

PROBABILIDADE

Aulas 6, 7 e 8 - Prof. Regina Meyer Branski

Aula de hoje!

- Diferenciar variáveis aleatórias discretas e contínuas
- Construir uma distribuição de probabilidade discreta e seu gráfico
- Identificar distribuição de probabilidade
- Encontrar a média, a variância e o desvio padrão de uma distribuição de probabilidade discreta
- Encontrar o valor esperado de uma distribuição de probabilidade discreta

Objetivos

3

- Distribuição de Probabilidade Discreta
 - Como criar e usar
 - Calcular o centro e a variabilidade
 - Conhecer a forma

Variáveis Aleatórias

- Representam um valor numérico associado à cada resultado de um experimento de probabilidade

- Denominado por “ x ”
 - ***Discreta***

 - ***Contínua***

Variáveis Aleatórias

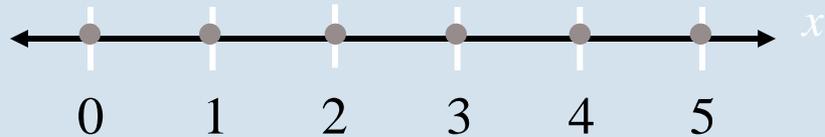
5

- Variável Aleatória Discreta
 - ▣ Tem um número finito ou contável de possíveis resultados

- Variável Aleatória Contínua
 - ▣ Tem um número incontável de possíveis resultados representados por um intervalo na reta numérica.

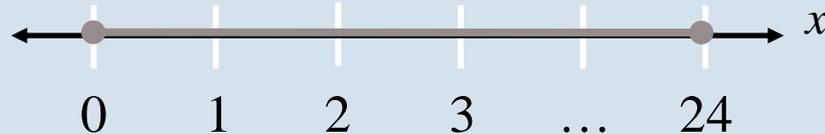
Variáveis Aleatórias Discretas

- Número de ligações que um vendedor faz em um dia
- $x = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$



Variáveis Aleatórias Contínuas

- Tempo diário (em horas) que um vendedor passa fazendo ligações
- $x = \{\text{qualquer número entre 0 e 24 horas}\}$



Exercício 6.1

- Decida se a variável aleatória “ x ” é discreta ou contínua
 - ▣ x representa os títulos da Bolsa de Valores que tiveram aumento no valor de suas ações
 - ▣ x representa o volume de água em um contêiner de 10 mil litros de capacidade.

Exercício 6.2

9

- Decida se a variável é discreta ou contínua
 1. x é o tempo necessário para terminar uma prova
 2. x representa o número de músicas que uma banda tocou em um festival de rock

Distribuição de Probabilidade Discreta

- Lista cada valor possível que a variável aleatória pode assumir junto com sua probabilidade
- Condições
 - ▣ Probabilidade deve estar entre 0 e 1

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

- ▣ Soma das Probabilidades deve ser igual a 1

$$\sum P(x) = 1$$

Construindo uma distribuição de probabilidade discreta

1. Fazer uma distribuição de frequência para os resultados possíveis.
2. Encontrar a soma das frequências.
3. Encontrar a probabilidade de cada resultado dividindo sua frequência pela soma das frequências.
4. Cada probabilidade deve estar entre 0 e 1 e a soma deve ser 1.

Construindo uma distribuição de probabilidade discreta

12

- Você é um meteorologista que está fazendo uma previsão de tempo para três dias. Levando em consideração que a ocorrência de chuva em um dia é independente da ocorrência de chuva em outro dia, você determinou que há 40% de probabilidade de chover em cada um dos três dias (e 60% de não chover). Qual a probabilidade de haver chuva em 0, 1, 2 ou 3 dos dias?
 - ▣ Construa um diagrama de árvore
 - ▣ Construa uma tabela de Distribuição de Probabilidade
 - ▣ Construa um gráfico de barras

Exercício 6.3

Um psicólogo industrial aplicou um teste de personalidade para identificar características passivo-agressivas em 150 funcionários. Os indivíduos recebiam pontuações de 1 a 5, em que 1 era extremamente passivo e 5 extremamente agressivo. Uma pontuação 3 indicava neutralidade. Construa uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória x e represente graficamente a distribuição usando um histograma

Pontuação x	Frequência f
1	24
2	33
3	42
4	30
5	21

Exercício 6.4

14

- Uma empresa rastreia todos os dias o número de vendas que os novos colaboradores fazem durante um período de 100 dias de experiência. Os resultados de um novo colaborador estão indicados. Faça a distribuição de probabilidade e desenhe a representação gráfica

Distribuição de Frequência

Vendas por dia, x	Número de dias, f
0	16
1	19
2	15
3	21
4	9
5	10
6	8
7	2

Exercício 6.5

15

- Verifique se a distribuição abaixo é uma distribuição de probabilidade

Dias de Chuva	Probabilidade
0	0,216
1	0,432
2	0,288
3	0,064

Média, Variância e Desvio Padrão

16

□ Média

$$\mu = \sum x * P(x)$$

Exercício 6.6

17

- No quadro está a distribuição de probabilidade do teste de personalidade. Encontre a pontuação média da variável aleatória. O que você pode concluir?

x	1	2	3	4	5
P(x)	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

Variância e Desvio Padrão

18

□ Variância

$$\sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 P(x)$$

□ Desvio Padrão

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Exercício 6.7

19

- No quadro está apresentada a distribuição de probabilidade do teste de personalidade. Encontre a variância e o desvio padrão.

x	1	2	3	4	5
P(x)	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14

Valor Esperado

20

□ Média = Valor Esperado

$$E(x) = \mu = \sum x * P(x)$$

Exercício 6.8

21

- Em uma rifa, 1.500 bilhetes são vendidos a R\$ 2 cada. Os bilhetes concorrem para quatro prêmios: R\$ 500, R\$ 250, R\$ 150 e R\$ 75. Se você comprar um bilhete, qual valor esperado do seu ganho?

Exercício 6.9

22

- Em um sorteio, 2000 bilhetes são vendidos por \$ 5 cada para prêmios de \$ 2000, \$ 1000, \$ 500, \$ 250, \$ 100. Qual o lucro esperado na compra de 1 bilhete? R. -\$3,08

Objetivos

- Diferenciar variáveis aleatórias discretas de contínuas
- Construir uma distribuição de probabilidade discreta e seu gráfico
- Determinar se uma distribuição é uma distribuição de probabilidade
- Encontrar a média, a variância e o desvio padrão de uma distribuição de probabilidade discreta
- Encontrar o valor esperado de uma distribuição de probabilidade discreta

DISTRIBUIÇÕES BINOMIAIS

Aula 7

Objetivos

- ◉ Determinar se o experimento de probabilidade é binomial
- ◉ Encontrar probabilidades binomiais usando a fórmula
- ◉ Encontrar probabilidades binomiais usando tecnologia e uma tabela binomial
- ◉ Encontrar a média, a variância e o desvio padrão de uma distribuição de probabilidade binomial

Experimentos binomiais

- O experimento é repetido um número fixo de tentativas; cada tentativa é independente das outras.
- Há apenas dois resultados possíveis: sucesso (S) ou falha (F).
- A probabilidade de um sucesso $P(S)$ é a mesma para cada tentativa.
- A variável aleatória x conta o número de tentativas bem-sucedidas.

Notação para Experimentos Binomiais

27

Símbolo	Descrição
n	Número de vezes em que a tentativa é repetida
$p=P(S)$	Probabilidade de sucesso em uma tentativa única
$q=P(F)$	Probabilidade do fracasso em uma tentativa única ($q=1-p$)
x	Variável aleatória representa a contagem dos números de sucessos nas n tentativas: $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

De um baralho de cartas comum, você pega uma carta, verifica se o naipe é paus e devolve a carta no baralho. Você repete o experimento 5 vezes.

Notações para Experimentos Binomiais

28

De um baralho de cartas comum, você pega uma carta, verifica se o naipe é paus ou não e devolve a carta no baralho. Você repete o experimento 5 vezes.

Símbolo	Descrição
n	5
$p=P(S)$	$1/4$
$q=P(F)$	$3/4$
x	Variável aleatória (número de naipes de paus selecionados) 0, 1, 2, 3, 4, 5

Exercício 7.1

Decida se o experimento é binomial. Se for, especifique os valores de n , p e q e liste os valores possíveis da variável aleatória x .

a) Um procedimento cirúrgico tem uma chance de sucesso de 85%. Um médico realiza o procedimento em oito pacientes. A variável aleatória representa o número de cirurgias bem-sucedidas.

Exercício 7.1

b) Uma jarra contém cinco bolinhas vermelhas, nove bolinhas azuis e seis bolinhas verdes. Você pega aleatoriamente três bolinhas do jarro, *sem recolocá-las*. A variável aleatória representa o número de bolinhas vermelhas.

Exercício 7.2

31

Você faz um teste de múltipla escolha com 10 questões. Cada questão tem quatro respostas possíveis, mas somente uma é correta. Para completar o teste você escolhe uma resposta aleatoriamente para cada questão. A variável aleatória representa o número de respostas corretas.

- Identifique uma tentativa do experimento e o que é um sucesso
- O experimento satisfaz as quatro condições de um experimento binomial?
- Identifique n , p , q e os valores possíveis para x

Fórmula de Probabilidade Binomial

Probabilidade de encontrar x sucessos em n tentativas

$$P(x) = C_{(n,x)} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)! x!} p^x q^{n-x}$$

Exercício 7.3

Cirurgias de microfraturas no joelho têm 75% de chance de sucesso em pacientes com problemas degenerativos. A cirurgia é realizada em três pacientes. Encontre a probabilidade da cirurgia ser bem-sucedida em exatamente dois pacientes

Fonte: Illinois Orthopaedic and Sportsmedicine Centers

Método 1: Diagrama de Árvore e Regra da Multiplicação

Método 2: Fórmula da Probabilidade Binomial



Exercício 7.4

34

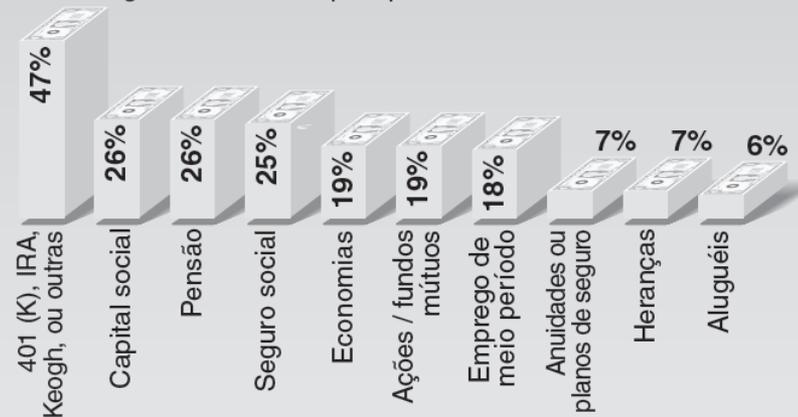
- Uma carta é escolhida em um baralho comum e recolocada dentro dele. Esse experimento é repetido 5 vezes. Encontre a probabilidade de que seja selecionada três cartas de paus. Use a fórmula...

Exercício 7.5

Pesquisa nos EUA pediu que trabalhadores indicassem a fonte de seus rendimentos durante a aposentadoria. Os resultados estão no gráfico. Sete trabalhadores que participaram da pesquisa foram escolhidos aleatoriamente e responderam se esperam poder contar com o Seguro Social como fonte de renda. Crie uma distribuição de probabilidade binomial para o número de trabalhadores que responderam sim.

Principais fontes de renda para aposentadoria, segundo expectativas

Ainda que mais da metade dos trabalhadores espere que a 401(K), IRA, Keogh, ou outras contas de rendimento para aposentadoria sejam a maior fonte de renda, aproximadamente um em cada quatro trabalhadores contará com o seguro social como a principal fonte de renda.



(Fonte: The Gallup Organization.)

Exercício 7.6 (use tecnologia)

36

Resultados de pesquisa recente mostram que 59% das casas usam grelha a gás. Se você selecionar 100 casas aleatoriamente, qual a probabilidade de que exatamente 65 casas usem grelha a gás? Use uma ferramenta tecnológica para encontrar a probabilidade. R. $0,039107 = 0,04$

Excel: DISTRBINOM

Minitab: Probability Distribution Function

Distribuição Binomial (Excel)

37

DISTRBINOM(num s; tentativas; probabilidade; Cumulativo)

Número tentativas bem sucedidas	num s	x	65
Número de tentativas independentes	tentativas	n	100
Probabilidade de sucesso em uma tentativa		p	0,59
Cumulativo	Verdadeiro ou Falso		Falso

Verdadeiro = retorna distribuição cumulativa, que exista no máximo x sucesso
Falso = retorna a função massa de probabilidade, que exista x sucesso

Exercício 7.7 (use a fórmula)

Uma pesquisa indica que 41% das mulheres nos EUA consideram leitura como seu lazer favorito. Você seleciona aleatoriamente quatro mulheres dos EUA e pergunta se ler é o passatempo preferido delas. Encontre a probabilidade de que pelo menos duas delas respondam sim



Exercício 7.8

- Uma pesquisa indica que 21% dos homens tem a pescaria como atividade de lazer preferida. Você escolhe aleatoriamente 4 homens e pergunta se eles tem a pescaria como atividade de lazer preferida. Encontre a probabilidade de que:
 - Exatamente dois deles respondam sim. R.0,217
 - No mínimo dois deles respondam sim. R. 0,283
 - Menos que dois deles respondam sim. R.0,717

Exemplo: probabilidade binomial usando tabela

Cerca de 30% dos trabalhadores gastam menos de 15 minutos para ir e voltar ao trabalho. Você seleciona aleatoriamente seis trabalhadores. Qual é a probabilidade de exatamente três deles gastarem menos de 15 minutos indo e voltando do trabalho? Use uma tabela para encontrar a probabilidade.

Fonte: U.S. Census Bureau



Exemplo: probabilidade binomial usando tabela

Cerca de 30% dos adultos trabalhadores gastam menos de 15 minutos para ir e voltar ao trabalho. Você seleciona aleatoriamente seis adultos trabalhadores. Qual é a probabilidade de exatamente três deles gastarem menos de 15 minutos indo e voltando do trabalho? Use uma tabela para encontrar a probabilidade.

Fonte: U.S. Census Bureau

Binomial com $n = 6$, $p = 0,30$, $x = 3$



Exemplo: probabilidade binomial usando tabela

□ Tabela Distribuição Binomial



		<i>p</i>												
<i>n</i>	<i>x</i>	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
2	0	0,980	0,902	0,810	0,723	0,640	0,563	0,490	0,423	0,360	0,303	0,250	0,203	0,160
	1	0,020	0,095	0,180	0,255	0,320	0,375	0,420	0,455	0,480	0,495	0,500	0,495	0,480
	2	0,000	0,002	0,010	0,023	0,040	0,063	0,090	0,123	0,160	0,203	0,250	0,303	0,360
3	0	0,970	0,857	0,729	0,614	0,512	0,422	0,343	0,275	0,216	0,166	0,125	0,091	0,064
	1	0,029	0,135	0,243	0,325	0,384	0,422	0,441	0,444	0,432	0,408	0,375	0,334	0,288
	2	0,000	0,007	0,027	0,057	0,096	0,141	0,189	0,239	0,288	0,334	0,375	0,408	0,432
	3	0,000	0,000	0,001	0,003	0,008	0,016	0,027	0,043	0,064	0,091	0,125	0,166	0,216
6	0	0,941	0,735	0,531	0,377	0,262	0,178	0,118	0,075	0,047	0,028	0,016	0,008	0,004
	1	0,057	0,232	0,354	0,399	0,393	0,356	0,303	0,244	0,187	0,136	0,094	0,061	0,037
	2	0,001	0,031	0,098	0,176	0,246	0,297	0,324	0,328	0,311	0,278	0,234	0,186	0,138
	3	0,000	0,002	0,015	0,042	0,082	0,132	0,185	0,236	0,276	0,303	0,312	0,303	0,276
	4	0,000	0,000	0,001	0,006	0,015	0,033	0,060	0,095	0,138	0,186	0,234	0,278	0,311
	5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,004	0,010	0,020	0,037	0,061	0,094	0,136	0,187
	6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,008	0,016	0,028	0,047

Exercício 7.9

43

- Quarenta e cinco por cento de todas as pequenas empresas brasileiras tem um site na internet. Se você selecionar 10 pequenas empresas de forma aleatória, qual a probabilidade de que exatamente quatro delas tenham site na Internet? Use a tabela. R. 0,238

Exemplo: gráfico de distribuição binomial

Cinquenta e nove por cento dos lares nos EUA são assinantes de TV a cabo. Você seleciona aleatoriamente seis lares e pergunta se a casa tem TV a cabo. Construa uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória x . Depois, faça um gráfico da distribuição. (Fonte: Kagan Research, LLC.)



Exemplo: gráfico de distribuição binomial

Cinquenta e nove por cento dos lares nos EUA são assinantes de TV a cabo. Você seleciona aleatoriamente seis lares e pergunta se a casa tem TV a cabo. Construa uma distribuição de probabilidade para a variável aleatória x . Depois, faça um gráfico da distribuição. (Fonte: Kagan Research, LLC.)

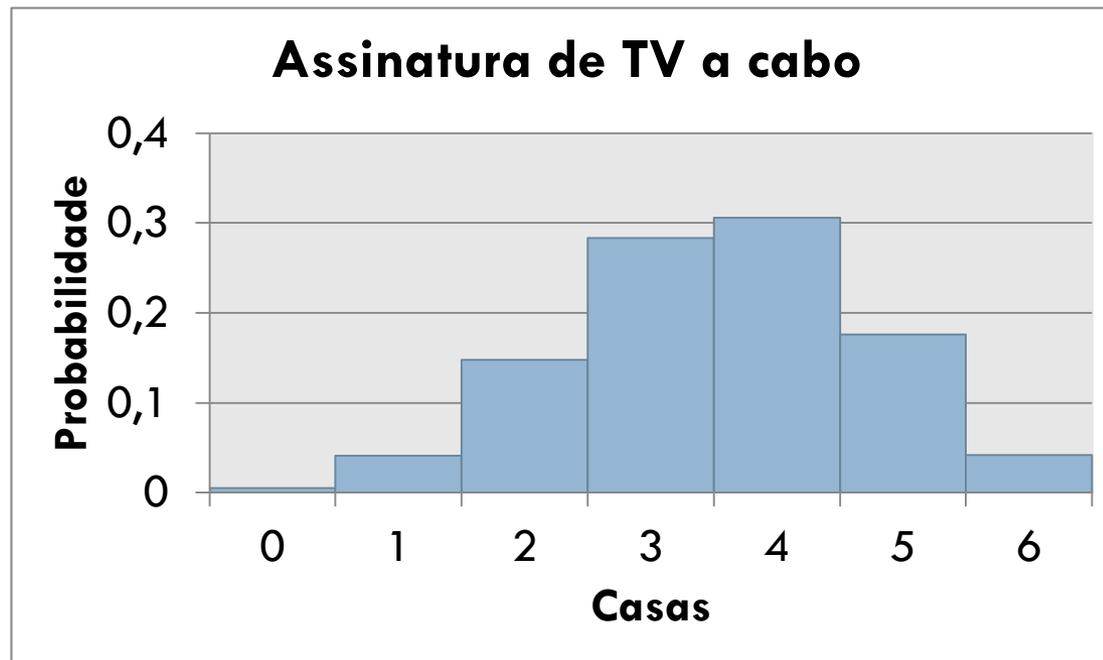
- $n = 6, p = 0,59, q = 0,41$
- Probabilidade para cada valor de x



x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	0,005	0,041	0,148	0,283	0,306	0,176	0,042

Exemplo: gráfico de distribuição binomial

Histograma



Parâmetros Populacionais da Distribuição Binomial

- **Média:** $\mu = np$

- **Variância:** $\sigma^2 = npq$

- **Desvio padrão:**

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

Exercício 7.10

Na Pensilvânia, cerca de 56% dos dias em um ano são nublados. Encontre a média, variância e desvio padrão para o número de dias nublados durante o mês de junho. Interprete os resultados e determine quaisquer valores incomuns. (*Fonte: National Climatic Data Center.*)



Exercício 7.11

49

- Em São Francisco, Califórnia, 44% dos dias em um ano apresentam tempo limpo. Encontre a média, variância e desvio padrão para o número de dias limpos durante o mês de maio. Interprete os resultados e identifique valores incomuns.

Exercício 7.12

50

10% dos adultos dizem que os biscoitos de flocos de aveia são seus preferidos. Você seleciona 12 adultos aleatoriamente e pergunta qual é o nome do biscoito preferido de cada um deles. Encontre a probabilidade de que o número dos que dizem preferir biscoitos de flocos de aveia seja

- a) exatamente quatro (R. 0,021)
- b) no mínimo quatro (R. 0,026)
- c) inferior a quatro (R. 0,974)

Objetivos

- Determinar se o experimento de probabilidade é binomial
- Encontrar probabilidades binomiais usando a fórmula
- Encontrar probabilidades binomiais usando tecnologia e tabela binomial
- Encontrar média, variância e desvio padrão

OUTRAS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

Objetivos

- Distribuição Geométrica
- Distribuição de Poisson

Distribuição Geométrica

□ Condições:

- A tentativa é repetida até que o sucesso ocorra
- Tentativas repetidas são independentes umas das outras
- Probabilidade de sucesso p é constante para cada tentativa

Distribuição Geométrica

55

- A probabilidade de que o primeiro sucesso ocorra na tentativa x

$$P(x) = p * q^{(x-1)} \text{ onde } q = 1 - p$$

Média, Variância e Desvio Padrão

56

□ Distribuição Geométrica

$$\mu = E(x) = 1/p$$

$$\sigma^2 = q/p^2$$

Distribuição Geométrica

Você sabe, por experiência, que a probabilidade de venda em um telefonema qualquer é de 0,23. Encontre a probabilidade de que sua primeira venda em um dia qualquer ocorra na quarta ou quinta ligação.



Exercício 8.1

58

- Encontre a probabilidade de que sua primeira venda ocorra antes da quarta ligação. R. 0,543

Distribuição de Poisson

- Condições:
 - Experimento consiste em contar o número de vezes que um evento x ocorre em um dado intervalo (tempo, área ou volume)
 - Probabilidade do evento ocorrer é a mesma para cada intervalo
 - O número de ocorrências em um intervalo independe do número de ocorrências em outros intervalos

Distribuição de Poisson

- Probabilidade de x ocorrências em um intervalo

$$P(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

μ = média de ocorrências em um intervalo

$$\mu = n \cdot p$$

Exercício 8.2

A média do número de acidentes por mês em um certo cruzamento é 3. Qual é a probabilidade de que em um mês qualquer ocorram quatro acidentes no local?



Exercício 8.3

62

- Qual a probabilidade que mais de quatro acidentes ocorram no cruzamento em um dado mês?

R. 0,185

Verifiquem!!!

63

- Tabela para probabilidade de Poisson (x e μ)
- Ferramentas tecnológicas (MINITAB, EXCEL)

Média, Variância e Desvio Padrão

64

□ Distribuição de Poisson

$$E(x) = \sigma^2 = \mu = np$$

Objetivos

- Distribuição geométrica
- Distribuição de Poisson

Exercícios 8.4 e 8.5

- Um produtor de vidro descobre que 1 em cada 500 itens de vidro está torcido. Encontre a probabilidade de a) o primeiro item de vidro torcido ser o décimo item produzido, b) o primeiro item de vidro torcido ser o primeiro, segundo ou terceiro, c) nenhum dos itens de vidro estar imperfeito. R. 0,002; 0,006; 0,980
- O número médio de pedidos de falência por minuto nos EUA em um ano recente era de cerca de três. Encontre a probabilidade de que a) exatamente cinco negócios peças falência em qualquer minuto, b) no mínimo cinco negócios peças falência em qualquer minuto, c) mais de cinco negócios peças falência em qualquer minuto. R. 0,101; 0,185; 0,084

Exercício 8.6

- Uma empresa assume que 0,5% de seus pagamentos anuais foram calculados incorretamente. A empresa tem 200 funcionários e examinou os registros da folha de pagamento de um mês. a) encontre a média, a variância e o desvio padrão. Interprete os resultados. b) quantas folhas de pagamento você esperaria ter que examinar antes de encontrar uma folha com erro? R. a) 200; 39,800; 199,5 b) 200