MA22 - Unidade 6 - Resumo

Luiz Manoel Figueiredo
Mário Olivero

PROFMAT - SBM

29 de Março de 2013

Regra de Substituição

Proposição (Regra de Substituição) Sejam f e g duas funções para as quais faz sentido formar $g \circ f$. Seja a um número real tal que $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Suponha que $\lim_{y\to b} g(y) = L$ e que exista um um intervalo da forma $(a-r, a+r)$ tal que $f(x) \neq b$ para todo x na interseção do domínio de f com o conjunto $(a-r, a+r) \setminus \{a\}$. Então

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = L.$$

Prova Seja (x_n) uma sequência qualquer de números reais distintos de a no domínio de f que converge para a. Como (x_n) converge para a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a-r, a+r)$ para todo $n \geq n_0$. Logo, a sequência $(y_n)_{n\geq n_0}$, onde $y_n = f(x_n)$, tem seus elementos no domínio de g, distintos de a, e converge para b, já que $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Portanto, como $\lim_{y\to b} g(y) = L$, temos que a sequência $(g(f(x_n)))$ converge para L, o que mostra que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = L$.

Regra de Substituição

Exemplo A regra de substituição nos permite calcular, por exemplo, $\lim_{x\to a}\cos(p(x))$, no qual $p(x)$ é um polinômio não constante.
De, fato consideremos o polinômio não constante $q(x) = p(x) - b$, onde $b = p(a)$, do qual a é uma raiz. Como um polinômio não nulo tem um número finito de raízes, é claro que podemos encontrar um número real $r > 0$ tal que $q(x)$ não se anula em $(a - r, a + r) \setminus \{a\}$, ou seja, $p(x) \neq p(a) = b$. Como $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$ e $\lim_{y\to b}\cos y = \cos b$, temos que

$$\lim_{x\to a}\cos(p(x)) = \cos(p(a)).$$

Cálculo de Limites de Sequências

Exemplo Seja $a > 0$. Então, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Para $a > 1$. Seja (d_n) a sequência $d_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Temos que $d_n > 0$. Da identidade

$$a - 1 = \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}} + \cdots + \sqrt[n]{a} + 1\right),$$

obtemos que $a - 1 < \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) n = d_n n$.

Daí,

$$0 < d_n < \frac{a-1}{n}.$$

Pela propriedade do confronto, $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, o que implica que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

O limite também vale 1 se $a = 1$. Suponha $0 < a < 1$. Logo, $\frac{1}{a} > 1$. Pelo caso já calculado, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Cálculo de Limites de Sequências

Proposição Seja $a > 0$ um número real. Tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < a < 1, \\ \infty, & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

Prova O caso $a > 1$. Escrevamos $h = a - 1$, logo $a = 1 + h$ com $h > 0$. Pela desigualdade de Bernouilli temos que

$$a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Como $\lim_{n\to\infty}(1 + nh) = \infty$, temos pela propriedade de limites que $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$.
O caso $0 < a < 1$. Logo, $\frac{1}{a} > 1$. Do que acabamos de provar, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = \infty,$$

logo da propriedade de limite,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = 0.$$

Limites de Funções

Proposição Seja $f : (d, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Suponha que exista uma sequência (x_n) de elementos em (d, ∞) tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. Então $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Prova Devemos mostrar que dada uma sequência (y_m) tal que $\lim_{m\to\infty} y_m = \infty$, então $\lim_{m\to\infty} f(y_m) = \infty$.
Seja M um número real positivo qualquer. Como $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$, existe n_0 tal que $f(x_{n_0}) > M$. Se (y_m) é uma sequência tal que $\lim_{m\to\infty} y_m = \infty$, então existe m_0 tal que para todo $m \geq m_0$ se tenha $y_m > x_{n_0}$. Como f é crescente, temos

$$m > m_0 \Rightarrow y_m \geq x_{n_0} \Rightarrow f(y_m) \geq f(x_{n_0}) > M,$$

o que prova que $\lim_{m\to\infty} f(y_m) = \infty$.

Limites de Funções

Proposição

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Exemplo Vamos considerar a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, em que a é um número real positivo diferente de 1.
Se $a > 1$, sabendo que a exponencial é uma função crescente e que $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$. Então

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \quad \text{para todo } a > 1.$$

No caso em que $0 < a < 1$, temos que $\frac{1}{a} > 1$ e portanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x = \infty,$$

donde

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0.$$