Nesta aula generalizamos o conceito de derivada e diferenciabilidade que introduzimos anteriormente para campos escalares para o caso dos campos vetoriais.

<u>Definição</u> 8.1: " Seja $\mathbb{f}: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ um campo vetorial. Se $\mathbb{a} \in \mathring{S}$ for um ponto interior e $\mathbb{y} \in \mathbb{R}^n$ um vetor qualquer, definimos a derivada de $\mathbb{f}$ no ponto $\mathbb{a}$ com respeito ao vetor $\mathbb{y}$ pelo limite

$$\mathbb{f}'(\mathbb{a};\mathbb{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{f}(\mathbb{a} + h\mathbb{y}) - \mathbb{f}(\mathbb{a})}{h}$$

quando este existir."

Note que a derivada $\mathbb{f}': \tilde{S} \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ também é um campo vetorial. Assim, se denotarmos a k-ésima componente de $\mathbb{f}$ por f_k, sabemos da <u>definição 2.10</u> que $\mathbb{f}'(\mathbb{a};\mathbb{y})$ existe se e somente se existir $f_k'(\mathbb{a},\mathbb{y})$, para todo $1 \leq k \leq m$, de forma que podemos escrever:

$$\mathbb{f}'(\mathbb{a},\mathbb{y}) = \sum_{k=1}^{m} f_k'(\mathbb{a};\mathbb{y})\, \mathbb{e}_k$$

onde $f_k'(\mathbb{a},\mathbb{y})$ é a derivada do campo escalar $f_k: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ no ponto interior $\mathbb{a} \in \mathring{S}$ ao longo do vetor $\mathbb{y} \in \mathbb{R}^n$.

Com isso podemos enunciar a definição de diferenciabilidade para campos vetoriais.

<u>Definição</u> 8.2: " Sejam $\mathbb{f}: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{a} \in \mathring{S}$ um ponto interior e $\mathbb{v} \in \mathbb{R}^n$ um vetor tal que $\|\mathbb{v}\| < r$ onde r é o raio de uma bola aberta $B(\mathbb{a}, r) \subset S$. Dizemos que $\mathbb{f}$ é diferenciável em $\mathbb{a}$, se existir uma transformação linear $T_{\mathbb{a}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\mathbb{f}(\mathbb{a} + \mathbb{v}) = \mathbb{f}(\mathbb{a}) + T_{\mathbb{a}}(\mathbb{v}) + \|\mathbb{v}\| \, \mathbb{E}(\mathbb{a}, \mathbb{v})$$

com $\lim\limits_{\mathbb{v} \to \mathbb{0}} \mathbb{E}(\mathbb{a}, \mathbb{v}) = 0$. "

Note que a função erro também é vetorial, i.e., $\mathbb{E}(\mathbb{a}, \mathbb{v}) \in \mathbb{R}^m$. Assim como no caso escalar a transformação linear $T_{\mathbb{a}}$ é denominada <u>derivada total</u> de $\mathbb{f}$ em $\mathbb{a}$.

No próximo teorema estabelecemos a relação entre a derivada total e a derivada ao longo de um vetor.

<u>Teorema 8.3</u>: " Seja $\mathbb{f}: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável com derivada total $T_{\mathbb{a}}$, então a derivada de $\mathbb{f}$ no ponto $\mathbb{a} \in \mathring{S}$ ao longo de um vetor $\mathbb{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{f}'(\mathbb{a}, \mathbb{y})$ existe, e satisfaz:

$$T_{\mathbb{a}}(\mathbb{y}) = \mathbb{f}'(\mathbb{a}, \mathbb{y})$$

Ademais, se $\mathbb{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{e}_i$ e $\mathbb{f}(\mathbb{a}) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbb{a}) \mathbb{e}_i$, temos que:

$$T_{a}(y) = \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \circ y \, e_k = (\nabla f_1(a) \circ y, \dots, \nabla f_m(a) \circ y)." $$

<u>Demonstração</u>:

A demonstração é análoga ao caso escalar. Inicialmente, mostramos que podemos supor sem perda de generalidade que $y \neq 0$, pois caso $y = 0$ o resultado decorreria trivialmente. De fato, se $y = 0$ temos que:

$$f'(a, 0) = \sum_{i=1}^{m} f_i'(a, 0) \, e_i = 0$$

em virtude do <u>exemplo 5.2</u>. Por outro lado, como T_a é uma transformação linear, concluímos imediatamente que $T_a(0) = 0$. Logo, o resultado é válido para $y = 0$.

Se $y \neq 0$, tomamos o vetor v da fórmula de Taylor em primeira ordem na <u>definição 8.2</u> como $v = h y$, onde $h \neq 0$ é escolhido de forma a garantir que

$$\|v\| = |h| \, \|y\| < r$$

onde $r \in \mathbb{R}_+$ é o raio de uma bola aberta $B(a, r)$.[CS] Portanto,

$$f(a + h y) - f(a) = T_a(h y) + \|h y\| \, E(a, h y)$$

$$= h\, T_{a}(y) + |h|\, \|y\|\, E(a, hy)$$

$$\Rightarrow f'(a, v) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hy) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[T_{a}(y) + \frac{|h|}{h} \|y\|\, E(a, hy) \right]$$

$$= T_{a}(y)$$

pois $|h|/_{h}$ é limitado quando $h \to 0$ ao passo que $E(a, hy) \xrightarrow{h \to 0} 0$.

Finalmente, notando que:

$$f'(a, y) = \sum_{k=1}^{m} f_k'(a, y)\, e_k = \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \cdot y\, e_k$$

obtemos a tese.

$\blacksquare$

É conveniente escrever a relação

$$T_{a}(y) = \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \cdot y\, e_k$$

como um produto de matrizes:

$$T_{a}(y) = Df(a)\, y$$

onde $Df(a) \in Mat(m \times n, \mathbb{R})$ é denominada matriz Jacobiana e

$y) \in Mat(n\times 1, \mathbb{R})$ é simplesmente um vetor coluna. Para encontrarmos as componentes da matriz Jacobiana basta fazermos a seguinte consideração:

$$T_a(y)) = \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \cdot y)\, e_k = \sum_{k=1}^{m} \Big[\sum_{i=1}^{n} [\nabla f_k(a)]_i\, y_i \Big] e_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_k(a) y_i\, e_k$$

Por outro lado, o produto de matrizes pode ser escrito como

$$Df(a)\, y) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} [Df(a)]_{ki}\, y_i\, e_k$$

Comparando as duas expressões concluímos que:

$$[Df(a)]_{ki} = \partial_i f_k(a)$$

Logo,

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix}$$

Naturalmente, a matriz Jacobiana está definida apenas nos pontos onde as mn derivadas parciais $\partial_i f_k$ existirem. Deste ponto de vista, temos que a matriz Jacobiana é apenas uma representação matricial para a transformação linear que define a derivada total.

<u>Exemplo 8.4</u>: " Calcule a matriz Jacobiana para a transformação de coordenadas polares de $\mathbb{R}^2$ a cartesianas.

<u>Solução</u>: A transformação que leva coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$ a coordenadas cartesianas é dada pelo seguinte campo vetorial:

$$\mathbb{f} : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , (r, \theta) \longmapsto f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x, y)$$

Neste caso, a matriz Jacobiana é simplesmente:

$$Df = \begin{pmatrix} \partial_r f_1 & \partial_\theta f_1 \\ \partial_r f_2 & \partial_\theta f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \quad "$$

O próximo teorema nos ensina que diferenciabilidade implica continuidade

<u>Teorema 8.5</u>: " Seja $\mathbb{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ um campo vetorial diferenciável em $a \in \mathring{S}$, então $\mathbb{f}$ é contínuo em a. "

Demonstração:

Similarmente ao caso escalar utilizamos a validade da expansão de Taylor presente na definição 8.2:

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})\,\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\,\mathbf{E}(\mathbf{a},\mathbf{v})$$

com $\mathbf{E}(\mathbf{a},\mathbf{v}) \xrightarrow{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} 0$ para mostrar que:

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$$

Como

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{v}) = \lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \left[\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a})\,\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\,\mathbf{E}(\mathbf{a},\mathbf{v}) \right]$$

$$= \lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} D\mathbf{f}(\mathbf{a})\,\mathbf{v} + \lim_{\mathbf{v}\to 0} \|\mathbf{v}\|\,\mathbf{E}(\mathbf{a},\mathbf{v})$$

$$= \mathbf{f}(\mathbf{a})$$

pois: $\|\mathbf{v}\|\,\mathbf{E}(\mathbf{v},\mathbf{a}) \xrightarrow{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \mathbf{0}$ pela hipótese de diferenciabilidade de $\mathbf{f}$, enquanto que $[D\mathbf{f}(\mathbf{a})\,\mathbf{v}] \xrightarrow{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} \mathbf{0}$ devido ao fato de todas as transformações lineares serem contínuas (vide exemplo 4.17 (c)).

$\blacksquare$

A seguir enunciamos um lema cuja demonstração fica como exercício para o leitor:

Lema 8.6: " Seja $\mathbb{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ um campo vetorial diferenciável em $\mathbb{a} \in \mathring{S}$, então é válida a desigualdade:

$$\| D\mathbb{f}(\mathbb{a})\,\mathbb{v} \| \leq M_f(\mathbb{a})\,\|\mathbb{v}\| ,$$

com $M_f(\mathbb{a}) := \sum_{k=1}^{m} \| \nabla f_k(\mathbb{a}) \|$. "

Demonstração:

Como $\mathbb{f}$ é diferenciável em $\mathbb{a}$ podemos empregar o teorema 8.3 em conjunto com as desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz para obter:

$$\begin{aligned}
\| D\mathbb{f}(\mathbb{a})\,\mathbb{v} \| &= \Big\| \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(\mathbb{a}) \cdot \mathbb{v}\, \mathbb{e}_k \Big\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \| \nabla f_k(\mathbb{a}) \cdot \mathbb{v}\, \mathbb{e}_k \| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \| \nabla f_k(\mathbb{a}) \cdot \mathbb{v} \| \, \| \mathbb{e}_k \| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \| \nabla f_k(\mathbb{a}) \| \, \| \mathbb{v} \|
\end{aligned}$$

▨

<u>Teorema 8.7</u>: " Sejam $\mathbb{f}: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\mathbb{g}: \tilde{S} \subseteq \mathbb{R}^p \to S \subseteq \mathbb{R}^n$ e defina a composta $\mathbb{h} = \mathbb{f} \circ \mathbb{g}$. Se $\mathbb{g}$ for diferenciável em $\mathbb{a} \in \mathring{\tilde{S}}$ com derivada total $D\mathbb{g}(\mathbb{a})$ e $\mathbb{f}$ for diferenciável em $\mathbb{b} = \mathbb{g}(\mathbb{a}) \in \mathring{S}$ com derivada total $D\mathbb{f}(\mathbb{b})$, então $\mathbb{h}$ é diferenciável em $\mathbb{a}$ e a derivada total

$$D\mathbb{h}(\mathbb{a}) = D\mathbb{f}(\mathbb{b})\left[D\mathbb{g}(\mathbb{a})\right]$$

é a composição das transformações lineares $D\mathbb{f}(\mathbb{b})$ e $D\mathbb{g}(\mathbb{a})$."

<u>Demonstração</u>:

Mostremos que $\mathbb{h}$ é diferenciável em $\mathbb{a}$, ou seja, de acordo com a <u>definição 8.2</u> que

$$\mathbb{h}(\mathbb{a}+\mathbb{y}) - \mathbb{h}(\mathbb{a}) = D\mathbb{h}(\mathbb{a})\,\mathbb{y} + \|\mathbb{y}\|\,\mathbb{E}(\mathbb{a},\mathbb{y})$$

com $\mathbb{E}(\mathbb{a},\mathbb{y}) \xrightarrow{\mathbb{y} \to \mathbb{0}} \mathbb{0}$. Da definição de $\mathbb{h}$, sabemos que:

$$\mathbb{h}(\mathbb{a}+\mathbb{y}) - \mathbb{h}(\mathbb{a}) = \mathbb{f}[\mathbb{g}(\mathbb{a}+\mathbb{y})] - \mathbb{f}[\mathbb{g}(\mathbb{a})]$$
$$= \mathbb{f}(\mathbb{b}+\mathbb{v}) - \mathbb{f}(\mathbb{b})$$

onde introduzimos o vetor: $\mathbb{v} = \mathbb{g}(\mathbb{a}+\mathbb{y}) - \mathbb{g}(\mathbb{a})$. Da diferenciabilidade de $\mathbb{g}$ em $\mathbb{a}$, temos que:

$$\mathbb{v} = \mathbb{g}(\mathbb{a}+\mathbb{y}) - \mathbb{g}(\mathbb{a}) = D\mathbb{g}(\mathbb{a})\,\mathbb{y} + \|\mathbb{y}\|\,\mathbb{E}_g(\mathbb{a},\mathbb{y})$$

com $\lim_{\mathbb{y} \to 0} \mathbb{E}_g(\mathbb{a}, \mathbb{y}) = 0$. Da diferenciabilidade de $\mathbb{f}$ temos que:

$$\mathbb{f}(\mathbb{b} + \mathbb{v}) - \mathbb{f}(\mathbb{b}) = D\mathbb{f}(\mathbb{b})\mathbb{v} + \|\mathbb{v}\| \mathbb{E}_f(\mathbb{b}, \mathbb{v})$$

com $\lim_{\mathbb{v} \to 0} \mathbb{E}_f(\mathbb{b}, \mathbb{v}) = 0$. De forma que concluímos que:

$$\mathbb{f}(\mathbb{b} + \mathbb{v}) - \mathbb{f}(\mathbb{b}) = D\mathbb{f}(\mathbb{b}) \left[D\mathbb{g}(\mathbb{a})\mathbb{y} + \|\mathbb{y}\| \mathbb{E}_g(\mathbb{a}, \mathbb{y}) \right] + \|\mathbb{v}\| \mathbb{E}_f(\mathbb{b}, \mathbb{v})$$

$$= D\mathbb{f}(\mathbb{b}) D\mathbb{g}(\mathbb{a})\mathbb{y} + \|\mathbb{y}\| \mathbb{E}(\mathbb{a}, \mathbb{y})$$

onde introduzimos:

$$\mathbb{E}(\mathbb{a}, \mathbb{y}) = \begin{cases} Df(\mathbb{b}) \mathbb{E}_g(\mathbb{a}, \mathbb{y}) + \dfrac{\|\mathbb{v}\|}{\|\mathbb{y}\|} \mathbb{E}_f(\mathbb{b}, \mathbb{v}) & , \mathbb{y} \neq 0 \\ 0 , \mathbb{y} = 0 \end{cases}$$

Logo, para completarmos a demonstração basta mostrarmos que

$$\lim_{\mathbb{y} \to 0} \mathbb{E}(\mathbb{a}, \mathbb{y}) = 0$$

Claramente,

$$\lim_{\mathbb{y} \to 0} \left(Df(\mathbb{b}) \mathbb{E}_g(\mathbb{a}, \mathbb{y}) \right) = Df(\mathbb{b}) \left[\lim_{\mathbb{y} \to 0} \mathbb{E}_g(\mathbb{a}, \mathbb{y}) \right] = Df(\mathbb{b})\, 0 = 0$$

onde usamos a continuidade das transformações lineares.

Para o termo remanescente, notamos que podemos majorar $\|v\|$ invocando o lema 8.6 e a desigualdade triangular:

$$\|v\| = \| Dg(a)\, y + \|y\| E_g(a, y) \|$$

$$\leq \| Dg(a)\, y \| + \|y\| \, \| E_g(a, y) \|$$

$$\leq M_g(a) \|y\| + \|y\| \, \| E_g(a, y) \|$$

Logo, o quociente $\|v\| / \|y\|$ permanece limitado e podemos concluir que

$$\lim_{y \to 0} \frac{\|v\|}{\|y\|} E_f(b, v) = 0$$

Completando a demonstração.

$\blacksquare$

Naturalmente podemos interpretar o resultado do teorema 8.7 em termos da representação matricial da transformação linear diferencial total, ou seja, a partir das matrizes Jacobianas, de forma que a regra da cadeia pode ser entendida como o seguinte produto de matrizes:

$$Dh(a) = Df(b)\, Dg(a) \quad , \quad b = g(a)$$

Se $a \in \mathbb{R}^p$, $b = g(a) \in \mathbb{R}^n$, $f(b) \in \mathbb{R}^m$, então $h(a) \in \mathbb{R}^m$ e

$\mathbb{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$, $\mathbb{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$, $\mathbb{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_m)$

Logo, $D\mathbb{h}(\mathbb{a}) \in Mat(m \times p, \mathbb{R})$, $D\mathbb{f}(\mathbb{b}) \in Mat(m \times n, \mathbb{R})$ e

$D\mathbb{g}(\mathbb{a}) \in Mat(n \times p, \mathbb{R})$ com componentes dadas por:

$$D\mathbb{h}(\mathbb{a}) = \partial_j h_i(\mathbb{a}),$$

$$D\mathbb{f}(\mathbb{b}) = \partial_k f_i(\mathbb{b}),$$

$$D\mathbb{g}(\mathbb{a}) = \partial_j g_k(\mathbb{a}),$$

com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq p$, $1 \leq k \leq n$ e a regra da cadeia pode ser escrita como o seguinte conjunto de mp equações:

$$\partial_j h_i(\mathbb{a}) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f_i(\mathbb{b})\, \partial_j g_k(\mathbb{a})$$

<u>Exemplo 8.8</u>: "<u>Regra da cadeia para campos escalares</u>: Seja $\mathbb{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar, ou seja, fixe <u>$m=1$</u> no <u>teorema 8.7</u>. Claramente, h também é um campo escalar e existem p equações a serem consideradas na regra da cadeia, uma para cada derivada parcial de h:

$$\partial_j h(\mathbb{a}) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(\mathbb{b})\, \partial_j g_k(\mathbb{a}) \quad , \quad 1 \leq j \leq p$$

O caso particular com $p = 1$, ou seja, $\mathbb{a} \equiv a \in \mathbb{R}$

$$h'(a) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(\mathbb{b})\, g_k'(a)$$

coincide com o resultado estudado previamente.

Já para $p = n = 2$, tomando $\mathbb{a} = (s,t) \in \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{b} = (x,y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$, temos as seguintes relações,

$$\mathbb{b} = g(\mathbb{a}) \Rightarrow \begin{cases} x = g_1(s,t) \\ y = g_2(s,t) \end{cases}$$

A regra da cadeia implica que:

$$\partial_1 h(s,t) = \sum_{k=1}^{2} \partial_k f(x,y)\, \partial_1 g_k(s,t)$$

$$= \partial_1 f(x,y)\, \partial_1 g_1(s,t) + \partial_2 f(x,y)\, \partial_1 g_2(s,t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\partial_2 h(s,t) = \sum_{k=1}^{2} \partial_k f(x,y)\, \partial_2 g_k(s,t)$$

$$= \partial_1 f(x,y)\, \partial_2 g_1(s,t) + \partial_2 f(x,y)\, \partial_2 g_2(s,t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{''} \qquad \text{(exercício)}$$

<u>Exemplo 8.9</u>: " A temperatura em uma placa fina é descrita por um campo escalar $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto T(x,y)$, determine a variação da temperatura com respeito às coordenadas polares. em

<u>Solução</u>: Tome $g: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como o campo vetorial que transforma coordenadas polares em cartesianas

$$g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

A temperatura em coordenadas polares é a composição de g com T

$$\varphi(r,\theta) = T(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Precisamos calcular $\partial_r\varphi$ e $\partial_\theta\varphi$, pela regra da cadeia, temos:

(i) $$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial T}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

(ii) $$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial T}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial T}{\partial y}.$$ //