial em $x_0 = 1$, obtemos $df = dx$. Assim, a aproximação linear de $\ln 1.1$, por exemplo, é

$$f(x_0) + df = 0 + 0,1 = 0,1.$$

Usando uma calculadora científica temos $\ln 1.1 \cong 0,09531017980$.

EXEMPLO 3

Diferencial e Integração

A noção de diferencial é adequada para o processo de integração. Isso é, dada uma diferencial $dy = f(x) dx$, queremos encontrar as funções primitivas $y = F(x)$ que realizam essa equação como a diferencial:

$$dy = F'(x) dx.$$

Ela será particularmente útil para expressar o resultado que resume a primeira técnica de integração, que veremos a seguir.

19.4 Integração e Regra da Cadeia - Método de Substituição

O processo de integração é o reverso da derivação. É claro que o conhecimento dos processos de derivação será muito útil. Começaremos com o método que corresponde, na derivação, à Regra da Cadeia. Esta técnica é conhecida como método por *substituição*. Antes de qualquer coisa, um exemplo.

Vamos calcular

$$\int x \cos x^2 dx.$$

EXEMPLO 4



Isto é, queremos encontrar a família de primitivas da função $f(x) = x \cos x^2$. Lembramos que

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

Isso sugere considerarmos a função $G(x) = \sin x^2$, cuja derivada resulta $G'(x) = 2x \cos x^2$, devido à Regra da Cadeia. O resultado não é exatamente o *integrando* $f(x) = x \cos x^2$. De qualquer forma, a diferença pode ser *corrigida* usando a multiplicação pelo escalar adequado:

$$F(x) = \frac{G(x)}{2} = \frac{\sin x^2}{2}.$$

Isso resulta na solução:

$$\int x \cos x^2 \, dx = \frac{\sin x^2}{2} + C.$$

Veja o mesmo exemplo sob a perspectiva da diferencial. Para integrar $\int x \cos x^2 \, dx$, fazemos $u = x^2$, que resulta na diferencial a seguir:

$$du = 2x \, dx.$$

Usando a propriedade da linearidade das integrais, correspondente à mesma propriedade inerente à derivação, temos:

$$\int x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos x^2) 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \cos u \, du.$$

Usando a fórmula $\int \cos u \, du = \sin u + C$, obtemos:

$$\int x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int \cos u \, du = \frac{\sin u}{2} + C = \frac{\sin x^2}{2} + C.$$

Isto é, fizemos a *substituição* $u = x^2$, que acarreta a correspondente *substituição* $du = 2x \, dx$.

Podemos apresentar essa ideia na forma do teorema a seguir.

TEOREMA 2

Sejam $u = g(x)$ uma função diferenciável definida num intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ e $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tais que $\text{Im}(g) \subset \text{Dom}(f)$. Então,

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = \int f(u) \, du = F(u) + C = F(g(x)) + C,$$

onde $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva de f .



Basta calcular a derivada de $H(x) = F(g(x))$. Realmente,

$$H'(x) = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x).$$

Isto mostra que $H(x) = F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)) g'(x)$.

DEMONSTRAÇÃO

Vamos calcular

$$\int x^3 \sqrt{x^4 + 4} dx.$$

EXEMPLO 5

Neste caso, vamos usar a fórmula $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$.

Realmente, se fizermos $u = x^4 + 4$, o termo que está sob o radical, temos a diferencial $du = 4x^3 dx$. Ora, uma rápida inspeção indica que, a menos da constante, esta é a diferencial que está multiplicando o radical. Assim, com um pequenos ajuste podemos integrar, usando a *substituição* de $x^4 + 4$ por u :

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{x^4 + 4} dx &= \frac{1}{4} \int \sqrt{x^4 + 4} 4x^3 dx = \frac{1}{4} \int \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{4} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} (x^4 + 4)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Há situações nas quais a substituição não é tão evidente. É preciso exercitar para perceber as possibilidades. Veja mais dois exemplos.

Para calcular $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$, vamos inicialmente calcular uma primitiva de $f(x) = \tan x$ e, depois, calcular a integral definida usando os limites de integração.

EXEMPLO 6

Vamos usar a definição de tangente, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ e a fórmula

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C,$$

que é válida para intervalos onde todos os valores de x são positivos, ou para intervalos onde todos os valores de x são negativos.

Assim, para calcular $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$, fazemos $u = \cos x$ e obtemos $du = -\sin x dx$. Assim,

$$\int \tan x dx = - \int \frac{1}{u} du = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C = \ln |\sec x| + C.$$



De posse da primitiva, fazemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx = \ln |\sec x| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2.$$

EXEMPLO 7

Para o caso de $\int x \sqrt{x+1} \, dx$, é preciso observar que, se fizermos $u = x + 1$, obtemos $du = dx$ e $x = u - 1$. Assim, a integral pode ser resolvida:

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x+1} \, dx &= \int (u-1)u^{\frac{1}{2}} \, du = \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) \, du \\ &= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

19.5 Exercícios

1. Calcule as integrais indefinidas a seguir:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int x(x^2 + 1)^3 dx; & \text{d)} \int x^2 \sqrt{x+2} dx & \text{g)} \int \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} dx; \\ \text{b)} \int \frac{x+1}{(x^2+2x+4)^2} dx; & \text{e)} \int \frac{2+\ln x}{x} dx; & \text{h)} \int \frac{\sin t}{1+\cos t} dt; \\ \text{c)} \int \frac{\sin t}{1+\cos t} dt; & \text{f)} \int \sin^3 t \cos t dt; & \text{i)} \int t(2-t)^{3/2} dt. \end{array}$$

2. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos a fórmula

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^1 = -2.$$

Sendo a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ positiva, há uma aparente contradição. Como você explica este fenômeno?

3. Seja g uma função diferenciável tal que $g'(x)$ é uma função contínua e seja f uma função contínua. Suponha que $[a, b]$ esteja contido no domínio de g e que $g([a, b])$ esteja contido no domínio de f . Mostre que

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Use esta fórmula para calcular $\int_0^{\pi/3} \tan x dx$.

4. Calcule as integrais definidas a seguir:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx; & \text{c)} \int_0^{\ln 3} e^x (1+e^x)^2 dx; \\ \text{b)} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot \theta d\theta; & \text{d)} \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx. \end{array}$$

5. Use as fórmulas a seguir para calcular as integrais dadas.

$$\bullet \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C;$$



- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsen \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a;$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| + C, \quad |x| > a.$

a) $\int \frac{x^2}{4 + x^6} dx;$

c) $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx;$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx;$

d) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx.$

19.6 Integração por partes

A principal dificuldade que enfrentamos ao aplicar as técnicas de integração é encontrar, para cada situação, a técnica mais indicada. A experiência levará ao reconhecimento de certos indícios que facilitam a escolha. A prática fará o resto. Veja os dois casos no exemplo a seguir.

Compare as duas integrais:

EXEMPLO 8

$$I_1 = \int x \cos x^2 dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int x \cos x dx.$$

Em I_1 , a substituição $u = x^2$ traz $du = 2x dx$ e resolve o problema. Já em I_2 , não há uma substituição tão evidente. Isto é, precisamos de outra estratégia para atacar a questão. Uma segunda observação nos leva a perceber que a função $f(x) = x \cos x$ é uma parcela da derivada da função $G(x) = x \sin x$:

$$(x \sin x)' = \sin x + x \cos x.$$

Como a primeira parcela é fácil de ser integrada, podemos fazer:

$$\int (x \sin x)' dx = \int \sin x dx + \int x \cos x dx.$$

Note que essa é uma igualdade de famílias de primitivas. Isto é, faremos ajustes das constantes C 's sempre que for conveniente. Assim, integrando $\int (x \sin x)' dx$ e $\int \sin x dx$, obtemos

$$x \sin x + C = -\cos x + \int x \cos x dx.$$

Finalmente, podemos escrever

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

A fórmula da integração por partes

A ideia é usar a fórmula da derivada do produto de duas funções. Usando a noção de diferenciais, ela se expressa compactamente como:

$$d(uv) = v du + u dv.$$

Integrando essa equação, obtemos $uv = \int v du + \int u dv$, que na forma a seguir é conhecida como a fórmula da integração por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Essa fórmula permite escrever as primitivas de $u dv$ em termos de uv e das primitivas de $v du$. Para aplicar a técnica, devemos identificar no integrando um fator que será u e um fator que será dv . É claro que o uso da fórmula pressupõe uma escolha de dv que seja integrável! Vamos a um exemplo.

EXEMPLO 9

Vamos integrar $\int x e^x dx$. Para isso, usaremos a escolha $u = x$ e $dv = e^x dx$. Essa escolha é duplamente conveniente, pois $dv = e^x dx$ é claramente integrável, bastando fazer $v = e^x$. Além disso, a escolha $u = x$ levará a $du = dx$, tornando o *novo* integrando mais simples:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x + e^x + C.$$

Há situações nas quais a técnica precisa ser usada vezes seguidas, como o próximo exemplo ilustra.

EXEMPLO 10

Para integrar $\int x^2 \cos x dx$, iniciaremos com a escolha $u = x^2$ e $dv = \cos x dx$. Isso gera $du = 2x dx$ e $v = \sin x$. Aplicando a fórmula

$$\int u dv = uv - \int v du$$

temos

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx.$$



O problema ainda não acabou, mas tornou-se mais fácil. Basta aplicar a fórmula novamente, fazendo as *novas* escolhas a seguir: $u = 2x$ e $dv = \sin x \, dx$. Isso gera $du = 2 \, dx$ e $v = -\cos x$, que resulta em

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - \left(-2x \cos x + 2 \int \cos x \, dx \right) \\ &= x^2 \sin x - \left(-2x \cos x + 2 \sin x \right) \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.\end{aligned}$$

A integração por partes é especialmente útil para integrar aquelas funções que sabemos *apenas* derivar. Veja o próximo exemplo.

Vamos integrar $\int \arctan x \, dx$, cuja derivada é $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Para aplicar a fórmula $\int u \, dv = uv - \int v \, dx$ fazemos $u = \arctan x$ e temos o simples $dv = dx$, que leva a $v = x$. Assim, temos

EXEMPLO 11

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx.$$

A nova integral pode ser resolvida pela substituição $u = 1 + x^2$, com $du = 2x \, dx$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} 2x \, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \\ &= x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C.\end{aligned}$$

A escolha de u e de dv nem sempre é óbvia. Há situações nas quais uma escolha, em lugar de tornar o problema mais simples, torna-o mais complicado. Nestes casos, é melhor repensar a estratégia. Veja mais um exemplo.



EXEMPLO 12

Para integrar $I = \int e^x \cos x \, dx$, faremos $u = \cos x$ e $dv = e^x \, dx$. Isso gera $du = -\sin x \, dx$ e $v = e^x \, dx$. Aplicando a fórmula, temos

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx \\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Diferente dos exemplos anteriores, o novo integrando parece tão complicado quanto o original. De qualquer forma, seguimos aplicando a técnica, fazendo agora $u = \sin x$ e, novamente, $dv = e^x \, dx$. Portanto, $du = \cos x \, dx$ e $v = e^x$, que dá o desdobramento a seguir:

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Veja, a aplicação da integração por partes duas vezes resultou numa equação onde o integrando original aparece nos dois lados da igualdade. Ou seja,

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I.$$

Lembremos que essa igualdade é de famílias de primitivas. Portanto, fazemos

$$\begin{aligned} I &= e^x \cos x + e^x \sin x - I \\ 2I &= e^x \cos x + e^x \sin x + C \\ I &= \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + D. \end{aligned}$$



19.7 Exercícios

1. Calcule as integrais a seguir:

a) $\int (x + 1) \cos x \, dx;$

e) $\int_1^e x \ln x \, dx;$

b) $\int x^2 \operatorname{sen} 3x \, dx;$

f) $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx;$

c) $\int x^2 e^{-x} \, dx;$

g) $\int \cos 2x \operatorname{sen} x \, dx;$

d) $\int \ln x \, dx;$

h) $\int_0^{1/2} \operatorname{arcsen} x \, dx.$

2. Calcule $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} \, dx.$

Sugestão: faça a substituição $u = \sqrt{x}$ e observe que isso leva a $dx = 2u \, du.$



19.8 Potências e produtos de funções trigonométricas

Integrais do tipo $\int \sin^n x \cos^m x dx$ dividem-se em, basicamente, dois tipos de integração: substituição simples ou fórmulas de recorrência. É preciso reconhecer qual é qual e usar as fórmulas corretas. Veremos alguns exemplos.

EXEMPLO 13

Este exemplo ilustra a situação mais simples, na qual uma das potências n ou m é ímpar. Neste caso, as identidades trigonométricas mais uma substituição simples resolverão o problema. Vamos calcular

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

A identidade trigonométrica fundamental dá $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ e escrevemos o integrando na forma $\sin^2 x \cos^3 x = \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x$. Fazendo a substituição $u = \sin x$, que acarreta $du = \cos x dx$, temos

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \cos x dx \\ &= \int (u^2 - u^4) du \\ &= \int u^2 du - \int u^4 du \\ &= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

O problema demanda intervenção trigonométrica quando ambas as potências são pares. Veja o exemplo mais simples possível.

EXEMPLO 14

Vamos calcular $\int \sin^2 x dx$. Uma maneira fazer de isso é usar a integração por partes. A escolha $u = \sin x$ e $dv = \sin x dx$ leva a $du = \cos x dx$ e



$v = -\cos x$. A fórmula de integração por partes dá

$$I = \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

$$I = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$I = -\sin x \cos x + x - I$$

$$2I = x - \sin x \cos x + C.$$

Essa igualdade leva à solução do problema:

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + D.$$

As identidades trigonométricas

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

também levam à solução, como você pode observar:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \end{aligned}$$



19.9 Exercícios

1. Calcule as integrais a seguir:

a) $\int \cos^5 x \sin x \, dx;$

e) $\int \sin^{5/2} x \cos^3 x \, dx;$

b) $\int_0^{\pi/6} \sin^2 x \, dx;$

f) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos 3x \, dx;$

c) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx;$

g) $\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx;$

d) $\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx;$

h) $\int \sec^6 x \, dx.$

2. Use a integração por partes para deduzir a seguinte fórmula de redução:

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$$

3. Deduza fórmula semelhante para $\int \sin^n x \, dx.$

4. Como exemplo de um autêntico coelho retirado da cartola, veja a solução para $\int \sec x \, dx:$

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx \\ &= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + C. \end{aligned}$$

Para $n > 1$, deduza a seguinte fórmula de redução:

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx.$$



20

OUTRAS TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Sumário

20.1 Substituições Trigonométricas	2
20.2 Exercícios	6
20.3 Método das Frações Parciais	7
20.4 Exercícios	14
20.5 Funções Trigonométricas Hiperbólicas	15
20.6 A substituição de Weierstrass	16
20.7 Exercícios	18

Não dá para contratar alguém para praticar por você.

H. Jackson Brown Jr.

A unidade anterior apresentou algumas técnicas de integração. Esta unidade dá continuidade a esta parte essencialmente prática da disciplina. A promessa é de que as últimas seções trarão algumas aplicações nas quais essas técnicas serão bem aproveitadas.

20.1 Substituições Trigonômétricas

As identidades trigonométricas $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ e $\sec^2 t = 1 + \tan^2 t$ são particularmente adequadas para lidar com integrandos com fatores tais como $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ e $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Ilustraremos esses procedimentos com alguns exemplos.

EXEMPLO 1

Para calcular $\int \sqrt{1 - x^2} dx$, observamos que a escolha $x = \sin t$ transforma $1 - x^2$ em $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$. Essa escolha é particularmente feliz, pois $x \in [-1, 1]$ se, e somente se, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Nestas condições, $\cos t \geq 0$ e

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t.$$

Além disso, a escolha $x = \sin t$ acarreta $dx = \cos t dt$. Assim, podemos calcular

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2} dx &= \int \cos t \cos t dt = \int \cos^2 t dt \\ &= \frac{t + \sin t \cos t}{2} + C. \end{aligned}$$

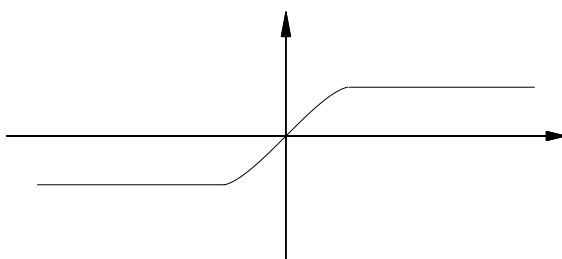
Precisamos agora expressar a família de primitivas em termos de x . Para isso, lembramos que $x = \sin t$, $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$ e, portanto, $t = \arcsen x$. Logo,

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\arcsen x + x \sqrt{1 - x^2}}{2} + C.$$



Note que a função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ está definida no intervalo fechado $[-1, 1]$, mas pode ser estendida continuamente para toda a reta real, se colocarmos $f(x) = 0$, para $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. A função $y = \arcsen x$, definida em $[-1, 1]$, é contínua, mas diferenciável apenas em $(-1, 1)$. No entanto, a função $F(x) = \frac{\arcsen x + x\sqrt{1-x^2}}{2}$ pode ser estendida diferenciavelmente para toda a reta, se colocarmos $F(x) = \frac{\pi}{4}$, se $x \in [1, +\infty)$ e $F(x) = -\frac{\pi}{4}$, se $x \in (-\infty, -1]$.

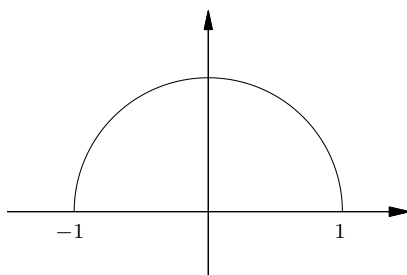
Veja o seu gráfico:



Isso permite calcular a área do semicírculo de raio 1:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left. \frac{\arcsen x + x\sqrt{1-x^2}}{2} \right|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Veja o gráfico da função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$:



Vamos agora lidar com um exemplo envolvendo o radical $\sqrt{a^2 + x^2}$.

EXEMPLO 2

Para calcular $\int \sqrt{x^2 + 16} dx$, vamos usar a identidade $\sec^2 t = 1 + \tan^2 t$. Levando em conta a constante 16, é conveniente fazer $x = 4 \tan t$. Assim, $16 + x^2 = 16 + 16 \tan^2 t = 16 \sec^2 t$.

Essa escolha é bastante adequada. Note que a função $f(x) = \sqrt{16 + x^2}$ está definida em toda a reta real. Consideraremos a função $y = 4 \tan t$ restrita ao intervalo aberto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. A imagem deste intervalo por $y = 4 \tan t$ é toda a reta real. Além disso, se $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\sec t \geq 0$ e $\sqrt{16 + 16 \tan^2 t} = \sqrt{16 \sec^2 t} = 4 \sec t$.

Para completar, precisamos calcular dx em termos de dt . Mas, como $x = 4 \tan t$, $dx = 4 \sec^2 t dt$ e podemos calcular

$$\int \sqrt{16 + x^2} dx = \int (4 \sec t) (4 \sec^2 t) dt = 16 \int \sec^3 t dt.$$

Para integrar $\int \sec^3 t dt$, podemos usar a integração por partes, fazendo $u = \sec t$ e $dv = \sec^2 t dt$. Isso resulta em $du = \sec t \tan t dt$, $v = \tan t$ e temos

$$\begin{aligned} \int \sec^3 t dt &= \sec t \tan t - \int \tan^2 t \sec t dt \\ \int \sec^3 t dt &= \sec t \tan t - \int (\sec^2 t - 1) \sec t dt \\ \int \sec^3 t dt &= \sec t \tan t - \int \sec^3 t dt + \int \sec t dt \\ 2 \int \sec^3 t dt &= \sec t \tan t + \int \sec t dt \\ \int \sec^3 t dt &= \frac{\sec t \tan t}{2} + \frac{\ln |\sec t + \tan t|}{2} + C. \end{aligned}$$

Retomando a integração original, temos

$$\begin{aligned} \int \sqrt{16 + x^2} dx &= 16 \int \sec^3 t dt \\ &= 8 \sec t \tan t + 8 \ln |\sec t + \tan t| + C \\ &= \frac{x \sqrt{16 + x^2}}{2} + 8 \ln \left| \frac{\sqrt{16 + x^2} + x}{4} \right| + C. \end{aligned}$$

Os casos envolvendo o radical $\sqrt{x^2 - a^2}$ demandam uma atenção especial, pois o seu domínio não é um intervalo, mas a união disjunta de dois intervalos: $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$. A identidade $\sec^2 t = 1 + \tan^2 t$ continua sendo apropriada, mas é preciso levar em conta em qual intervalo estamos integrando.

Vamos calcular

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx ,$$

EXEMPLO 3

supondo que $x > 4$.

Assim, a substituição $x = 4 \sec t$ acarreta $dx = 4 \sec t \tan t dt$ e $\sqrt{x^2 - 16} = 4 \tan t$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx &= \int \frac{16 \sec^2 t}{4 \tan t} 4 \sec t \tan t dt = 16 \int \sec^3 t dt \\ &= 8 \sec t \tan t + 8 \ln |\sec t + \tan t| + C \\ &= \frac{x \sqrt{x^2 - 16}}{2} + 8 \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 16}}{4} \right| + C. \end{aligned}$$



20.2 Exercícios

1. Calcule as integrais a seguir:

(a) $\int \sqrt{4 - x^2} dx;$

(b) $\int_0^5 \sqrt{x^2 + 25} dx;$

(c) $\int_2^4 \sqrt{x^2 - 4} dx;$

(d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - 4x^2}} dx;$

(e) $\int \frac{1}{t^4 \sqrt{1 - t^2}} dt;$

(f) $\int \frac{x^3}{(x^2 + 9)^{3/2}} dx;$

(g) $\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2} dx;$

(h) $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx;$

(i) $\int \frac{1}{t^4 \sqrt{t^2 - 1}} dt.$

20.3 Método das Frações Parciais

Esta técnica permitirá lidar com integrandos que são quocientes de polinômios. É claro que, se o grau do numerador é maior que o grau do denominador, podemos usar o algoritmo da divisão de Euclides para escrevê-lo como uma soma de um polinômio e um quociente cujo grau do numerador é menor do que o grau do denominador. Assim, vamos nos concentrar nestes tipos de quocientes de polinômios: o grau do denominador é maior do que o grau do numerador. Nestes casos vamos usar um resultado da Álgebra que nos permitirá reescrever o quociente como uma soma de quocientes mais simples, as chamadas *frações parciais*, cada uma delas possível de ser integrada. Aqui está a informação algébrica.

Decomposição em Frações Parciais

Dado um quociente de polinômios $\frac{p(x)}{q(x)}$, tal que o grau de p é menor do que o grau de q , que por nossa conveniência podemos considerar mônico, ele se decompõe em uma soma de frações, correspondentes à decomposição de $q(x)$ em fatores primos. Isto é, se

$$q(x) = (x - a_1)^{j_1} \dots (x - a_m)^{j_m} (x^2 + b_1x + c_1)^{k_1} \dots (x^2 + b_nx + c_n)^{k_n},$$

com $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, tais que $b_i^2 - 4c_i < 0$, e $j_1, \dots, j_m, k_1, \dots, k_n$ inteiros positivos, então existem constantes unicamente determinadas tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^{j_i} \frac{A_{ir}}{(x - a_i)^r} + \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^{k_i} \frac{B_{ir}x + C_{ir}}{(x^2 + b_ix + c_i)^r}.$$

Veja algumas decomposições em frações parciais:

$$\frac{4x^2 - 9x - 1}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3};$$

$$\frac{6x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 5x - 22}{(x+1)^2(x-2)(x^2+4)} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{3x+1}{x^2+4};$$

$$\frac{x^5 - x^4 + 3x^3 - 4x^2 + x - 2}{(x^2+1)^2x^2} = \frac{x-1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}.$$

EXEMPLO 4



Para usar o método das frações parciais para integrar $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, precisamos:

- (a) Decompor o polinômio $q(x)$ em seus fatores primos;
- (b) Determinar as constantes da decomposição em frações parciais;
- (c) Saber integrar cada uma das frações parciais.

Vamos ilustrar esses procedimentos com vários exemplos. Começemos por observar que, quanto ao item c, já sabemos integrar alguns casos. Veja o exemplo a seguir.

EXEMPLO 5

As fórmulas

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \text{e} \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

resolvem os seguintes casos típicos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x+1} dx &= \ln|x+1| + C; \\ \int \frac{3}{5+2x+x^2} dx &= \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C; \\ \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx &= \frac{\ln(x^2+2x+2)}{2} + C. \end{aligned}$$

Começemos com a situação em que o denominador tem todas as raízes reais e distintas. Veja como neste caso é simples determinar as constantes e calcular a integral.

EXEMPLO 6

Vamos calcular a integral

$$\int \frac{x-5}{x^2-x-2} dx.$$



A solução do problema começa na observação de que $x^2 - x - 2$ se decompõe como $(x + 1)(x - 2)$. Assim, sabemos que o integrando se escreve como uma soma de frações parciais. Isto é, existem constantes A e B , tais que

$$\frac{x - 5}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}.$$

Portanto, a menos do cálculo das constantes, podemos fazer

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 5}{x^2 - x - 2} dx &= \int \frac{A}{x + 1} dx + \int \frac{B}{x - 2} dx \\ &= A \ln |x + 1| + B \ln |x - 2| + C. \end{aligned}$$

Há uma maneira bastante simples de calcular essas constantes. O integrando $f(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}$ está definido em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Podemos fazer os cálculos dos limites a seguir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{(x + 1)A}{x + 1} + \frac{(x + 1)B}{x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(A + \frac{(x + 1)B}{x - 2} \right) = A. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x - 2)A}{x + 1} + \frac{(x - 2)B}{x - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x - 2)A}{x + 1} + B \right) = B. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 5)}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 5}{x - 2} = \frac{-6}{-3} = 2$$

e

$$B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 5)}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 5}{x + 1} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Agora podemos escrever a solução completa da integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 5}{x^2 - x - 2} dx &= \int \frac{2}{x + 1} dx - \int \frac{1}{x - 2} dx \\ &= 2 \ln |x + 1| - \ln |x - 2| + C. \end{aligned}$$



Vamos a mais um exemplo no qual o denominador possui apenas raízes reais, mas com eventuais multiplicidades maiores que um.

EXEMPLO 7

Para calcular a integral

$$\int \frac{x^2 - 5x - 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3} dx,$$

iniciamos com a decomposição do denominador, cujas possíveis raízes inteiras são ± 1 e ± 3 . Na verdade, a decomposição é

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)^2(x - 3).$$

Isto é, precisamos levar em conta a multiplicidade da raiz -1 . Assim, as frações parciais ficam

$$\frac{x^2 - 5x - 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3} = \frac{A_1}{(x + 1)^2} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{B}{x - 3}.$$

Podemos usar a estratégia dos limites para calcular as constantes A_1 e B . Veja como, a seguir.

Seja $f(x) = \frac{x^2 - 5x - 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$, o integrando. Então,

$$A_1 = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(A_1 + A_2(x + 1) + \frac{B(x + 1)^2}{x - 3} \right)$$

$$A_1 = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 10}{x - 3} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

e

$$B = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{A_1(x - 3)}{(x + 1)^2} + \frac{A_2(x - 3)}{x + 1} + B \right)$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x - 10}{(x + 1)^2} = \frac{-16}{16} = -1.$$

Para calcular A_2 , a constante restante, basta avaliar a função

$$\frac{x^2 - 5x - 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3} = \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{A_2}{x + 1} - \frac{1}{x - 3}.$$



em algum valor conveniente de x . Podemos fazer, por exemplo, $x = 0$:

$$\frac{-10}{-3} = 1 + A_2 - \frac{1}{-3},$$

que acarreta $A_2 = 2$.

Podemos agora calcular a integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 5x - 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3} dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int \frac{2}{x+1} dx - \int \frac{1}{x-3} dx \\ &= -\frac{1}{x+1} + 2 \ln|x+1| - \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

Vamos agora considerar um caso no qual o denominador apresenta raízes complexas.

Neste caso vamos integrar

EXEMPLO 8

$$I = \int \frac{2x^3 + x^2 - 5x - 8}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2} dx.$$

As possíveis raízes inteiras do polinômio $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2$ são ± 1 e ± 2 . Na verdade, sua decomposição é

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x+1)(x-1)(x^2 + 2x + 2).$$

Portanto, a decomposição em frações parciais do integrando leva em conta agora o termo indecomponível de grau dois:

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 5x - 8}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{x-1}.$$

O expediente dos limites nos ajudará a calcular as constantes D e E :

$$D = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 - 5x - 8}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

e

$$E = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x^2 - 5x - 8}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{-10}{10} = -1$$



Portanto,

$$\frac{2x^3 + x^2 - 5x - 8}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x - 1}$$

e fazendo $x = 0$, obtemos $B = 2$. Para calcular A , podemos escolher outro valor para x , diferente de 1, -1 e 0. Fazendo $x = 2$, por exemplo, obtemos $A = 1$.

Com essas informações e escrevendo $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$, podemos efetuar a integração:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x + 2}{(x + 1)^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x + 1} dx - \int \frac{1}{x - 1} dx \\ I &= \int \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 1} dx + \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x + 1} dx - \int \frac{1}{x - 1} dx \\ I &= \frac{1}{2} \int \frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 1} dx + \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x + 1} dx - \int \frac{1}{x - 1} dx \\ I &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 1) + \arctan(x + 1) + 2 \ln|x + 1| - \ln|x - 1| + C. \end{aligned}$$

Como você pode observar, o termo indecomponível de grau dois dividiu-se em duas integrais, uma envolvendo logaritmo e outra arcotangente.

Nos casos em que a multiplicidade do termo indecomponível de grau dois for maior do que um, podemos fazer o seguinte:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + a^2)^r} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + a^2)^r} dx + B \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^r} dx.$$

A primeira parcela pode ser resolvida pelo método da substituição:

$$\int \frac{2x}{(x^2 + a^2)^r} dx = \frac{1}{1 - r} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{r-1}} + C.$$

A segunda parcela pode ser calculada pela fórmula de redução a seguir:

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{r+1}} dx = \frac{x}{2ra^2(x^2 + a^2)^r} + \frac{2r - 1}{2ra^2} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^r} dx.$$

A demonstração desta fórmula segue da aplicação conveniente da integração por partes. Vamos fazer um exemplo para ilustrar o procedimento.



Vamos calcular a integral

EXEMPLO 9

$$\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

Para isso, começamos com a integração por partes aplicada na integral $\int \frac{1}{x^2 + 4} dx$, fazendo $u = \frac{1}{x^2 + 4}$ e $dv = dx$. Isso nos dá $du = \frac{-2x}{(x^2 + 4)^2} dx$ e $v = x$. Aplicando a fórmula de integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \frac{x}{x^2 + 4} - \int \frac{-2x^2}{(x^2 + 4)^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2 + 4} + 2 \int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2 + 4} + 2 \int \frac{x^2 + 4 - 4}{(x^2 + 4)^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2 + 4} + 2 \int \frac{x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2} dx + 2 \int \frac{-4}{(x^2 + 4)^2} dx \\ &= \frac{x}{x^2 + 4} + 2 \int \frac{1}{x^2 + 4} dx - 8 \int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx \end{aligned}$$

Manipulando essa igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} 8 \int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx &= \frac{x}{x^2 + 4} + \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ \int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx &= \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$



20.4 Exercícios

1. Calcule as integrais a seguir:

$$(a) \int \frac{-8x}{(x^2 - 1)(x - 3)} dx;$$

$$(b) \int \frac{2x^2 - 6x + 1}{(x - 1)^2(x + 1)} dx;$$

$$(c) \int \frac{2 - x}{(x + 2)(x - 4)} dx;$$

$$(d) \int \frac{3x - 1}{x^2 - x} dx;$$

$$(e) \int \frac{1 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx;$$

$$(f) \int \frac{8 - 5x}{(2x - 1)(x - 1)} dx;$$

$$(g) \int \frac{5x - 7}{x^2 - 2x - 3} dx;$$

$$(h) \int \frac{9x^2 + 2x - 2}{x(x - 1)(x + 2)} dx;$$

$$(i) \int \frac{3x^2 - x^3 - 2x + 1}{x^2(x - 1)^2} dx;$$

$$(j) \int \frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 1}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

2. Calcule as integrais a seguir:

$$(a) \int \frac{3x^2 - 3x + 2}{(x^2 + 4)(x - 2)} dx;$$

$$(b) \int \frac{x^3 - 4x + 5}{x^2(x^2 - 4x + 5)} dx;$$

$$(c) \int \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^4 - 1} dx;$$

$$(d) \int \frac{3x^3 + 8x^2 + 11x + 4}{x(x^2 + 2x + 2)^2} dx;$$

$$(e) \int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx;$$

$$(f) \int \frac{x - 2}{(x^2 + 9)^3} dx.$$

3. Calcule a integral $\int \frac{1}{(1 + x^2)^3} dx$ fazendo a substituição $x = \tan t$.

20.5 Funções Trigonômétricas Hiperbólicas

As funções trigonométricas hiperbólicas são as parcelas da decomposição da função exponencial como uma soma de uma função par e uma função ímpar. Isto é,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Um cálculo imediato mostra que

$$(\cosh x)' = \sinh x \quad \text{e} \quad (\sinh x)' = \cosh x.$$

Essas duas funções satisfazem à seguinte identidade:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Essa é a razão do termo hiperbólico aparecer nos nomes dessas funções. Assim, podemos usar essas funções para resolver certas integrais, da mesma maneira que usamos as funções trigonométricas usuais. Veja um exemplo.

Usaremos a substituição trigonométrica hiperbólica para calcular

EXEMPLO 10

$$\int \sqrt{1+x^2} dx.$$

Fazemos $x = \sinh t$. Então $dx = \cosh t dt$ e a identidade trigonométrica hiperbólica permite escrever

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t,$$

uma vez que $\cosh t > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Isso faz

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \cosh^2 t dt = \int \frac{(e^t + e^{-t})^2}{4} dt \\ &= \frac{1}{4} \int (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{4} \sinh 2t + \frac{t}{2} + C \\ &= \frac{1}{4} (2 \sinh t \cosh t) + \frac{t}{2} + C \\ &= \frac{x \sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\operatorname{arcsinh} x}{2} + C. \end{aligned}$$



É claro que várias propriedades similares às das funções trigonométricas valem aqui. Por exemplo, usamos o fato de que $\sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t$ e que a função $y = \sinh x$ é inversível e sua inversa é derivável. Você pode usar

$$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

para certificar-se de que a função $F(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\operatorname{arcsinh} x}{2}$ é uma primitiva de $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

20.6 A substituição de Weierstrass

A técnica que ilustraremos agora, em um único exemplo, é devida a Karl Weierstrass e é adequada para lidar com quocientes de somas de funções trigonométricas.

EXEMPLO 11

Usaremos a técnica também conhecida como *arco metade* para calcular

$$\int \frac{1}{\cos t + \sin t} dt.$$

Todo o processo inicia com a equação $u = \tan \frac{t}{2}$. Isso leva a $du = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} dt$. Usamos a identidade trigonométrica $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para obter

$$dt = \frac{2}{1+u^2} du.$$

Além disso,

$$\sin \frac{t}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad \text{e} \quad \cos \frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Usando as fórmulas trigonométricas $\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$ e $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}$, concluímos

$$\sin t = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{e} \quad \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$



Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos t + \operatorname{sen} t} dt &= \int \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du \\&= \int \frac{2}{-u^2 + 2u + 1} du = \int \frac{2}{2 - (u+1)^2} du \\&= \sqrt{2} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{2}(u+1)}{2}\right) + C \\&= \sqrt{2} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\tan \frac{t}{2} + 1\right)\right) + C.\end{aligned}$$

Usamos a fórmula

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{arctanh} x + C,$$

da função arcotangente hiperbólica.

20.7 Exercícios

1. Calcule as integrais a seguir:

$$(a) \int_0^{\sqrt{2}} t \sqrt{1+4t^2} dt;$$

$$(b) \int x \sec^2 x dx;$$

$$(c) \int \frac{\arctan x}{(x+1)^3} dx;$$

$$(d) \int e^x \sqrt{4+e^{2x}} dx;$$

$$(e) \int \frac{1}{x+x^{1/3}} dx;$$

$$(f) \int \ln(2+\sqrt{x}) dx;$$

$$(g) \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} dx;$$

$$(h) \int x e^{-2x} dx;$$

$$(i) \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+3 \operatorname{sen}^2 x} dx;$$

$$(j) \int x(2+3x)^{1/3} dx;$$

$$(k) \int x^3 \cos x^2 dx;$$

$$(l) \int \frac{x^3}{1+x^8} dx;$$

$$(m) \int \frac{1}{1+x^4} dx;$$

$$(n) \int \sqrt{1+e^x} dx.$$

21

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Sumário

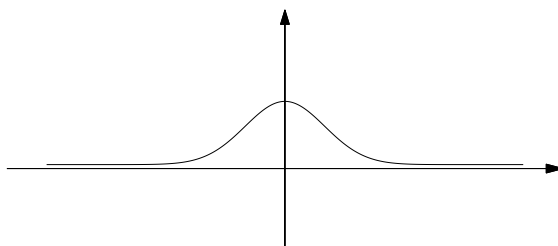
21.1	Integrais sobre domínios não limitados	2
21.2	Exercícios	5
21.3	Critérios de Convergência	6
21.4	Exercícios	12
21.5	O Caso dos Integrandos Infinitos	13
21.6	Exercícios	16

A integral definida é particularmente adequada para atribuir área a certas regiões não triangularizáveis, como vimos anteriormente. Para isso, as regiões devem ser limitadas por gráficos de funções contínuas, definidas em intervalos fechados e limitados.

Há, no entanto, certas regiões que fogem a esse padrão, mas mesmo assim gostaríamos de lhes atribuir área. Veja por exemplo, o caso das regiões entre o eixo Ox e os gráficos das funções definidas por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},$$

cujos gráficos têm o aspecto daquele representado na figura a seguir:



Gostaríamos de dizer que a área sob esse gráfico representa a probabilidade de um evento certo e, portanto, deveria ser igual a 1. As integrais impróprias servem para lidar com esse tipo de situação, como veremos ao longo da unidade.

21.1 Integrais sobre domínios não limitados

Vamos iniciar lidando com um caso especial

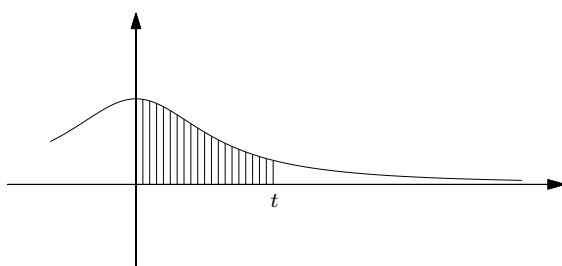
EXEMPLO 1

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ admite a função $F(x) = \arctan x$ como uma primitiva. Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan t$$

que corresponde à área da figura a seguir.





Se tomarmos o limite de $F(t) = \arctan t$, para $t \rightarrow +\infty$, obteremos um número: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$. Portanto, podemos interpretar que a área da região entre o gráfico da função f e o eixo Ox , sobre *todo* o intervalo $[0, +\infty)$ é $\frac{\pi}{2}$, apesar de esta região não ser *limitada*. Veja como essa ideia pode ser generalizada na forma da definição a seguir.

Seja f uma função contínua tal que $[a, +\infty) \subset \text{Dom}(f)$. Considere $F : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a primitiva de f definida por $F(t) = \int_a^t f(x) dx$. Definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$$

e chamamos este limite de *integral imprópria* de f sobre o intervalo $[a, +\infty)$. Se o limite for um número, diremos que a integral imprópria *converge*.

No exemplo anterior temos $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$, uma integral imprópria convergente. Analogamente, definimos outros dois tipos de integrais impróprios.

Sejam g e h funções contínuas tais que $(-\infty, a] \subset \text{Dom}(g)$ e $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$. Analogamente, definimos

$$\int_{-\infty}^a g(x) dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a g(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx := \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 h(x) dx + \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^s h(x) dx$$

as respectivas integrais impróprias de g sobre o intervalo $(-\infty, a]$ e de h sobre

DEFINIÇÃO 1

DEFINIÇÃO 2

a reta real. Novamente, diremos que as integrais impróprias convergem caso cada um dos limites envolvidos existir.

Observação. Note que, no caso da integral definida sobre toda a reta real, devemos analisar *cada* limite independentemente. Realmente, apesar de

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \sin x \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-\cos t + \cos(-t)) = 0,$$

a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x) \, dx$ não converge. Por exemplo,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^s \sin x \, dx = \lim_{s \rightarrow +\infty} (-\cos s + 1),$$

que não existe.

EXEMPLO 2

As integrais impróprias

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(1+x)^2} \, dx$$

convergem.

No primeiro caso, já calculamos $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$. Analogamente, $\lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$. Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

No outro caso, como $\int \frac{1}{(1+x)^2} \, dx = -\frac{1}{1+x} + C$, temos

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(1+x)^2} \, dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-2} \frac{1}{(1+x)^2} \, dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{1+t}\right) = 1.$$

21.2 Exercícios

1. Analise as integrais impróprias a seguir, indicando a não convergência ou calculando-as, caso contrário:

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx;$

(b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx;$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{9 + x^2} dx;$

(d) $\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$

(e) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 4x} dx;$

(f) $\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x + 4)} dx.$

21.3 Critérios de Convergência

A função $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x \in [0, +\infty)$ é tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. No entanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty.$$

Portanto, a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge. Seria muito conveniente poder distinguir, pelo menos em alguns casos, se a integral imprópria converge sem necessariamente calculá-la. Para esse propósito dispomos de critérios, como veremos a seguir.

Critério da Comparação

O nome desse critério é devido ao fato de ser baseado na comparação de duas funções. Veja o enunciado.

TEOREMA 3

Sejam f e g duas funções contínuas tais que $[a, +\infty) \subset \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$. Então,

- (a) Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, +\infty)$, e a integral imprópria $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ convergir, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ convergirá;
- (b) Se $0 \leq g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [a, +\infty)$, e a integral imprópria $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ divergir, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ divergirá.

A interpretação geométrica do teorema é bastante clara. Por exemplo, no caso da convergência, a região delimitada pelo gráfico de f está incluída na região sob o gráfico de g . Assim, se essa região admite área, a subregião também admite área. Antes da demonstração, veja um exemplo.

EXEMPLO 3

Usaremos o teste para verificar que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

é convergente.



A função $f(x) = e^{-x^2}$ é contínua e, portanto, admite primitivas. No entanto, não há uma expressão de $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ em termos de funções elementares. Portanto, a análise da convergência da integral imprópria não é viável pelo seu cálculo direto.

A primeira etapa para aplicar o teste consiste em eleger uma função que servirá de referência. Vamos considerar $g(x) = e^{-x}$, cuja primitiva pode ser encontrada pelas técnicas de integração.

Se $x \geq 1$, $x^2 \geq x$ e, portanto, $-x^2 \leq -x$ e $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Então,

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \geq 1.$$

Agora, o cálculo da integral imprópria:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = \frac{1}{e}.$$

Então, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ é convergente. Como $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ é um número real, podemos afirmar que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ é convergente.

A condição $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, +\infty)$, garante que

$$0 \leq F(t) = \int_a^t f(x) dx \leq G(t) = \int_a^t g(x) dx.$$

Portanto, $F(t)$ é uma função positiva e não decrescente. Além disso, como $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = \int_a^{+\infty} g(x) dx = k$, para algum $k \in \mathbb{R}$, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.

DEMONSTRAÇÃO

Exemplos Referenciais

Aqui estão alguns exemplos de integrais impróprias que são úteis para a aplicação do teste de convergência. Vamos considerar $a > 0$.



- Se $r > 1$, então $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx$ é convergente;
- Se $r \leq 1$, então $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx$ é divergente;
- Se $r > 0$, então $\int_b^{+\infty} e^{-rx} dx$ é convergente.

COROLÁRIO 4

Seja f uma função contínua tal que $[a, +\infty) \subset \text{Dom}(f)$. Se a integral imprópria $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ convergir, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ também convergirá.

DEMONSTRAÇÃO

Observe que, para qualquer número real,

$$0 \leq |r| + r \leq 2|r|.$$

A hipótese de que $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, garante que $\int_a^{+\infty} 2|f(x)| dx$ também converge. Como $0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|$, podemos concluir que $\int_a^{+\infty} (|f(x)| + f(x)) dx$ converge.

Como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t (|f(x)| + f(x)) dx - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t |f(x)| dx,$$

podemos concluir que $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.

EXEMPLO 4

Este resultado é particularmente útil para o caso em que o integrando não é sempre positivo. Veja o caso de $\int_7^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^3} dx$. Como $\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ é convergente e

$$\left| \frac{\sin 2x}{x^3} \right| \leq \frac{1}{x^3}, \quad \forall x \geq 7,$$

podemos concluir que $\int_7^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^3} dx$ é convergente.



Critério do Limite do Quociente

Sejam f e g duas funções contínuas tais que $[a, +\infty) \subset \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$, e para todo $x \geq a$, $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$. Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0,$$

então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge se, e somente se, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge.

TEOREMA 5

Antes de apresentarmos a demonstração, veja uma aplicação do resultado, que é particularmente útil para os casos nos quais os integrandos são quocientes.

Usaremos o teste para verificar a convergência das integrais impróprias

EXEMPLO 5

$$\int_5^{+\infty} \frac{x}{5x^3 + 4x^2 - 1} dx \quad \text{e} \quad \int_9^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{2x-15} dx.$$

No primeiro caso, usaremos como referência a função $g_1(x) = \frac{1}{x^2}$ e, no outro, $g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Para usar o critério precisamos calcular os limites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{5x^3 + 4x^2 - 1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{5x^3 + 4x^2 - 1} = \frac{1}{5} > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x+1}}{2x-15}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{2x-15} = \frac{1}{2} > 0.$$

Como $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente, concluímos que $\int_5^{+\infty} \frac{x}{5x^3 + 4x^2 - 1} dx$ é convergente. Por outro lado, $\int_9^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, não converge. Assim, a integral imprópria $\int_9^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{2x-15} dx$ também não converge.

DEMONSTRAÇÃO

Note que, se h é uma função contínua com $[a, +\infty) \subset \text{Dom}(h)$ e $a < R < t$, então

$$\int_a^t h(x) dx = \int_a^R h(x) dx + \int_R^t h(x) dx$$

e, portanto, $\int_a^{+\infty} h(x) dx$ converge se, e somente se, $\int_R^{+\infty} h(x) dx$ converge.

Além disso, se K é um número real, então $\int_a^{+\infty} h(x) dx$ converge se, e somente se, $\int_a^{+\infty} K h(x) dx$ converge.

Vamos à demonstração. A hipótese $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$ garante que para algum $R > a$, se $x > R$, então

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \frac{L}{2}.$$

Portanto,

$$-\frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} - L \leq \frac{L}{2},$$

$$\frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3L}{2},$$

$$\frac{L g(x)}{2} \leq f(x) \leq \frac{3L g(x)}{2}.$$

A última desigualdade permite que usemos o critério da comparação para concluir que $\int_R^{+\infty} f(x) dx$ converge se, e somente se, $\int_R^{+\infty} g(x) dx$ converge e, portanto, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge se, e somente se, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge.

EXEMPLO 6

O teste também pode ser usado no caso de integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx,$$

como este exemplo mostra. Vamos analisar a convergência de $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x + e^{-x}} dx$.



Observe que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{x + e^{-x}}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x e^x + 1} = 1.$$

Além disso,

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} (1 - e^t) = 1.$$

Como $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ converge, $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x + e^{-x}} dx$ também converge.



21.4 Exercícios

1. Determine quais das integrais impróprias a seguir são convergentes.

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx;$

(f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^{-2x}} \, dx;$

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 + x + 1}} \, dx;$

(g) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x^3} \, dx;$

(c) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \ln x}} \, dx;$

(h) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} \, dx;$

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3}{\sqrt{x^2}} \, dx;$

(i) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} \, dx;$

(e) $\int_2^{+\infty} \frac{x + 2}{x^{3/2} + x^{1/2} + 1} \, dx;$

(j) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1 + \sqrt{x})(1 + x)} \, dx.$

21.5 O Caso dos Integrandos Infinitos

Vamos agora observar o caso da integral

EXEMPLO 7

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx .$$

Veja que, apesar do domínio de integração ser finito, a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ não está definida em $x = 0$. Mais ainda,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty .$$

A exemplo do que fizemos no caso das integrais sobre domínios não limitados, podemos considerar, para todo $x > 0$, a primitiva

$$F(t) = \int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = 6 - \frac{3}{2}t^{2/3},$$

e estabelecer

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = 6 .$$

Mais geralmente, podemos lidar com integrais impróprias que acumulam problemas em vários pontos da mesma maneira que lidamos com o caso $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Isto é, separando cada irregularidade e tomando, *separadamente*, cada limite apropriado. Diremos que a integral converge se cada limite envolvido na situação convergir.

Vamos analisar a convergência da integral

EXEMPLO 8

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx .$$

Como a função $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ está definida em $(0, +\infty)$, devemos levar em conta separadamente cada extremo do intervalo. Assim, estudaremos dois casos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx .$$



Usando integração por partes concluímos que

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C.$$

Usando uma primitiva, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (-4 - 2\sqrt{t} \ln t + 4\sqrt{t}) = -4. \end{aligned}$$

Portanto, esta integral imprópria converge.

No outro extremo temos:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (2\sqrt{t}(\ln t - 2) + 4) = +\infty. \end{aligned}$$

Como essa integral não converge, apesar de $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ convergir, dizemos que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ não converge.

Os critérios de convergência também podem ser adaptados à situação em que o integrando não é limitado.

TEOREMA 6

Sejam f e g duas funções contínuas tais que $(a, b] \subset \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$. Então,

- (a) Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in (a, b]$, e a integral imprópria $\int_a^b g(x) dx$ convergir, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge;
- (b) Se $0 \leq g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in (a, b]$, e a integral imprópria $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ divergir, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

Vamos analisar a convergência de

EXEMPLO 9

$$\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} dx .$$

Note que $(2, 4]$ está contido no domínio do integrando e

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty .$$

Podemos escrever $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{1}{\sqrt{x - 2}} \frac{1}{\sqrt{x + 2}}$ e, se $x > 2$,

$$\frac{1}{\sqrt{x + 2}} < \frac{1}{\sqrt{2 + 2}} = \frac{1}{2} .$$

Isso permite escrever $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x - 2}}$ e, como

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x - 2}} dx &= \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x - 2}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^+} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{t - 2}) = 2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

concluimos que $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$ converge. Você pode usar substituição trigonométrica para calcular essa integral.



21.6 Exercícios

1. Determine quais das integrais impróprias a seguir são convergentes. Nos casos em que puder, calcule-as.

(a) $\int_1^2 \frac{1}{1-x} dx;$

(b) $\int_1^4 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx;$

(c) $\int_0^1 \ln x dx;$

(d) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x}{2} dx;$

(e) $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx;$

(f) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx;$

(g) $\int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x-4}} dx;$

(h) $\int_2^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}} dx.$

22

APLICAÇÕES DA INTEGRAL – VOLUMES

Sumário

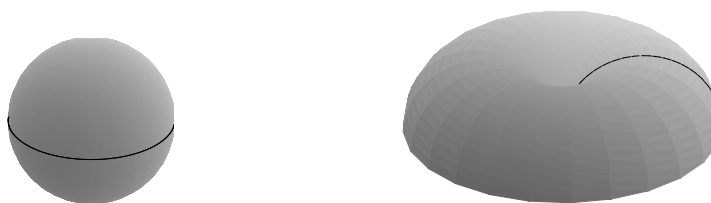
22.1 Método das seções transversais	5
22.2 Método das cascas cilíndricas	6
22.3 Exercícios	9
22.4 Mais aplicações da integral – Áreas e comprimentos	11
22.5 Comprimento de curva	15
22.6 Uma nota sobre os métodos numéricos	17
22.7 Exercícios	19

Sólidos de revolução

Os sólidos de revolução são aqueles obtidos girando uma região plana R em torno de um eixo, chamado eixo de rotação.

EXEMPLO 1

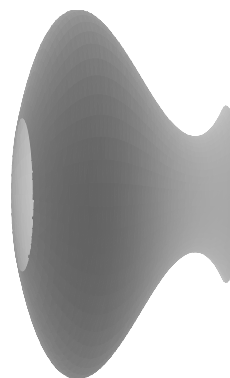
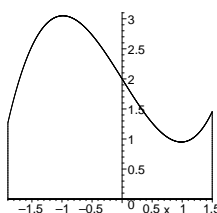
Seja R a região limitada pelo gráfico de $y = \sqrt{1 - x^2}$ e pelo eixo Ox . Se usarmos o eixo Ox como eixo de rotação, obteremos a esfera sólida como um objeto de revolução. Em contrapartida, se usarmos a reta $x = -1$ como o eixo de rotação, obteremos um sólido de revolução diferente. Veja as figuras seguintes.



Nesta unidade, usaremos as integrais definidas para estabelecer e calcular volumes de sólidos de revolução.

Volumes de sólidos de revolução

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$. Consideraremos o sólido de revolução obtido pela rotação da região limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico de f , em torno do eixo Ox .



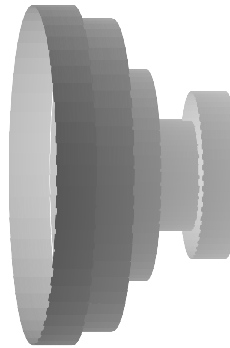
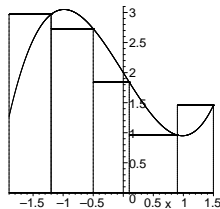
Considere $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, uma partição do intervalo $[a, b]$ e, para cada subintervalo da partição, escolha um ponto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. O volume do cilindro de raio $f(\xi_i)$ e altura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ é

$$\Delta V_i = \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i.$$

A soma desses volumes,

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i,$$

é uma soma de Riemann e, na medida em que tomamos partições mais e mais finas, os cilindros empilhados formam um sólido que se parece cada vez mais com o sólido de revolução original.



Como a função f é contínua, a função $g(x) = \pi [f(x)]^2$ também é contínua. Podemos então estabelecer a definição a seguir.

O volume V do sólido obtido pela revolução da região sob o gráfico da função contínua, positiva, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ em torno do eixo Ox é

$$V = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

DEFINIÇÃO 1

Para obter o volume da esfera, basta considerar $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \geq 0$, definida no intervalo $[-r, r]$.

EXEMPLO 2

Nesse caso,

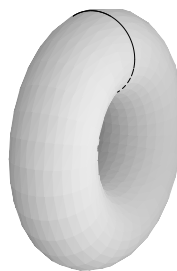
$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 3

Vamos calcular o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

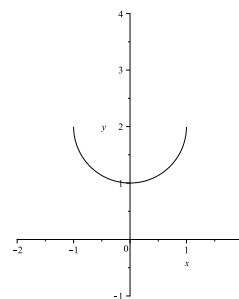
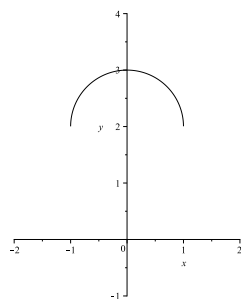
$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + (y - 2)^2 \leq 1, \}.$$

Antes, um esboço do sólido.



Ao girarmos esse disco de raio 1 e centro em $(0, 2)$ em torno do eixo Ox obteremos um sólido cuja superfície é chamada de **toro** e que lembra uma câmara de ar de um pneu.

Para calcularmos o volume desse sólido usaremos a seguinte abordagem. Dividiremos a curva $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ em duas funções, ambas sobre o mesmo intervalo, $[-1, 1]$. A função $f_1(x) = 2 + \sqrt{1 - x^2}$ tem por gráfico o semicírculo superior, enquanto a função $f_2(x) = 2 - \sqrt{1 - x^2}$ tem por gráfico o semicírculo inferior.



A integral

$$V_1 = \int_{-1}^1 \pi [f_1(x)]^2 dx$$

determina o volume do toro cheio, incluído o buraco.

Já a integral

$$V_2 = \int_{-1}^1 \pi [f_2(x)]^2 dx$$

determina, precisamente, o volume do buraco. Portanto, o volume que queremos calcular é dado pela diferença $V_1 - V_2$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 (2 + \sqrt{1 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (2 - \sqrt{1 - x^2})^2 dx = \\ &= 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = 8\pi \frac{\pi}{2} = 4\pi^2. \end{aligned}$$

22.1 Método das seções transversais

Ao observar a fórmula $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$, você não pode deixar de notar que o integrando $\pi [f(x)]^2$ é, precisamente, a área do disco de raio $f(x)$, a seção transversal obtida do corte do sólido de revolução dado pelo plano perpendicular ao eixo na altura x .

Isso nos leva a estender a definição de volume a outros sólidos, não necessariamente sólidos de revolução.

Suponha que B seja um sólido limitado por dois planos perpendiculares ao eixo Ox , em $x = a$ e $x = b$, e que para cada $x \in [a, b]$, a área da seção transversal do sólido com o plano perpendicular ao eixo seja dada por $A(x)$.

Se $A(x)$ for uma função contínua, usamos as somas de Riemann, de maneira análoga à que foi usada no caso de sólidos de revolução, para chegarmos à definição a seguir.

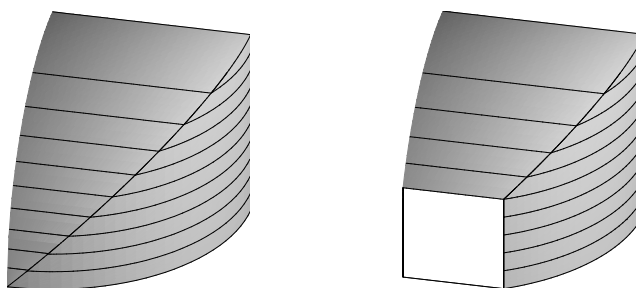
Nas condições que acabamos de descrever, o volume do sólido B é

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

EXEMPLO 4

Vamos calcular o volume da interseção de dois cilindros de mesmo raio a , cujos eixos de simetria são perpendiculares.

Suponhamos que um dos cilindros tem Ox como seu eixo de simetria, e o outro cilindro, o eixo Oz . Devido à simetria, este volume é 8 vezes o volume da parte que se encontra no primeiro octante, representada na figura a seguir, à esquerda. A figura da direita mostra o sólido com um corte perpendicular ao eixo Ox .



Essa seção, na altura x , é um quadrado de lado $\sqrt{a^2 - x^2}$. Assim, a área desse quadrado é $A(x) = (a^2 - x^2)$. O volume do oitavo do sólido, representado na figura, é

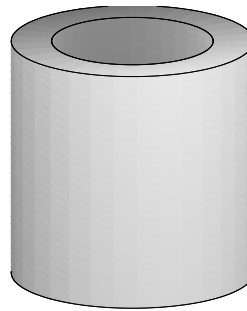
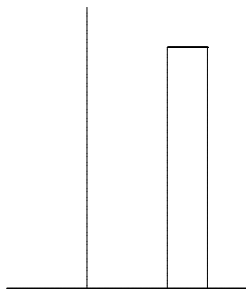
$$\int_0^a (a^2 - x^2) dx = a^2x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}.$$

Portanto, a interseção dos dois cilindros tem volume $\frac{16a^3}{3}$ unidades de volume.

22.2 Método das cascas cilíndricas

Este método é apropriado para calcular volumes de sólidos de revolução cujo eixo de simetria é o eixo Oy .

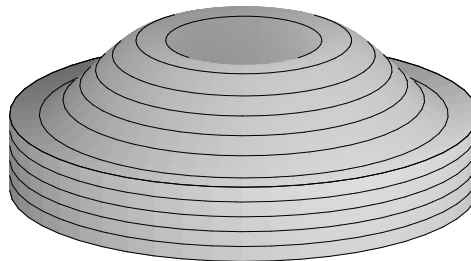
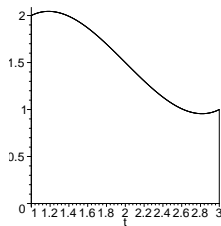
Vamos considerar um retângulo de altura h , sobre o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, com $0 < x_{i-1} < x_i$, como mostra a figura a seguir. Vamos calcular o volume da casca cilíndrica obtida pela rotação desse retângulo em torno do eixo Oy .



Ora, isso é o volume do cilindro maior menos o volume do cilindro menor:

$$\begin{aligned} V_i &= \pi x_i^2 h - \pi x_{i-1}^2 h = \pi h (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \\ &= \pi h (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Agora, seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva, com $a \geq 0$ e seja R a região sob o gráfico de f . Queremos calcular o volume do sólido de revolução da região R em torno do eixo Oy .



O método que permite fazer isso é chamado de método das cascas cilíndricas, pois usamos aproximações do sólido por cascas cilíndricas obtidas da revolução em torno do eixo Oy de retângulos que aproximam a área R , num processo similar ao que usamos para obter a fórmula de volume de sólidos de revolução em torno do eixo Ox .

Veja como funciona: seja $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e, como antes, para cada intervalo da partição, escolhemos um ponto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

O volume da casca cilíndrica obtida da revolução em torno do eixo Oy do retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $f(\xi_i)$ é

$$V_i = \pi f(\xi_i) (x_i + x_{i-1}) \Delta x_i.$$

A soma dos volumes das cascas cilíndricas é uma soma de Riemann:

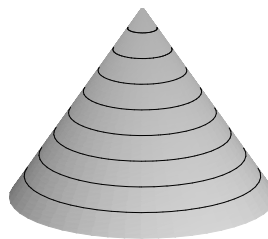
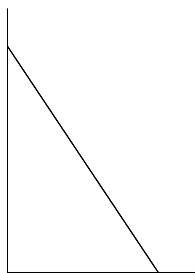
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n V_i &= \sum_{i=1}^n \pi f(\xi_i) (x_i + x_{i-1}) \Delta x_i = \\ &\cong 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) x_i \Delta x_i.\end{aligned}$$

O limite dessas somas de Riemann resulta na fórmula com a qual definimos o volume do sólido:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

EXEMPLO 5

Vamos calcular o volume do cone de altura h , com o raio da base r . Para isso, vamos considerá-lo como o sólido de revolução do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(r, 0)$ e $(0, h)$, em torno do eixo Oy .



Primeiro, devemos achar a equação da reta que contém os pontos $(r, 0)$ e $(0, h)$. Isso é fácil: $y = h\left(1 - \frac{x}{r}\right)$. Agora, usaremos a fórmula do método das cascas cilíndricas, com $f(x) = h\left(1 - \frac{x}{r}\right)$, definida no intervalo $[0, r]$:

$$\begin{aligned}V &= 2\pi \int_0^r x h \left(1 - \frac{x}{r}\right) dx = 2\pi \int_0^r \left(hx - \frac{hx^2}{r}\right) dx = \\ &= 2\pi \left(\frac{hx^2}{2} - \frac{hx^3}{3r}\right) \Bigg|_0^r = 2\pi \left(\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^2}{3}\right) = \frac{\pi hr^2}{3}.\end{aligned}$$

Ou seja, o volume do cone de altura h e raio da base r é um terço da área da base vezes a altura.

22.3 Exercícios

1. Faça um esboço do sólido de revolução obtido pela revolução do semicírculo do exemplo anterior em torno dos seguintes eixos: (a) $x = 2$; (b) $y = -1$.
2. Seja R a região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo Ox , com $x \in [0, 4]$. Faça um esboço do sólido obtido pela revolução de R em torno do eixo Ox e calcule o seu volume.
3. Calcule o volume do sólido de revolução da região R em torno do eixo indicado:
 - (a) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x/2 \}$; Ox .
 - (b) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \cos x/2 \}$; Oy .
 - (c) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq x^2 - 4x + 4 \}$; Ox .
 - (d) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq e^x \}$; Ox .
 - (e) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2, 1/x \leq y \leq e^x \}$; Ox .
4. Esboce o gráfico da região R sob o gráfico da função $y = 2 + 2 \cos x$ sobre o intervalo $[0, \pi]$. Calcule o volume do sólido de revolução de R em torno do eixo Oy e faça um esboço desse sólido.
5. Calcule o volume do sólido de revolução em torno do eixo Ox da região sob o gráfico da função $f(x) = x \sqrt{\cos x}$, no intervalo $[0, \pi/2]$.
6. Calcule o volume do sólido de revolução em torno do eixo Ox da região sob o gráfico da função $f(x) = \sec x$, no intervalo $[\pi/4, \pi/3]$.
7. Em uma esfera de raio 1 foi cavado um buraco cilíndrico, cujo eixo de simetria é um diâmetro máximo da esfera. Calcule o volume obtido da esfera menos o cilindro, sabendo que o raio do cilindro é $1/2$.
8. Calcule o volume do sólido cuja base é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$ tal que cada uma de suas seções transversais perpendiculares ao eixo Ox é um quadrado.

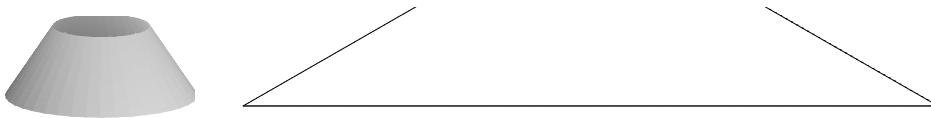
9. Um sólido é construído sobre o triângulo de vértices $(0, -2)$, $(0, 2)$ e $(4, 0)$, de tal forma que cada seção perpendicular ao eixo Ox é um semicírculo.
10. Uma cunha é cortada do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ pelos planos $z = 0$ e $z = y$. Calcule o seu volume.

22.4 Mais aplicações da integral – Áreas e comprimentos

Área de uma superfície de revolução

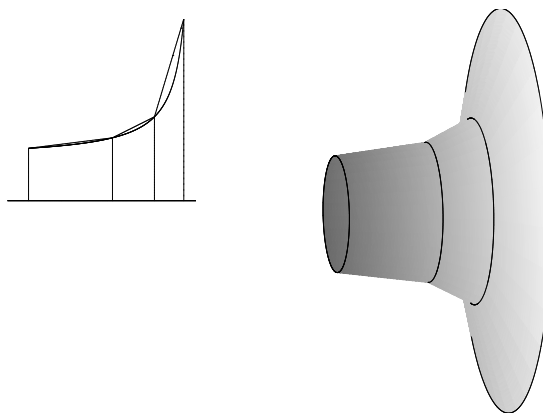
Vamos agora obter áreas das superfícies que recobrem os sólidos de revolução. O ponto de partida será o tronco de cone. A área de um tronco de cone reto, de geratriz g , com raio da base maior R e raio da base menor r é igual à área de um trapézio de altura g , com base maior $2\pi R$ e base menor $2\pi r$. Isto é,

$$A = \pi(R + r)g.$$



Seja S a superfície obtida da rotação do gráfico da função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cuja restrição ao intervalo aberto (a, b) é de classe C^1 (dizemos que uma função é de classe C^1 quando, além de ser diferenciável, a função derivada f' é contínua). Queremos atribuir uma área a S . Usaremos o seguinte processo de aproximação: para cada partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$, consideraremos os troncos de cone obtidos pela revolução dos segmentos de reta que unem os pontos sucessivos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$. Veja na figura a seguir.

A união desses troncos de cone aproximam a superfície de revolução, na medida em que tomamos partições mais finas.



A área da superfície obtida pela união dos cones é a soma das áreas dos cones:

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \pi (f(x_{i-1}) + f(x_i)) l_i,$$

onde $l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$ é o comprimento do segmento de reta unindo os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$, a geratriz do tronco que tem como raios das bases $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$.

Usaremos agora o fato de f ser uma função diferenciável. Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f'(\xi_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Assim, podemos trocar $f(x_i) - f(x_{i-1})$ por $f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ na fórmula que determina l_i , obtendo:

$$\begin{aligned} l_i &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}))^2} = \\ &= \sqrt{\Delta x_i^2 + (f'(\xi_i))^2 \Delta x_i^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i. \end{aligned}$$

Além disso, como f é contínua, sabemos que o intervalo limitado pelos números $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$ está contido na imagem de f . Isto é, a equação $f(x) = M$ tem solução no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para todos os valores de M entre os números $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$.

Em particular, existe $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que

$$f(\zeta_i) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2},$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Isso significa que ζ_i é a solução da equação $f(x) = M$, onde M é o ponto médio entre $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$. Ou seja, $2f(\zeta_i) = f(x_{i-1}) + f(x_i)$.

Com mais essa alteração, nossa fórmula para $\sum_{i=1}^n A_i$ ficou assim:

$$\sum_{i=1}^n A_i = 2\pi \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i.$$

Tomando o limite dessas somas de Riemann, obtemos a definição.



Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, cuja restrição ao intervalo (a, b) é de classe C^1 . A área da superfície gerada pela rotação do gráfico de f em torno do eixo Ox é definida pela integral

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Note que usamos o fato de f' ser uma função contínua, pois então a função $y = f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ é contínua, garantindo que as somas de Riemann convergem.

A esfera de raio r pode ser gerada pela revolução do gráfico da função $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ em torno do eixo Ox . Para aplicarmos a fórmula da área, precisamos da derivada de f :

$$f'(x) = \frac{1}{2} (r^2 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (f'(x))^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} = \\ &= \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \int dx.$$

Portanto, a área da superfície da esfera de raio r é

$$A = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^r = 4\pi r^2.$$

O exemplo que você verá a seguir é bem conhecido devido ao seu resultado surpreendente.

DEFINIÇÃO 2

EXEMPLO 6



EXEMPLO 7

Considere a superfície obtida pela rotação do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, com $x \in [1, \infty)$, em torno do eixo Ox . O objeto lembra uma trombeta, porém de comprimento infinito.



Vamos calcular o volume da região limitada pela trombeta. Para isso, usaremos a fórmula do volume, mas com a integral imprópria, para incluir toda a trombeta:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\infty} (f(x))^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \pi \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \frac{1}{x} dx = \pi \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^r = \\ &= \pi \lim_{r \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{r} = \pi. \end{aligned}$$

Como a integral imprópria converge, dizemos que a trombeta, apesar de comprimento infinito, tem π unidades cúbicas de volume.

Agora, usando a mesma abordagem, vamos calcular a área da superfície que a recobre.

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{-1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx.$$

Mas,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2} = 1.$$

Como $\int_1^{\infty} dx$ diverge, pelo teste do limite do quociente, sabemos que a integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx$ diverge.

Ou seja, a área que recobre a trombeta é infinita. Aqui reside toda a incongruência do exemplo: a trombeta pode ser preenchida com um pouco

mais do que 3 unidades cúbicas de tinta, mas, mesmo que use toda a tinta do universo, não pode ser pintada.

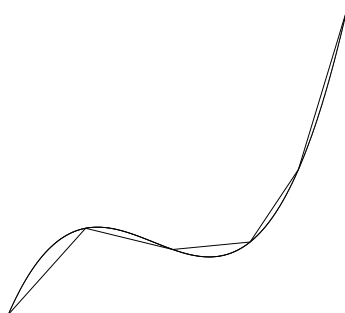
Bem, ao lidarmos com trombetas de comprimento infinito devemos esperar coisas surpreendentes.

22.5 Comprimento de curva

Vamos aproveitar os argumentos desenvolvidos na dedução da fórmula da área para definir o comprimento de uma curva que é o gráfico de uma função f , de classe C^1 .

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, diferenciável em (a, b) , cuja derivada é uma função contínua. Como antes, seja $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$.

Associada a essa partição, temos uma linha poligonal formada pela união dos segmentos de reta que unem os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$, sucessivamente. Essa linha é uma aproximação para o gráfico da função f .



O comprimento dessa linha poligonal é

$$\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Como antes, temos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \Delta x_i$$

e, portanto,

$$\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i.$$

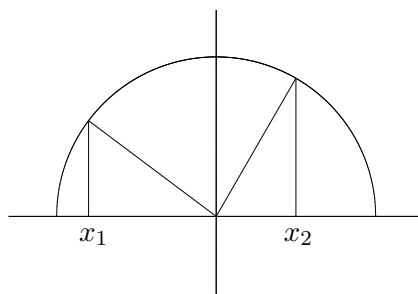
Assim podemos definir o comprimento do gráfico da função f , sobre o intervalo $[a, b]$, pelo limite dessas somas de Riemann:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

EXEMPLO 8

Cálculo do comprimento de um arco de setor de circunferência.

Vamos calcular o comprimento de um arco de circunferência de raio r , correspondente a um ângulo $\alpha < \pi$. Vamos posicionar tal setor de tal forma que ele esteja na parte superior de $x^2 + y^2 = r^2$, e sejam x_1 e x_2 os pontos correspondentes à projeção do setor no eixo Ox .



Então, o comprimento desse arco é

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx.$$

Para resolver essa integral, fazemos a substituição trigonométrica $x = r \sin \theta$, onde θ_1 e θ_2 são os ângulos que correspondem aos valores x_1 e x_2 , respectivamente: $x_1 = r \sin \theta_1$ e $x_2 = r \sin \theta_2$. Temos $dx = r \cos \theta d\theta$ e $\sqrt{r^2 - x^2} = r \cos \theta$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r^2 \cos \theta}{r \cos \theta} d\theta = \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} r d\theta = r(\theta_2 - \theta_1) = r\alpha. \end{aligned}$$

22.6 Uma nota sobre os métodos numéricos

As integrais da fórmula da área de uma superfície de rotação e do comprimento do gráfico de uma função envolvem o radical $\sqrt{1 + (f(x))^2}$. Esse tipo de fórmula costuma gerar integrais difíceis de serem abordadas pelas técnicas de integração. Isto é, as primitivas destas funções geralmente não se expressam como combinações de funções familiares, tais como polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logaritmos. Só para citar um exemplo, para calcular o comprimento da curva $y = \frac{1}{x}$, digamos de $x = 1$ até $x = 2$, precisamos integrar $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2} dx$, que não é muito amigável.

Na prática podemos lançar mão dos chamados métodos numéricos de integração ou, se dispusermos de um computador com algum programa matemático, que fará a tarefa de avaliar o resultado. Por exemplo,

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2} dx \approx 1,132090394.$$

Resumo das fórmulas

Seja R a região sob o gráfico da função contínua e positiva f definida em $[a, b]$.

O volume do sólido obtido da revolução de R em torno do eixo Ox é dado por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Se $a > 0$, volume do sólido obtido da revolução de R em torno do eixo Oy é dado por:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Se $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva que descreve as áreas das seções transversais perpendiculares ao eixo Ox de um dado sólido, então seu volume é dado por:

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Fórmula da área da superfície de revolução do gráfico da função de classe C^1 sobre o intervalo $[a, b]$:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Fórmula do comprimento do gráfico de f :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

22.7 Exercícios

1. Calcule a área do cone de raio da base r e de altura h .
2. Calcule o comprimento do segmento de parábola $y = f(x) = x^2$ sobre o intervalo $[0, a]$.
3. Em cada um dos casos a seguir, calcule a área da superfície obtida pela revolução do gráfico da função dada, sobre o intervalo indicado.
 - (a) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $[0, 2]$;
 - (b) $f(x) = e^x$, $[0, 1]$;
 - (c) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $[1, 4]$;
 - (d) $f(x) = \sin x$, $[0, \pi/2]$.
4. Ao girarmos a circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ em torno do eixo Ox , obtemos um toro. Calcule a área dessa superfície. Veja o exemplo 13.3.
5. Determine o comprimento da curva $f(x) = 2x^{3/2}$ sobre o intervalo $[0, 7]$.
6. Determine o comprimento do gráfico de $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ sobre o intervalo $[2, 4]$.
7. Calcule o volume limitado pela superfície gerada pelo gráfico da função $f(x) = x^{-2/3}$, para $x \geq 1$, e a área que a recobre, se possível.