

PTC-5822 - Introdução a Processos Estocásticos - 2019

Lista de exercícios 05

GABARITO

1. X e Y são V.A.'s conjuntamente gaussianas com densidade conjunta (para todos os valores de x e y)

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\exp\{-2x^2 - y^2/2\}}{2\pi c}.$$

Determine σ_X^2 , σ_Y^2 e σ_{XY} .

Comparando a expressão do enunciado com aquela do exemplo 3-18 da apostila (página 53), verificamos que $\sigma_X^2 = 1/4$, $\sigma_Y^2 = 1$ e $\sigma_{XY} = 0$.

2. $\mathbf{X}$ é um vetor aleatório gaussiano bidimensional, com vetor média e matriz de covariância dados por:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_X = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a densidade conjunta de $\mathbf{X}$;

Novamente utilizando os resultados do exemplo 3-18 da apostila, com $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 3/2$, e $\sigma_{12} = -1/2$ (o que resulta em $r = -1/3$), obtemos a expressão da densidade conjunta:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi(3/2)\sqrt{8/9}} \exp \left\{ -\frac{1}{3\sqrt{8/9}} [(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (2/3)(x_1 - 1)x_2] \right\}.$$

- (b) Determine as densidades marginais;

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \exp \left[-\frac{(x_1 - 1)^2}{3} \right];$$

$$f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \exp \left[-\frac{x_2^2}{3} \right].$$

- (c) Encontre uma matriz $\mathbf{A}$ tal que o vetor aleatório $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ consista de variáveis aleatórias gaussianas independentes;

Resolvendo a equação característica para a matriz de covariância de $\mathbf{X}$, verificamos que os autovalores de $\mathbf{C}_\mathbf{X}$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$. Os autovetores correspondentes, escolhidos de modo a ter norma unitária, são $\mathbf{a}_1^T = (1/\sqrt{2})[1 \ -1]$ e $\mathbf{a}_2^T = (1/\sqrt{2})[1 \ 1]$. Portanto, a expressão da matriz $\mathbf{A}$ é:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (d) Determine a densidade conjunta de $\mathbf{Y}$.

$\mathbf{Y}$ será um vetor gaussiano, com vetor média e matriz de covariância dados por:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Um canal de transmissão binária introduz erros de bit com probabilidade 0,15. Qual é a probabilidade de que haja no máximo 20 erros em 100 bits transmitidos?

Cada bit pode ser modelado como uma V.A. de Bernoulli, com $p = 0,15$. Assim, a média das 100 amostras $\bar{X}$ terá média $E(\bar{X}) = p = 0,15$ e variância $\text{Var}(\bar{X}) = p(1-p)/100 = 0,001275$. A probabilidade de até 20 erros em 100 bits pode ser escrita como:

$$P(\bar{X} \leq 0,2) = P\left[\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X})}} \leq \frac{0,2 - 0,15}{\sqrt{0,001275}}\right] = P(Z \leq 1,4) = 0,9192.$$

(Z é uma V.A. normal padronizada.)