MA22 - Unidade 1 - Resumo 2

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFMAT

Limites de Sequências de Números Reais

Definição

Sejam (x_n) uma sequência de números reais e L um número real. Dizemos que (x_n) *converge para* L, ou é *convergente*, e escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, quando para qualquer número real $r > 0$, existe um inteiro $n_0 \geq 1$, de modo que $x_n \in (L - r, L + r)$ para todo $n > n_0$.

Podemos expressar a definição na forma a seguir:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \iff \forall r > 0, \exists n_0 \geq 1 \mid n > n_0 \Longrightarrow |x_n - L| < r.$$

Exemplos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Realmente, seja $r > 0$ um número real positivo qualquer e seja $n_0 > 1$ um número natural tal que $n_0 > \frac{1}{r}$. Então, $\frac{1}{n_0} < r$ e, se $n > n_0$,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < r\,.$$

Unicidade do limite

Proposição

Se existir um número real L tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, então ele é único.

Limites de Sequências de Números Reais

Proposição

Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração.

Seja (x_n) uma sequência convergente, tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Escolha $r > 0$ algum número real, para o qual existe n_0 tal que, se $n > n_0$, $x_n \in (L - r, L + r)$, um intervalo limitado. Assim, os únicos termos da sequência que enventualmente não pertencem ao intervalo $(L - r, L + r)$, são os termos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, portanto em número finito. Basta agora tomar um intervalo limitado J contendo o intervalo $(L - r, L + r)$ e também os termos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Obtemos assim, que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo J e que, portanto, (x_n) é limitada. $\square$

Exemplo

A sequência $(x_n = (-1)^n\, n)$ não é convergente, pois não é limitada.

Limite de Subsequência

Proposição

Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ e seja (x_{n_i}) uma subsequência qualquer. Então $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = L$.

Demonstração.

Seja $r > 0$ um número real. Logo, existe n_0 tal que $x_n \in (L - r, L + r)$ para todo $n > n_0$. Por outro lado existe i_0 tal que se $i > i_0$, então $n_i > n_0$. Portanto, se $i > i_0$, temos que $x_{n_i} \in (l - r, l + r)$, que mostra que $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = l$. $\square$

Exemplo

A sequência $\left(x_n = \frac{1}{n} + \cos(n\pi)\right)$ não é convergente, pois $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = -1$.

Axioma da Completude dos Números Reais

O Axioma da Completude dos Números Reais pode ser enunciado usando o conceito de limite de sequências.

Axioma

Toda sequência monótona e limitada de números reais converge para algum número real L.

Proposição

Proposição

Toda sequência (x_n) possui uma subsequência monótona.

Demonstração.

Considere os dois seguintes conjuntos:

$$A_1 = \{p \in \mathbb{N};\ \text{existe } n > p \text{ tal que } x_n \geq x_p\} \quad \text{e}$$

$$A_2 = \{p \in \mathbb{N};\ \text{existe } n > p \text{ tal que } x_n \leq x_p\}.$$

É claro que se tem $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$. Temos duas possibilidades:

a) A_1 é infinito. Neste caso, é imediato extrair uma susequência não decrescente de (x_n).

b) A_1 é vazio ou finito. Neste caso, A_2 é necessariamente infinito e, portanto, podemos extrair de (x_n) uma subsequência não crescente.

$\square$