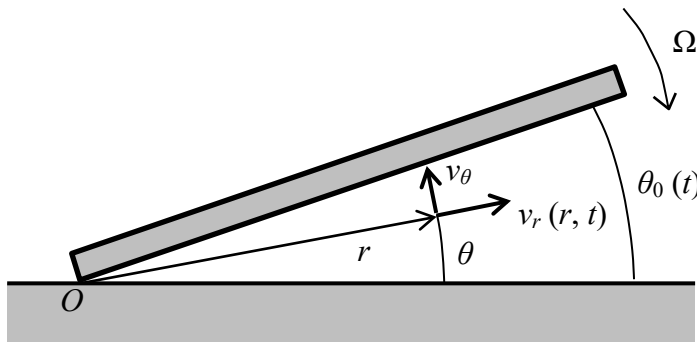


1. (3 pontos) Uma placa plana está articulada no ponto O a uma superfície horizontal. A placa articulada forma em um instante de tempo um ângulo θ_0 e rota com uma velocidade angular $\Omega = -\frac{d\theta_0}{dt}$ na direção horária, como mostrado na figura, espremendo um fluido incompressível entre as duas superfícies. Supondo que o problema é bi-dimensional e supondo que a componente da velocidade radial não depende da posição angular, isto é, $v_r(r, \theta, t) = v_r(r, t)$, encontrar as componentes da velocidade v_r e v_θ , para $0 \leq \theta \leq \theta_0$.

Dica: Qual a velocidade tangencial na placa inferior $v_\theta(r, \theta = 0, t)$ e na placa superior $v_\theta(r, \theta = \theta_0, t)$?

Equação de continuidade, coordenadas cilíndricas: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$



Solução:

Por ser o problema bi-dimensional, a equação de continuidade se reduz a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Como v_r não depende da posição angular, podemos integrar em θ , resultando:

$$v_\theta = -\theta \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + f(r, t)$$

Da condição de contorno $v_\theta(r, \theta = 0, t) = 0$ resulta $f(r, t) = 0$.

Da condição de contorno $v_\theta(r, \theta = \theta_0, t) = r \frac{d\theta_0}{dt} = -\Omega r$ resulta $-\theta_0 \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = -\Omega r$. Integrando em r , resulta:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = \frac{\Omega}{\theta_0} r \Rightarrow r v_r = \frac{\Omega}{2\theta_0} r^2 + g(\theta, t)$$

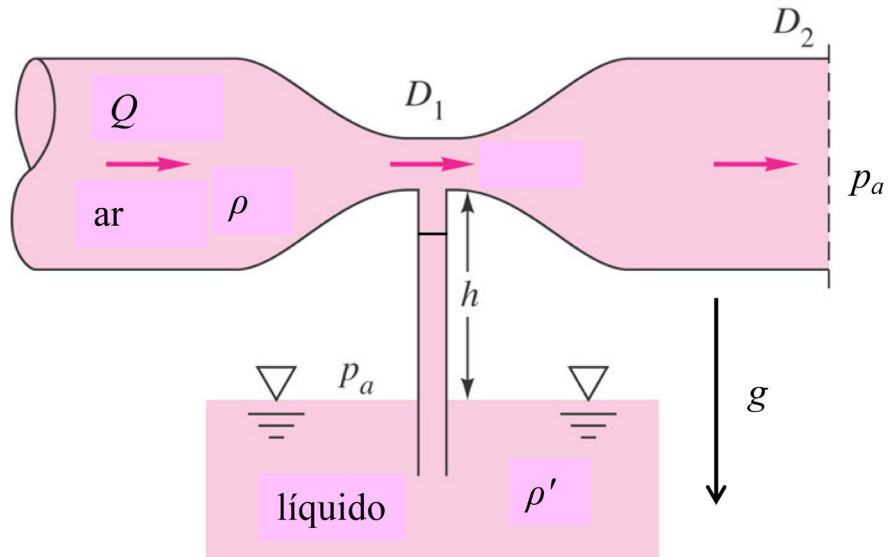
Como v_r não depende de θ , deve ser $g(\theta, t) = 0$. Assim, resulta finalmente:

$$v_r = \frac{\Omega}{2\theta_0} r$$

Substituindo na relação para v_θ , resulta:

$$v_\theta = -\frac{\theta r \Omega}{\theta_0}$$

2. (2 pontos) Um tubo convergente-divergente, chamado venturi, desenvolve um escoamento de ar de baixa pressão na garganta, capaz de aspirar um fluido mais pesado para acima de um reservatório, como mostrado na figura. Esse é o princípio de funcionamento das pistolas de pulverização de pintura. As massas específicas do ar e do líquido são respectivamente ρ e ρ' , enquanto os diâmetros da garganta e da descarga (na atmosfera a pressão p_a) são respectivamente D_1 e D_2 . Se a altura de elevação acima do nível da líquido no reservatório é h e a aceleração gravitacional é g , deduzir uma expressão para a vazão volumétrica de ar Q suficiente para começar a trazer fluido do reservatório para a garganta. Desprezar as perdas.



Bernoulli: $p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z = cte$

Solução:

Da equação de Bernoulli na linha de corrente entre a garganta e a descarga:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_a + \frac{1}{2} \rho V_2^2 \Rightarrow p_a - p_1 = \frac{1}{2} \rho V_1^2 \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 \right]$$

Da hidrostática na coluna de líquido: $p_a = p_1 + \rho' g h \Rightarrow p_a - p_1 = \rho' g h$

Da equação de continuidade entre a garganta e a descarga:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 = \beta^2, \text{ onde } \beta = \frac{D_1}{D_2} < 1.$$

Eliminando a diferença de pressões, resulta: $V_1 = \left[\frac{2 \frac{\rho'}{\rho} g h}{1 - \beta^4} \right]^{1/2} \Rightarrow Q = \frac{\pi D_1^2}{4} \left[\frac{2 \frac{\rho'}{\rho} g h}{1 - \beta^4} \right]^{1/2}$

3. (5 pontos) Dois líquidos imiscíveis 1 e 2 de espessuras h_1 e h_2 estão sob cisalhamento entre uma placa fixa e outra móvel com velocidade U , como na figura. A gravidade é desprezada e o escoamento é completamente desenvolvido (não há variação da velocidade com x). Supondo viscosidades conhecidas dos fluidos μ_1 e μ_2 , queremos encontrar o gradiente de pressão constante $\frac{dp}{dx}$ necessário para que o líquido 1 escoe para a esquerda e o líquido 2 escoe para a direita, assim como os campos de velocidades e vazões por unidade de comprimento na direção normal. Dica: na interface tanto a velocidade quanto a tensão de cisalhamento são contínuas.

Resolver o exercício seguindo os seguintes passos:

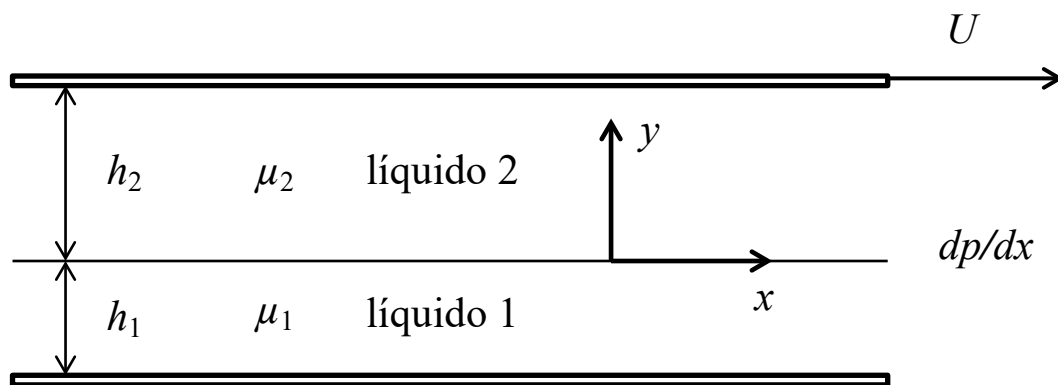
- a) Determinar os perfis de velocidade nas regiões $-h_1 \leq y \leq 0$ e $0 \leq y \leq h_2$ em função de U , $\frac{dp}{dx}$ e do resto dos parâmetros aplicando condições de contorno adequadas de velocidade nas paredes e na interface.

- b) Encontrar $\frac{dp}{dx}$ em função de U e do resto dos parâmetros aplicando aos perfis de velocidade a condição de contorno adequada de tensão de cisalhamento na interface;
- c) Eliminar $\frac{dp}{dx}$ e reescrever os perfis de velocidades adimensionais na forma $u^* = u^*(y^*, h_2^*, \mu_2^*)$, onde $u^* = \frac{u}{U}$, $y^* = \frac{y}{h_1}$, $h_2^* = \frac{h_2}{h_1}$ e $\mu_2^* = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ nas regiões $-1 \leq y^* \leq 0$ e $0 \leq y^* \leq h_2^*$;
- d) Calcular as vazões por unidade de comprimento na direção normal Q_1 e Q_2 e expressar o resultado em forma adimensional $Q_1^* = \frac{Q_1}{U h_1}$ e $Q_2^* = \frac{Q_2}{U h_1}$.

Equação de Navier-Stokes direção x : $\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho G_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$

Tensão de cisalhamento $\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$

Ajudas para o cálculo: $\int_{-1}^0 y^* (1 + y^*) dy^* = -\frac{1}{6}$; $\int_0^{h_2^*} y^* \left(1 - \frac{1}{h_2^*} y^* \right) dy^* = \frac{1}{6} h_2^{*2}$



Solução:

- a) O perfil de velocidade para a região $-h_1 \leq y \leq 0$ surge de resolver:

$$-\frac{dp}{dx} + \mu_1 \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu_1} \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu_1} \frac{dp}{dx} y + A \quad ; \quad u = \frac{1}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} y^2 + A y + B$$

com condições de contorno:

$$u(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$u(-h_1) = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} h_1^2 - A h_1 = 0 \Rightarrow A = \frac{h_1}{2\mu_1} \frac{dp}{dx}$$

Substituindo, obtemos:

$$u(y) = \frac{h_1^2}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h_1} \left(1 + \frac{y}{h_1} \right) \quad -h_1 \leq y \leq 0$$

Para a região $0 \leq y \leq h_2$ o perfil de velocidade resulta:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu_2} \frac{dp}{dx} y + C \quad ; \quad u = \frac{1}{2\mu_2} \frac{dp}{dx} y^2 + C y + D$$

com condições de contorno:

$$u(0)=0 \Rightarrow D=0$$

$$u(h_2)=U \quad ; \quad \frac{1}{2\mu_2} \frac{dp}{dx} h_2^2 + C h_2 = 0 \Rightarrow C = \frac{U}{h_2} - \frac{h_2}{2\mu_2} \frac{dp}{dx}$$

Substituindo, obtemos:

$$u(y) = U \frac{y}{h_2} - \frac{h_2^2}{2\mu_2} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h_2} \left(1 - \frac{y}{h_2} \right) \quad 0 \leq y \leq h_2$$

b) As tensões de cisalhamento na interface τ_1 e τ_2 resultam:

$$\tau_1 = \mu_1 \frac{du}{dy}(0) = \mu_1 A = \frac{h_1}{2} \frac{dp}{dx}$$

$$\tau_2 = \mu_2 \frac{du}{dy}(0) = \mu_2 C = \frac{\mu_2 U}{h_2} - \frac{h_2}{2} \frac{dp}{dx}$$

Da continuidade das tensões de cisalhamento na interface, deve ser $\tau_1 = \tau_2$, resultando:

$$\frac{h_1}{2} \frac{dp}{dx} = \frac{\mu_2 U}{h_2} - \frac{h_2}{2} \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{2\mu_2 U}{h_2(h_1 + h_2)}$$

c) Substituindo nos perfis de velocidade calculados no item a), temos que:

$$\frac{h_1^2}{2\mu_1} \frac{dp}{dx} = \frac{h_1^2}{2\mu_1} \frac{2\mu_2 U}{h_2(h_1 + h_2)} = \frac{\mu_2^* U}{h_2^*(1 + h_2^*)}$$

$$\frac{h_2^2}{2\mu_2} \frac{dp}{dx} = \frac{h_2^2}{2\mu_2} \frac{2\mu_2 U}{h_2(h_1 + h_2)} = \frac{h_2^* U}{(1 + h_2^*)} \quad ; \quad \frac{y}{h_2} = \frac{1}{h_2^*} \frac{y^*}{h_1} = \frac{1}{h_2^*} y^*$$

de maneira que os perfis adimensionais resultam:

$$u^*(y^*) = \frac{u}{U} = \frac{\mu_2^*}{h_2^*(1 + h_2^*)} y^* (1 + y^*) \quad -1 \leq y^* \leq 0$$

$$u^*(y^*) = \frac{u}{U} = \frac{y^*}{h_2^*} - \frac{1}{(1 + h_2^*)} y^* \left(1 - \frac{1}{h_2^*} y^* \right) \quad 0 \leq y^* \leq h_2^*$$

d) As vazões por unidade de comprimento na direção normal resultam:

$$Q_1 = \int_{-h_1}^0 u(y) dy = U h_1 \int_{-1}^0 u^*(y^*) dy^* = U h_1 \frac{\mu_2^*}{h_2^*(1 + h_2^*)} \int_{-1}^0 y^* (1 + y^*) dy^* = -\frac{1}{6} U h_1 \frac{\mu_2^*}{h_2^*(1 + h_2^*)}$$

$$Q_1^* = \frac{Q_1}{U h_1} = -\frac{1}{6} \frac{\mu_2^*}{h_2^*(1 + h_2^*)}$$

$$Q_2 = \int_0^{h_2} u(y) dy = U h_1 \int_0^{h_2^*} u^*(y^*) dy^* = U h_1 \left[\frac{1}{h_2^*} \int_0^{h_2^*} y^* dy^* - \frac{1}{(1 + h_2^*)} \int_0^{h_2^*} y^* \left(1 - \frac{1}{h_2^*} y^* \right) dy^* \right] =$$

$$U h_1 \left[\frac{h_2^*}{2} - \frac{1}{6} \frac{h_2^{*2}}{(1 + h_2^*)} \right]$$

$$Q_2^* = \frac{Q_2}{U h_1} = \frac{h_2^*}{2} - \frac{1}{6} \frac{h_2^{*2}}{(1 + h_2^*)}$$