Vorticidade

1)Equação de Transporte da Vorticidade

A equação de Navier-Stokes para um escoamento incompressível pode ser escrita:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}.\nabla\right)\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{u}+\vec{g} \qquad (1.1)$$

Podemos aplicar a equação de Lagrange da aceleração:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}.\nabla\right)\vec{u}=\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\vec{u}\,.\vec{u}}{2}\right)+\vec{\omega}\times\vec{u} \qquad (1.2)$$

Lembrando que a aceleração da gravidade pode ser escrita na forma de um gradiente de um potencial:

$$\vec{g} = \nabla(-g\,z) \tag{1.3}$$

Para um escoamento incompressível, a equação (1.1) resulta:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) + \vec{\omega} \times \vec{u} = \nu\,\nabla^2 \vec{u} \tag{1.4}$$

Se fizermos o rotacional da equação (1.4):

$$\frac{\partial(\nabla\times\vec{u})}{\partial t}+\underbrace{\left[\nabla\times\nabla\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)\right]}_{0}+\nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{u})=\nu\nabla^2(\nabla\times\vec{u}) \qquad (1.5)$$

O rotacional do gradiente de um escalar é nulo, e temos que $\nabla\times\vec{u}=\vec{\omega}$. Para o termo $\nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{u})$, podemos aplicar a seguinte propriedade, verificável através de análise tensorial:

$$\nabla\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\left(\nabla.\vec{b}\right)-(\vec{a}.\nabla)\vec{b}+\left(\vec{b}.\nabla\right)\vec{a}-\vec{b}(\nabla.\vec{a}) \qquad (1.6)$$

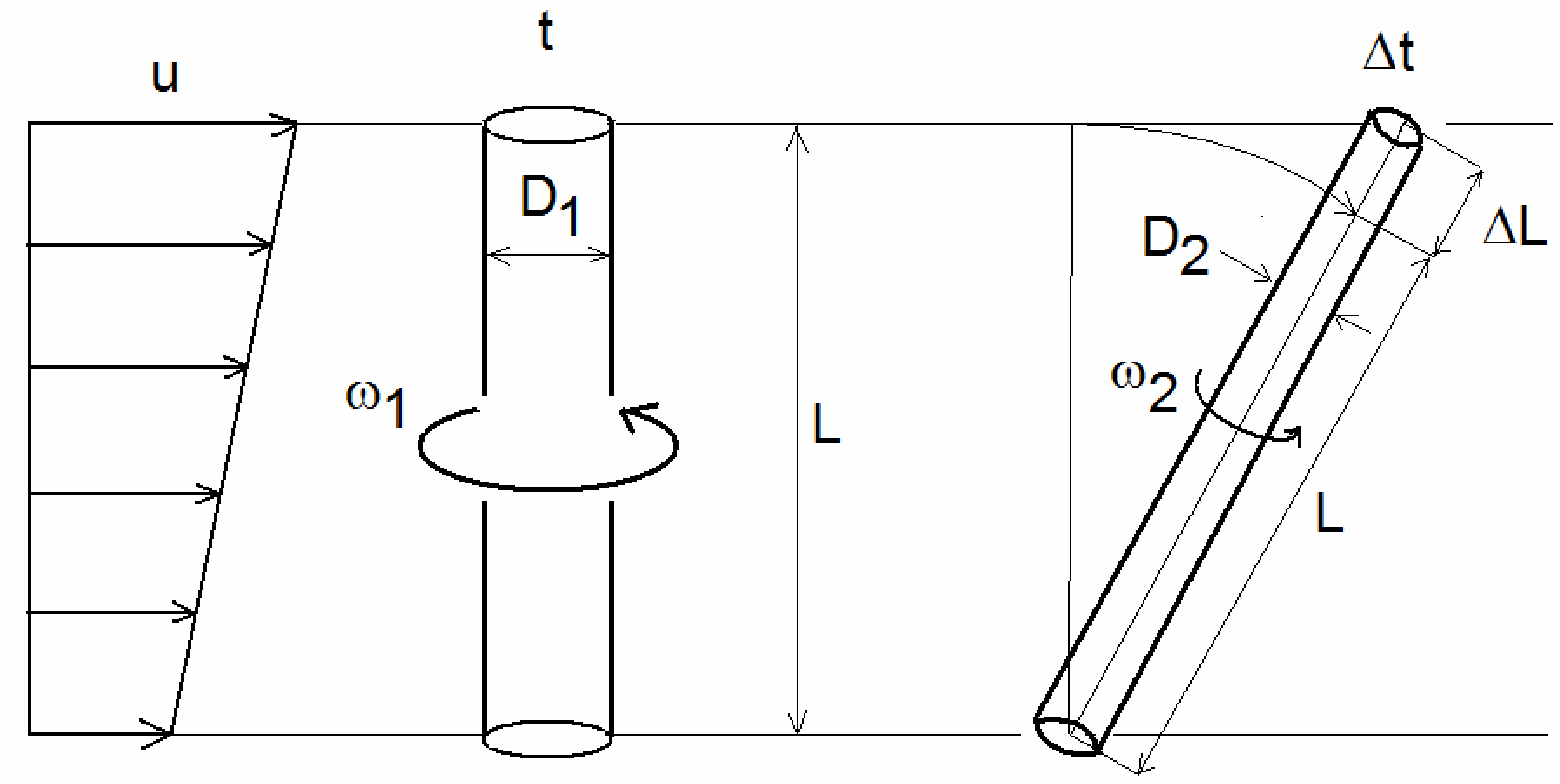
Resulta:

$$\nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{u})=\vec{\omega}(\nabla.\vec{u})-(\vec{\omega}.\nabla)\vec{u}+(\vec{u}.\nabla)\vec{\omega}-\vec{u}(\nabla.\vec{\omega}) \qquad (1.7)$$

Temos que $\nabla.\vec{\omega}=\nabla.(\nabla\times\vec{u})=0$ (o divergente do rotacional de um vetor é sempre nulo), e para um escoamento incompressível, $\nabla.\vec{u}=0$. Logo, a equação de Navier-Stokes fica:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+(\vec{u}.\nabla)\vec{\omega}=(\vec{\omega}.\nabla)\vec{u}+\nu\nabla^{2}\vec{\omega} \tag{1.8}$$

Essa é a equação de transporte da vorticidade. O termo $(\vec{u}.\nabla)\vec{\omega}$ é o chamado termo de estiramento de vórtices (*vortex stretching*), e corresponde a uma fonte de vorticidade que ocorre quando um vórtice é estirado pelos gradientes de velocidade.



Na figura, temos um trecho de um vórtice sendo estirado pelo gradiente de velocidade, entre os instantes t e $t+\Delta t$.

Como o vórtice é um filamento material, por conservação do volume o estiramento ΔL vai estar relacionado com uma diminuição de diâmetro, assim $D_2<D_1$. Mas, por conservação de momento angular, a vorticidade (que está relacionada com uma velocidade de rotação) vai aumentar, de modo que $\omega_2>\omega_1$. Note que, pela figura, não só a vorticidade aumenta, mas ocorre um efeito de distribuição entre as componentes, pois um vórtice que tinha seu eixo transversal à direção da velocidade passou a ter componente na própria direção da velocidade.

Também é interessante notar que, para problemas bidimensionais, o termo de estiramento de vórtice é nulo:

$$(\vec{\omega}.\nabla)\vec{u}=\left(\omega_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(u\vec{i}+\upsilon\vec{j}\right)=0 \qquad (1.9)$$

Isto significa que métodos que implicam em simulação direta da turbulência (*Direct Numerical Simulation* ou DNS) ou métodos que resolvem pelo menos as maiores estruturas turbulentas (*Large Eddy Simulation* ou LES) necessariamente devem ser utilizados com simulações tridimensionais, pois escoamentos turbulentos são altamente tridimensionais e o fenômeno de estiramento de vórtices é fundamental na compreensão do fenômeno de cascata de energia pelo qual a energia cinética é transferida entre as várias escalas de vórtices turbulentos.

Para um escoamento bidimensional:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \tag{1.10}$$

Muitos métodos de resolução de escoamentos bidimensionais acoplam a solução da equação (1.10) com a solução de uma equação de Poisson para a função de corrente:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\omega \qquad (1.11)$$

Que permite a obtenção das velocidades através de:

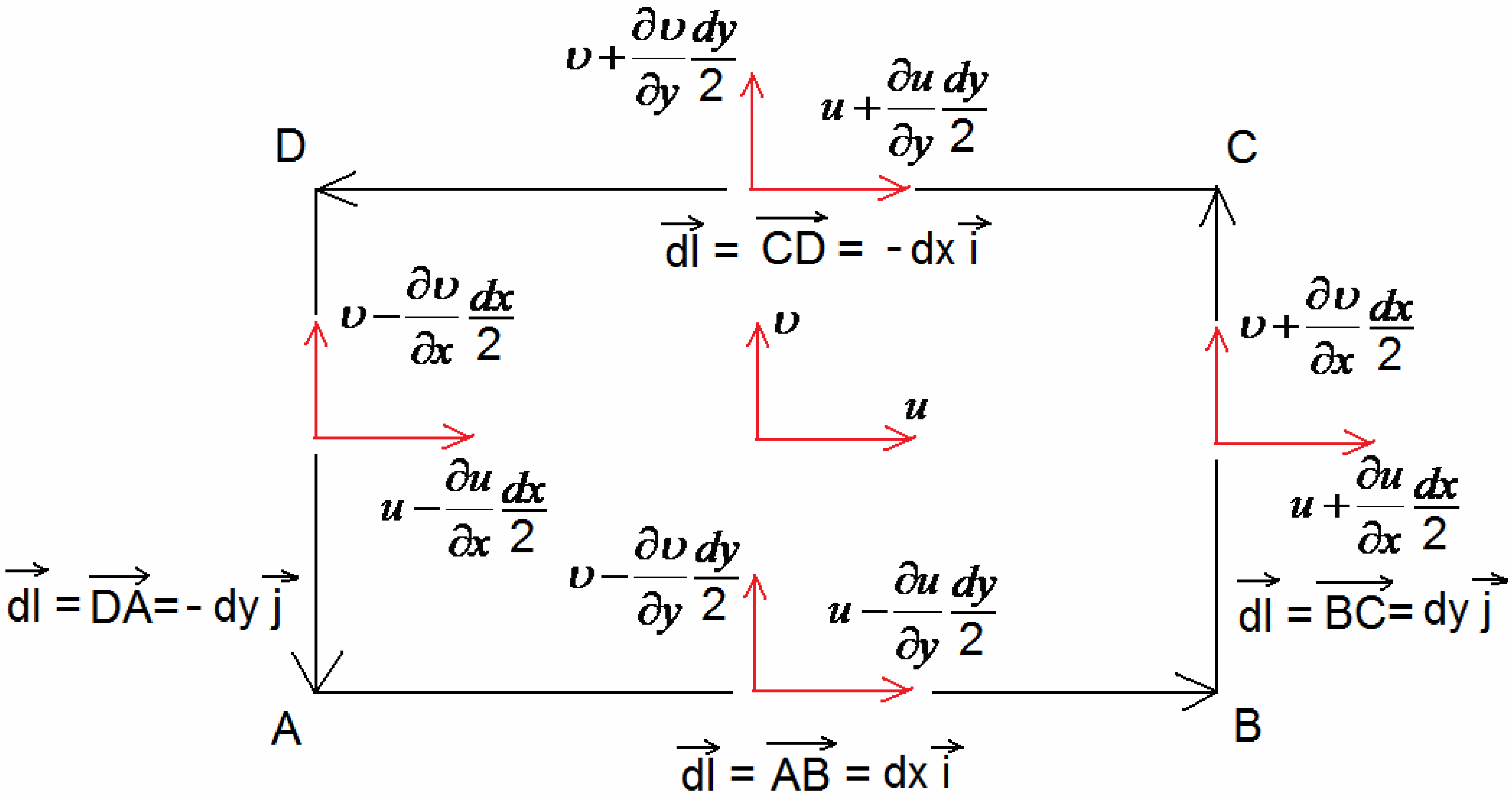
$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y};\ \upsilon=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (1.12)$$

2)Teorema de Stokes e Circulação

Se imaginarmos um elemento retangular *dxdy* e fizermos a integral de linha do vetor da velocidade ao longo do perímetro, seguindo o perímetro num sentido anti-horário, e chamando essa integral de Γ:

$$\Gamma = \oint_{ABCDA} \vec{u}\,.d\vec{l} = \int_{AB} \vec{u}\,.d\vec{l} + \int_{BC} \vec{u}\,.d\vec{l} + \int_{CD} \vec{u}\,.d\vec{l} + \int_{DA} \vec{u}\,.d\vec{l} \qquad (2.1)$$

Se conhecermos a velocidade e seus gradientes no centro do elemento, podemos obter as velocidades nos centróides dos lados do elemento *dxdy*. Aproximando a velocidade média em cada lado pela velocidade em seu centróide, temos:



$\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{2}$
$u + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}$
D
C
$\vec{dl} = \overrightarrow{CD} = -dx\,\vec{i}$
$\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2}$
υ
$\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2}$
u
$u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}$
$u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}$
$\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{2}$
$\vec{dl} = \overrightarrow{DA} = -dy\,\vec{j}$
$u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}$
$\vec{dl} = \overrightarrow{BC} = dy\,\vec{j}$
A
B
$\vec{dl} = \overrightarrow{AB} = dx\,\vec{i}$

$$\int_{AB} \vec{u}\,.\,d\vec{l} = \left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\vec{i} + \left(\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\vec{j}\right].\overrightarrow{AB}$$

$$= \left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\vec{i} + \left(\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\vec{j}\right].dx\,\vec{i} = \left(u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx \tag{2.2}$$

$$\int_{BC} \vec{u}\,.\,d\vec{l} = \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\vec{i} + \left(\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\vec{j}\right].\overrightarrow{BC}$$

$$= \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\vec{i} + \left(\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\vec{j}\right].dy\,\vec{j} = \left(\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dx}{2}\right)dy \tag{2.3}$$

$$\int_{CD} \vec{u}\,.\,d\vec{l} = \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\vec{i} + \left(\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\vec{j}\right].\overrightarrow{CD}$$

$$= \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\vec{i} + \left(\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\vec{j}\right].\left(-dx\,\vec{i}\right) = \left(-u - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx \tag{2.4}$$

$$\int_{DA} \vec{u}\,.\,d\vec{l} = \left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\vec{i} + \left(\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\vec{j}\right].\overrightarrow{DA}$$

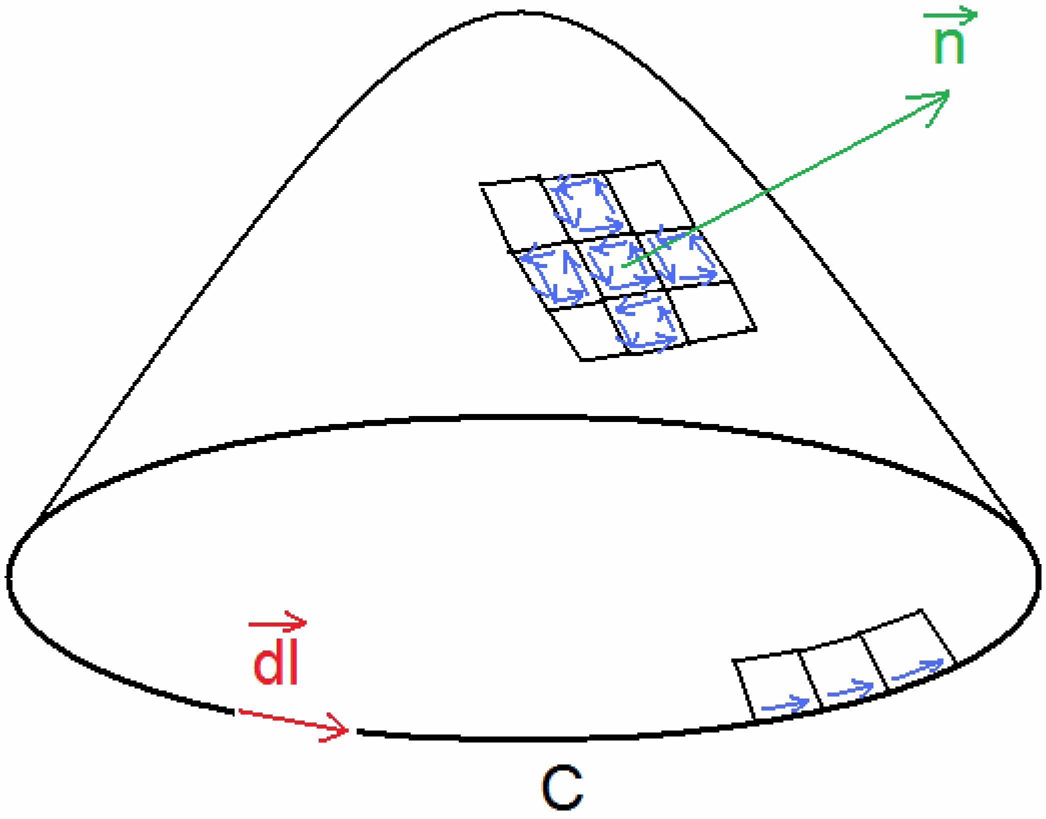
$$= \left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\vec{i} + \left(\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\vec{j}\right].\left(-dy\,\vec{j}\right) = \left(-\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy \tag{2.5}$$

Substituindo todos esses resultados na equação (2.1):

$$\Gamma = \oint_{ABCDA} \vec{u}\,.\,d\vec{l} = \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\, dy \qquad (2.6)$$

Note que Γ é igual à vorticidade na direção *z*, ou seja, na direção normal ao elemento de área *dxdy*, com a normal apontando na direção do observador:

$$\Gamma = \oint_{ABCDA} \vec{u}\,.\,d\vec{l} = \omega\, dx\, dy = \vec{\omega}.\vec{n}\, dA \qquad (2.7)$$



$\vec{n}$
$\vec{dl}$
C

Suponha agora que temos uma curva material C no espaço, e que essa curva tem um diafragma qualquer que vamos chamar de S. Esse diafragma pode ser subdividido em N elementos retangulares dA. Se fizermos a somatória das integrais de Γ sobre todos os N elementos retangulares, teremos:

$$\sum_{j=1}^{N} \Gamma = \sum_{j=1}^{N} \oint_{ABCDA} \vec{u} \, . \, d\vec{l} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\omega} . \vec{n} \, dx \, dy = \int_{S} \vec{\omega} . \vec{n} \, dA \tag{2.8}$$

Porém, ao fazermos a somatória das integrais de linha $\vec{u}\,.d\vec{l}$, cada trecho será percorrido duas vezes se um dado trecho for compartilhado por dois elementos de área, e percorrido em sentidos diferentes em cada um desse elementos, o que significa que a somatória de todas as integrais $\vec{u}\,.d\vec{l}$ resultará nula, exceto pelos trechos localizados exatamente sobre a curva C, que são percorridos uma única vez. Isso significa que a equação (2.8) fica:

$$\sum_{j=1}^{N} \Gamma = \sum_{j=1}^{N} \oint_{ABCDA} \vec{u}\,.d\vec{l} = \oint_{C} \vec{u}.d\vec{l} = \int_{S} \vec{\omega}.\vec{n}\,dA \qquad (2.9)$$

Chegamos então à forma final do Teorema de Stokes:

$$\Gamma_C = \oint_C \vec{u}.d\vec{l} = \int_S \vec{\omega}.\vec{n}\, dA \qquad (2.10)$$

Chamamos Γ_C de circulação do vetor da velocidade sobre a curva C. Podemos dizer que:

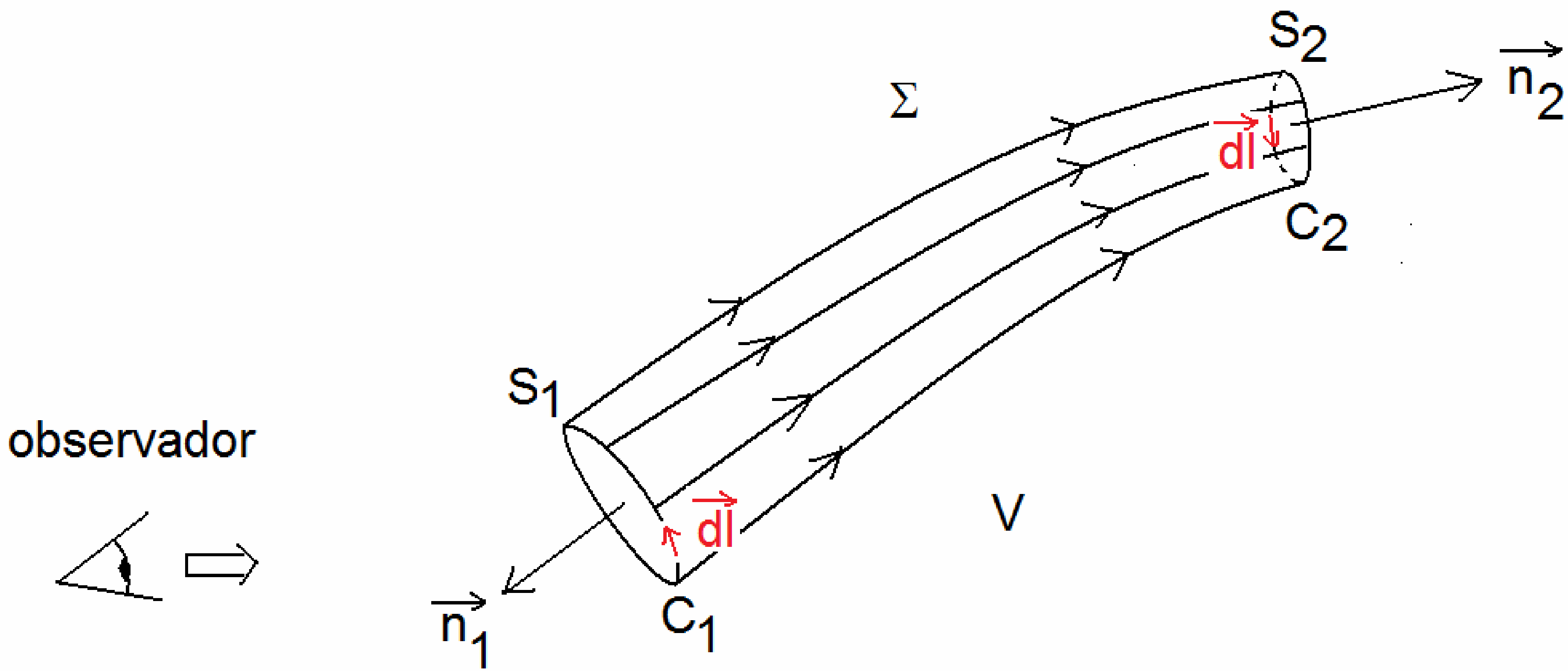
"A circulação do vetor da velocidade sobre uma curva *C* que tem por diafragma uma superfície *S* é igual ao fluxo do vetor da vorticidade através da superfície *S*. Ao fazermos a integral de linha $\vec{u}.d\vec{l}$ a curva *C* tem que ser percorrida num sentido anti-horário se os vetores normais aos elementos de área *dA* da superfície apontarem na direção do observador."

3)Intensidade de um Vórtice

Se tivermos um filete de vórtice no espaço (um filete cuja superfície é formada por linhas que tangenciam os vetores da vorticidade) e tomarmos um elemento volumétrico *V* desse filete, teremos:

$$\int_V \nabla.\vec{\omega}\, dV = \int_S \vec{\omega}.\vec{n}\, dA \tag{3.1}$$

Porém, como o campo de vorticidade é solenoidal $\left(\nabla.\vec{\omega}=0\right)$, a integral do lado esquerdo da equação (3.1) é nula. Na integral do lado direito, as únicas superfícies onde o produto escalar $\vec{\omega}.\vec{n}$ é não nulo são as superfícies S_1 e S_2, pois sobre a superfície lateral Σ qualquer normal será sempre ortogonal aos vetores da vorticidade. Assim:



S_2
$\overrightarrow{n_2}$
Σ
$\overrightarrow{dl}$
C_2
S_1
observador
$\overrightarrow{dl}$
V
$\overrightarrow{n_1}$
C_1

$$\int_{S} \vec{\omega}.\vec{n}\, dA = \int_{S_1} \vec{\omega}.\vec{n}_1\, dA + \int_{S_2} \vec{\omega}.\vec{n}_2\, dA = 0 \tag{3.2}$$

Ou seja:

$$\int_{S_1} \vec{\omega}.\vec{n}_1\, dA = -\int_{S_2} \vec{\omega}.\vec{n}_2\, dA = \int_{S_2} \vec{\omega}.\left(-\vec{n}_2\right) dA \tag{3.3}$$

Mas os versores $\vec{n}_1$ e $-\vec{n}_2$ apontam na direção de um observador que enxerga as curvas C_1 e C_2 num sentido anti-horário. Assim:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 \tag{3.4}$$

Esse resultado significa que o fluxo do vetor da vorticidade, é constante ao longo do comprimento de um filete de vórtices, ou seja, a intensidade (ou circulação) de um filete de vórtices é constante ao longo de seu comprimento.

4)Teorema de Kelvin

Seja C uma curva fechada material qualquer, movendo-se com o fluido em um escoamento barotrópico. A variação temporal da circulação sobre a curva C é dada por:

$$\frac{D\Gamma}{Dt}=\frac{D}{Dt}\oint_C \vec{u}.d\vec{l}=\oint_C \frac{D\vec{u}}{Dt}.d\vec{l}+\oint_C \vec{u}.\frac{D(d\vec{l})}{Dt} \qquad (4.1)$$

Se não tivermos forças viscosas sobre a curva, da equação de Euler:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\vec{g} \qquad (4.2)$$

Considerando que a aceleração da gravidade deriva de um potencial:

$$\vec{g} = \nabla(-gz) \tag{4.4}$$

Sendo o escoamento barotrópico:

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla f \qquad \text{com} \qquad f = \int \frac{1}{\rho} dp \tag{4.5}$$

Assim:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla(f + g\,z) \tag{4.6}$$

Substituindo na equação (4.1):

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint_C [\nabla(f + gz)].d\vec{l} + \oint_C \vec{u}.\frac{D(d\vec{l}\,)}{Dt} \qquad (4.7)$$

Mas a primeira integral é nula, pois o produto escalar do gradiente de uma grandeza por um vetor elementar resulta uma diferença dessa grandeza entre os pontos extremos desse vetor elementar. Se essas diferenças são integradas sobre uma curva fechada o resultado da integral será nulo pois somaremos um conjunto de diferenças relativo a um conjunto de pontos que começa e termina na mesma posição:

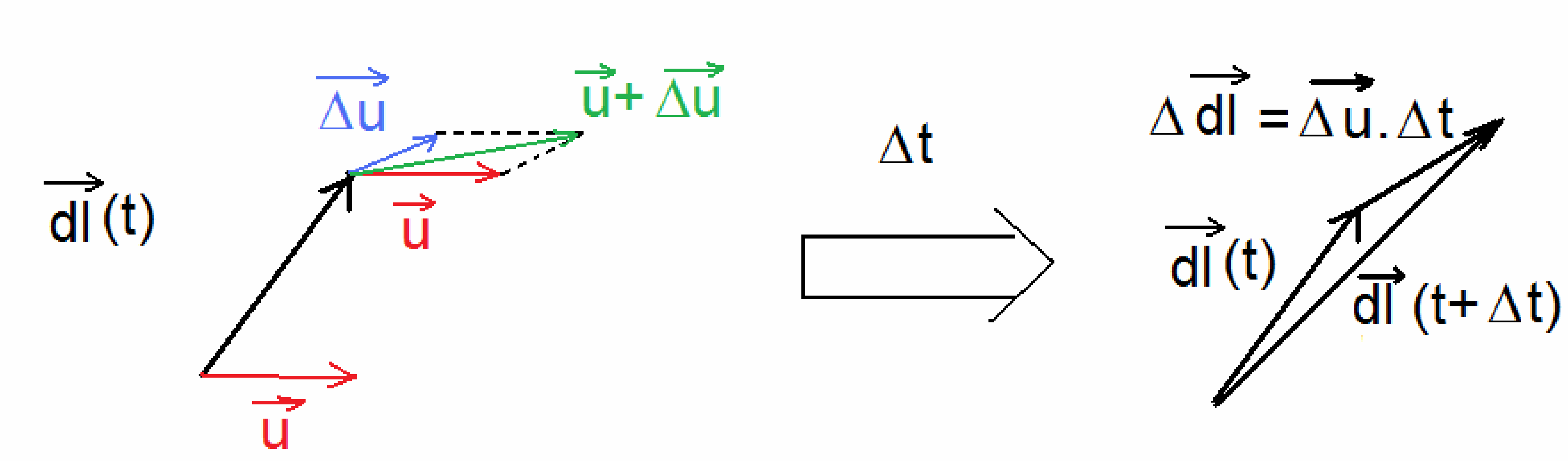
$$\oint_C [\nabla(f+gz)].d\vec{l} = \oint_C d(f+gz) = 0 \qquad (4.8)$$

Assim:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \vec{u}.\frac{D(d\vec{l})}{Dt} \qquad (4.9)$$

Por outro lado, se temos ao longo do vetor elementar $d\vec{l}$ uma variação de velocidade $\Delta\vec{u}$, esse vetor sofrerá, ao longo de um intervalo Δt, uma deformação $\Delta d\vec{l} = \Delta\vec{u}.\Delta t$. Assim:

$$\frac{D(d\vec{l})}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d\vec{l}}{\Delta t} = d\vec{u} \tag{4.10}$$



Logo:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_C \vec{u} . \frac{D(d\vec{l}\,)}{Dt} = \oint_C \vec{u}\, d\vec{u} = \oint_C \left(udu + \upsilon d\upsilon + wdw\right) = \oint_C d\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) = 0 \qquad (4.10)$$

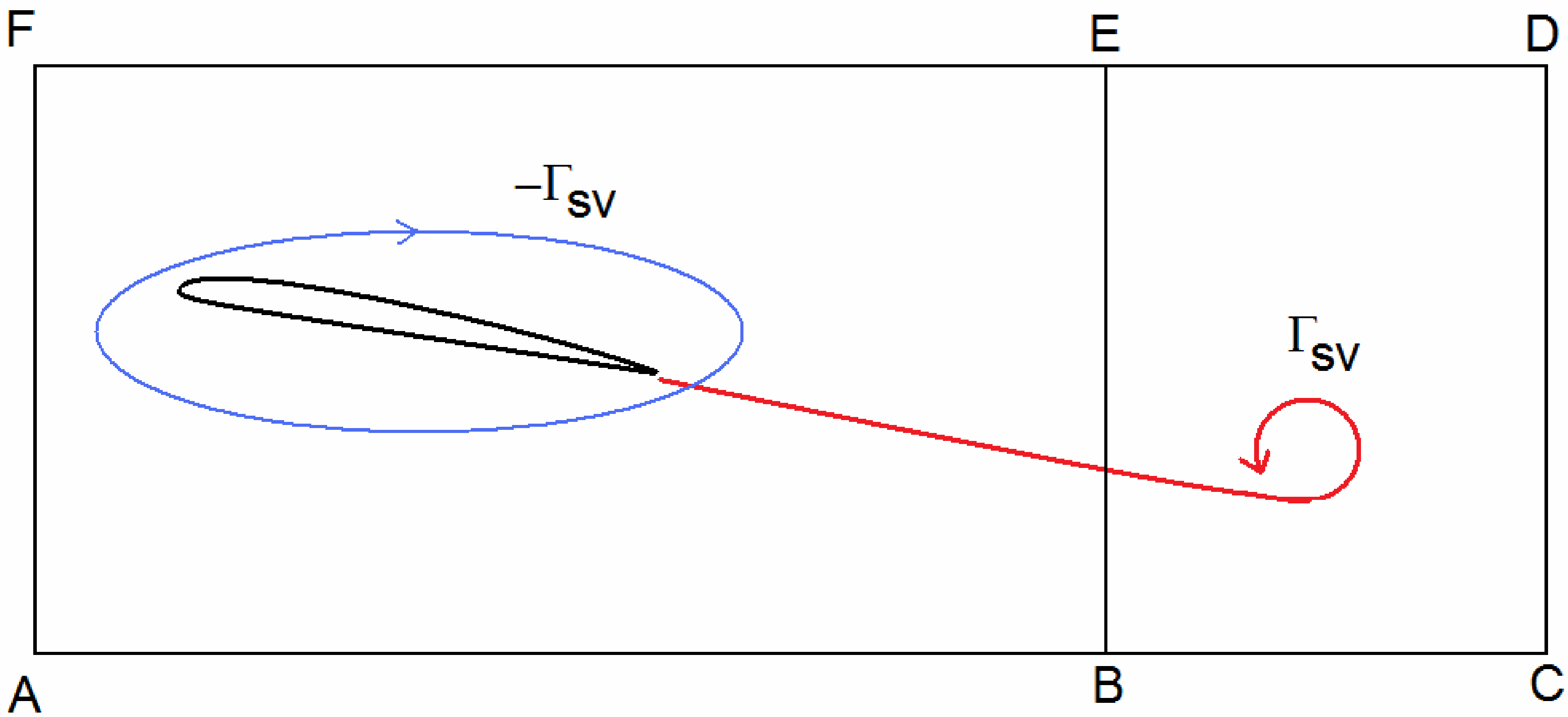
Esse último resultado é nulo porque mais uma vez estamos somando diferenças de uma variável (energia cinética) sobre uma curva fechada, ou seja, que começa e termina na mesma posição. Como a energia cinética é uma função de posição, o resultado dessa integração é nulo. Assim:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \qquad (4.11)$$

Ou seja, num escoamento barotrópico, a circulação sobre uma curva material fechada será constante desde que as forças viscosas sejam desprezíveis sobre essa curva. O teorema de Kelvin é usado para ilustrar o surgimento da sustentação em um aerofólio e para relacionar essa sustentação com o vórtice de partida (starting vortex) e com o teorema de Kutta-Joukowski. Se iniciarmos impulsivamente a partir do repouso um escoamento de velocidade U ao redor de um aerofólio, a circulação sobre o circuito ABCDEFA será nula (pois o fluido em repouso está livre de vorticidade), e se manterá nula ao longo do tempo. Porém, por efeito da viscosidade (note que os circuitos usados passam longe do aerofólio, de forma a não termos influência das forças viscosas) um vórtice de partida (“*starting vortex*”) é formado no bordo de fuga, com circulação anti-horária (positiva) Γ_{sv}.

Temos uma circulação positiva sobre o circuito BCDEB. Para manter nula a circulação sobre o circuito ABCDEFA, uma circulação negativa (horária) $-\Gamma_{sv}$ tem que aparecer no circuito ABEFA. Essa circulação será devida à vorticidade na camada limite do aerofólio, e, pelo Teorema de Kutta-Joukowski, teremos uma força de sustentação *L* por unidade de envergadura *b* dada por:

$$\frac{L}{b} = -\rho U \Gamma = \rho U \Gamma_{sv} \qquad (4.12)$$


F
E
D
$-\Gamma_{sv}$
Γ_{sv}
A
B
C

5)Teoremas de Helmholtz

a) A intensidade (circulação) de um filamento de vórtice permanece constante ao longo de seu comprimento.
b) Um filamento de vórtice não pode começar ou terminar em um ponto dentro do fluido. Filamentos de vórtices tem que formar circuitos fechados ou se estender até as fronteiras do escoamento.
c) Uma partícula de fluido que faz parte de um filamento de vórtice continua a fazer parte de um filamento de vórtice e a intensidade desse filamento permanece constante com o tempo.

Os Teoremas de Helmholtz foram formulados para fluidos não-viscosos. Os dois primeiros teoremas são relacionados com o fato da vorticidade ser um campo solenoidal, ou seja, seu divergente é nulo. O fluxo do vetor da vorticidade ao longo de um filamento tem que ser constante, portanto não é possível o filamento simplesmente ter um começo ou um fim num ponto interno do fluido. Já o terceiro teorema está relacionado com a hipótese de fluido ideal (não-viscoso). Na realidade, a viscosidade provoca difusão da vorticidade e faz com que, ao longo do tempo, um filamento de vórtice acabe por desvanecer.

Bibliografia:

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Mase, G.T.; Mase, G.E., “Continuum Mechanics for Engineers”, third edition, CRC Press, 1999.

Munson, Young, Okiishi, “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos, Ed. Edgard Blucher, 4ª edição, 1999.