Gabarito Lista de Exercícios 2

Fundamentos de Astronomia - AGA0215

Data de entrega: 25/04/2019

Fotometria e mecanismos de radiação

1) $m = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$; $m_3 = ?$

$$m_j = -2,5 \ \log(\frac{F_j}{F_0}) \ \ , j = 1, 2, 3$$

$$F_j = -2,5 \ 10^{-0,4 \ m_j} F_0$$

$$m = -2,5 \ \log(\frac{F_1 + F_2 + F_3}{F_0}) = -2,5 \ \log(10^{-0,4 \ m_1} + 10^{-0,4 \ m_2} + 10^{-0,4 \ m_3})$$

$$m_3 = -2,5 \ \log(1 - 10^{-0,4} - 10^{-0,8}) = 0,88 \approx 0,9$$

2)

a) $L = 4\pi R^2 \sigma T^4 = 1,16 \cdot 10^{31} W \approx 30470 L_\odot$

b) $M = m - 5 \ \log(\frac{d}{10}) = 6 - 5 \ \log(12,3) = 0,55.$

c) $F = \sigma T^4 = 3,48 \cdot 10^{10} W \ m^{-2}$

d) $f = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{1,1661 \cdot 10^{31} W}{4\pi (3,795 \cdot 10^{18} m)^2} \approx 6,4 \cdot 10^{-8} W m^{-2} \approx 4,6 \cdot 10^{-11} R_{Sol}$

e) $\lambda_{max} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} m \ K}{28000 K} = 104 \ nm$

3)

a)

$$\frac{F(R)}{F(r)} = \frac{r^2}{R^2} = (\frac{150 \cdot 10^6}{7 \cdot 10^5})^2 = 4,6 \cdot 10^4$$

$$F(R) = 6,4 \cdot 10^7 W m^{-2}$$

b)área $= \frac{10^9 W}{6,4 W m^{-2}} = 15,7 m^2$

c)$L = 4\pi r^2 f(r) = 4\pi \cdot (1,5 \cdot 10^8 m)^2 \cdot 1390 W m^{-2} = 3,9 \cdot 10^{26} W$

d)$\frac{L'}{L} = \frac{R'^2 T'^4}{R^2 T^4} = \frac{1,02^2 \cdot 5000^4}{5800^4} = 0,574$

Como a distância Terra-Sol não mudou,

$$CS' = \frac{L'}{L}\, CS = 0,574 \cdot 1390 W m^{-2} = 798,7 W m^{-2}$$

4) Um método simples para determinar a temperatura de cor é comparar o fluxo em dois comprimentos de onda diferentes:

$$\frac{F_{\lambda_2}(T)}{F_{\lambda_1}(T)} = \frac{B_{\lambda_2}(T)}{B_{\lambda_1}(T)} = (\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^5\, \frac{\exp(hc/\lambda_2 kT) - 1}{\exp(hc/\lambda_1 kT) - 1}$$

Comparando as magnitudes medidas em λ_1 e λ_2, temos

$$m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} = -2,5 \log(\frac{F_{\lambda_2}(T)}{F_{\lambda_1}(T)})$$

e desde que as temperaturas não sejam muito altas, podemos usar a aproximação de Wien

$$m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} = -2,5 \log(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^5 + 2,5 \log(e)\, \frac{hc}{kT}(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2})$$

logo

$$m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} = a + \frac{b}{T}$$

Escolhendo os índices de cor B e V(comprimentos de onda $\lambda_1 = 440nm$ e $\lambda_2 = 548nm$), ficamos com $b = 2,5 \log(e)\, \frac{hc}{k}(\frac{1}{440\ nm} - \frac{1}{548\ nm}) \approx 7000K$. Adotando que $B - V = 0$ para $T_0 = 15000K$, vem que

$$a = -\frac{b}{T_0} = -0,47$$

logo,

$$T_c = \frac{7000K}{(B - V) + 0,47}$$

5)A energia cinética de partículas em um gás a temperatura T é $\frac{3}{2}kT$, sendo $\frac{1}{2}kT$ para cada grau de liberdade (n=3). Então

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

ou seja,

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} J K^{-1} \cdot 10^6 K}{9,1 \cdot 10^{-31} kg}} = 6,75 \cdot 10^6 m s^{-1} = 0,02c$$

.

Mecânica Celeste

6) Conforme a equação (6.14) do livro-texto Fundamental Astronomy

$$r = \frac{k^2/\mu}{(1 + e\cos(\theta))}$$

e usando a equação (6.7) obtemos a primeira lei de Kepler revisitada

$$r = \frac{L^2/\mu^2}{GM(1 + e\cos(\theta))}$$

Como $L = \mu r v$ no afélio($\theta = \pi$) e periélio($\theta = 0$), temos que

$$v_p^2 = \frac{GM(1+e)}{r_p}$$

$$v_a^2 = \frac{GM(1-e)}{r_a}$$

que, de acordo com a figura 6.5-c, vale $r_p = a(1-e)$ e $r_a = a(1+e)$. Então

$$\frac{v_a}{v_p} = \frac{1-e}{1+e}$$

Para a Terra(excentricidade e=0,0167): $v_a/v_p = 0,967$

7) Como o satélite se mantém sobre o mesmo ponto ao longo do equador da Terra, seu período é de 24h. Então, usando a 3a lei de Kepler:

$$a^3 = \frac{G(M_\oplus + m)P^2}{4\pi^2}$$

desprezando a massa do satélite em comparação com a massa da Terra,

$$a = (\frac{GM_\oplus P^2}{4\pi^2})^{1/3} = (\frac{6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^{-2} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} kg \cdot (86000s)^2}{4\pi^2})^{1/3}$$

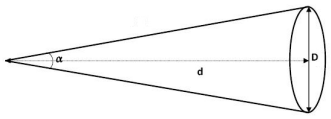
$$a \approxeq 42120km$$

8) Da 3a lei de Kepler

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_\odot + M_\oplus)} \approxeq \frac{4\pi^2 a^3}{GM_\odot}$$

Então

$$\rho = \frac{M_\odot}{V_\odot} = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}\frac{3}{4\pi R_\odot^3} = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2}\frac{3}{4\pi(D_\odot/2)^3}$$



Como $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{D_\odot}{2d}$ e $a \approx d$, onde d é a distância Terra-Sol,

$$\rho = \frac{3\pi}{GP^2}\frac{1}{\tan^3(\alpha/2)} \approx \frac{3\pi}{GP^2}\frac{1}{(\alpha/2)^3}$$

9) Para reter átomos de massa m, devemos ter que a energia cinética média dos átomos seja menor que a energia necessária para escapar do campo gravitacional do planeta. Logo

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \leq \frac{GmM}{R}$$

Logo

$$T_{max} = \frac{2}{3}\frac{GmM}{kR}$$

10) Solução 1:
Pela 3a lei de Kepler

$$P^2 = 4\pi^2\frac{d^3}{2Gm}$$

Como $\omega = 2\pi/P$

$$\omega = \sqrt{\frac{2Gm}{d^3}}$$

Solução 2 (mais trabalhosa):

$$\vec{F_{21}} = -\vec{F_{12}}$$

$$m_1\vec{a_1} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{(\vec{r_2} - \vec{r_1})}{r}$$

e

$$m_1\vec{a_2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{(\vec{r_1} - \vec{r_2})}{r}$$

Então

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a_1} - \vec{a_2} = -\frac{G\vec{r}}{r^3}(m1 + m2)$$

Como $m_1 = m_2 = m$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{G\vec{r}}{r^3}(2m)m$$

Identificamos que a força do lado esquerdo é a força centrípeta; cancelando a massa m em ambos os lados:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{2Gm}{r^2}$$

Dado que $\omega = v/r$, dividindo ambos os lados por $r = d$

$$\omega = \frac{v}{d} = \sqrt{\frac{2Gm}{d^3}}$$