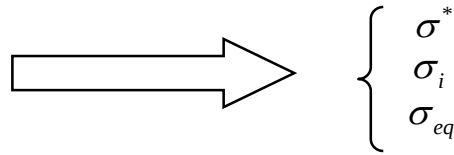


6.4.2- Cálculo da Tensão de Confronto

Tensão de confronto
Tensão ideal
Tensão equivalente



A) Cálculo da tensão de confronto sob solicitação estática

a1) Flexão Pura

$$\sigma^* = \sigma_{\max} = \frac{M_{fr}}{W_f} \leq \sigma_{adm}$$

Dimensionamento estático

- Caso estático
- Caso fadiga



Pré-dimensionar
como estático



Verificar quanto
a fadiga

No caso de secção circular:

$$W_f = \frac{\pi d^3}{32} \Rightarrow \sigma^* = \frac{32 M_{fr}}{\pi d^3} \leq \sigma_{adm}$$

com

$$M_{fr} = \sqrt{M_{fH}^2 + M_{fV}^2}$$

Pré-dimensionamento :

$$\bar{d}^3 = \frac{32}{\pi} \cdot \frac{M_{fr}}{\sigma_{adm}}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{d} = 2.17 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_{fr}}{\sigma_{adm}}}$$

$$d = 1.1 \sim 1.3 \bar{d}$$

a2) Torção Pura

$$\tau^* = \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{adm}$$

Para secção circular: $W_t = \frac{\pi d^3}{16}$

Pré-dimensionamento : $\frac{16M_t}{\pi d^3} \leq \tau_{adm} \Rightarrow \bar{d}^3 = \frac{16M_t}{\pi \tau_{adm}}$

$$\bar{d} = 1.72 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau_{adm}}}$$

$$d = 1.1 \sim 1.3 \bar{d}$$

Á partir da potência de entrada (N, em HP; n, em rpm)

$$N = F \cdot v \Rightarrow N[\text{HP}] = \frac{F[\text{Kgf}] \cdot v[\text{m/s}]}{75} \quad N[\text{CV}] = \frac{F[\text{Kgf}] \cdot v[\text{m/s}]}{76} \quad \omega[\text{rad/s}] = \frac{2\pi \cdot n[\text{rpm}]}{60}$$

$$v[\text{m/s}] = \omega[\text{rad/s}] \cdot r[\text{m}]$$

$$\Rightarrow N = \frac{F}{75} \cdot \frac{2\pi \cdot n}{60} \cdot \frac{r}{1000} = \frac{1}{716200} \cdot \underbrace{F \cdot r}_{M_t} \cdot n$$

$$N = \frac{1}{716200} \cdot M_t \cdot n$$

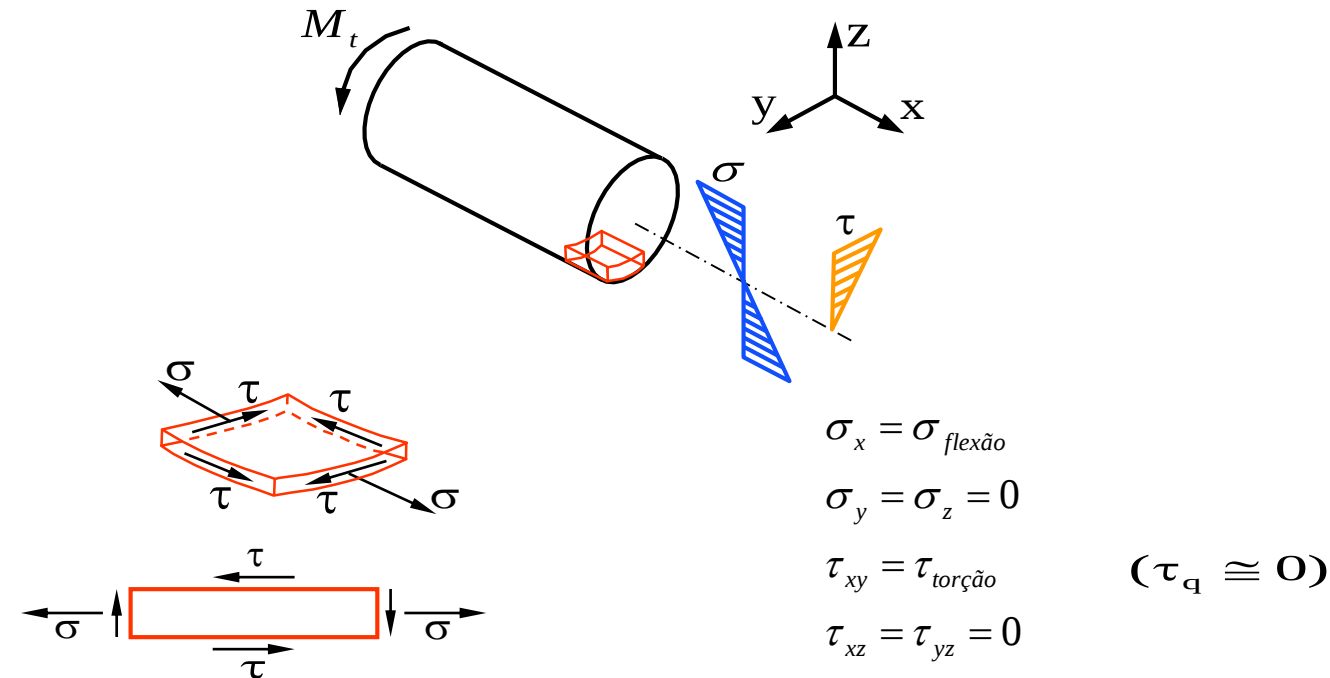
N : [HP]
 M_t : [Kgf/mm]
 n : [rpm]

$$M_t = 716200 \frac{N}{n} \Rightarrow \bar{d} = 1.72 \cdot \sqrt[3]{\frac{716200 \cdot N}{n \cdot \tau_{adm}}}$$

$$\bar{d} = 15389 \cdot \sqrt[3]{\frac{N}{n \cdot \tau_{adm}}}$$

$$d = 1.1 \sim 1.3 \bar{d}$$

a3) Flexão e torção combinadas



$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{Tensões principais } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \Rightarrow \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

Critério Energia Distorção (Von MISES)

Para flexão e torção em eixos temos situação biaxial de solicitação (2D)

Tensões principais para 2D $\longrightarrow \left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2}$ (eq.1)

Se $\sigma_y = 0$ $\longrightarrow \left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$ (eq.2)

σ_i para 2D ($\sigma_3 = 0$) é :

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2)}$$

$$\Rightarrow \sigma_i^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \quad (\text{eq.3})$$

Da equação 2:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{4} + \left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2 \right) + 2 \times \frac{\sigma}{2} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma^2}{4} + \left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2 \right) - 2 \times \frac{\sigma}{2} \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

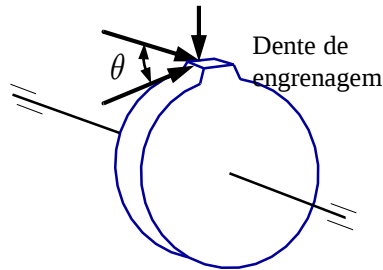
+

$$-\sigma_1 \times \sigma_2 = - \left[\frac{\sigma^2}{4} - \left(\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2 \right) \right] = -\frac{\sigma^2}{4} + \frac{\sigma^2}{4} + \tau^2$$

$$\sigma_i^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = 4\frac{\sigma^2}{4} + 3\tau^2$$

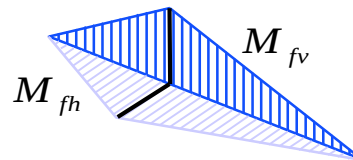
$$\sigma^* = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

No caso de eixos



$$\sigma = \frac{M_{fr}}{W_f}$$

$$M_{fr} = \sqrt{M_{fh}^2 + M_{fv}^2}$$



$$\tau = \frac{M_t}{W_t}$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{M_{fr}^2}{W_f^2} + 3 \frac{M_t^2}{W_t^2}}$$

Tendo-se secção circular :

$$W_f = \frac{1}{2} W_t$$

$$\sigma^* = \frac{1}{W_f} \sqrt{M_{fr}^2 + \frac{3}{4} M_t^2}$$

$$\Rightarrow M_{eq} = \sqrt{M_{fr}^2 + \frac{3}{4} M_t^2} \Rightarrow \sigma^* = \frac{M_{eq}}{W_f}$$

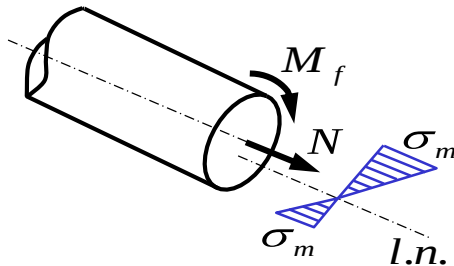
$$\sigma^* \leq \sigma_{adm} \Rightarrow \frac{M_{eq}}{\pi d^3} \times 32 \leq \sigma_{adm}$$

$$\bar{d} = 2,173 \sqrt{\frac{M_{eq}}{\sigma_{adm}}}$$

$$d = 1,1 \sim 1,3 \bar{d}$$

B) Cálculo da tensão de confronto sob solicitação dinâmica (fadiga)

b1) Flexão Pura



$$\sigma^* = \sigma_{máx} = \frac{M_{fr}}{W_f} \leq \sigma_{fadm}$$

Havendo força normal :

$$\sigma = \pm \frac{N}{S} \pm \frac{M_{fr}}{W_f}$$

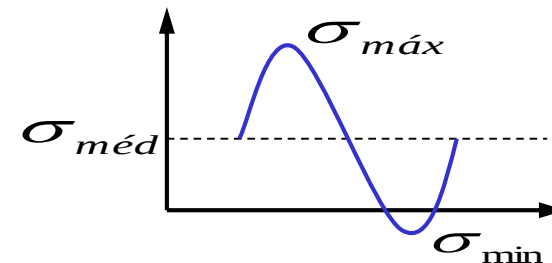
Por exemplo :

$$\sigma_{máx} = \frac{N}{S} + \frac{M_{fr}}{W_f} \quad e \quad \sigma_{mín} = \frac{N}{S} - \frac{M_{fr}}{W_f}$$

Neste caso $1 < k < \infty$ e calcular sempre usando

$$S_m = \max(|\sigma_{máx}|, |\sigma_{mín}|)$$

$$\sigma^* = S_m \leq \sigma_{fadm}$$



b2) Torção Pura

$$\tau^* = \tau = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{fadm}$$

Se não houver flutuações de $M_t \rightarrow k = 1$

Se houver $S_m = \max(|\tau_{máx}|, |\tau_{\min}|)$

$$\tau^* = S_m \leq S_{fadm(k \neq 1)}$$

b3) Flexão e Torção Combinadas

b3.1) Flexão e torção tem o mesmo “k”

$$\sigma^* = \sqrt{(\sigma_{\text{máx}} \beta_{kf})^2 + H^2 (\tau_{\text{máx}} \beta_{kt})^2}$$

com

$$H = \frac{\sigma_F}{\tau_F}$$

σ_F - limite resistência à fadiga por flexão para valor k

τ_F - limite resistência à fadiga por torção para valor k

β_{kf} - coeficiente de entalhe dinâmico para fadiga à flexão e valor k

β_{kt} - coeficiente de entalhe dinâmico para fadiga à torção e valor k

b3.2) Flexão e torção tem k diferentes

$$\sigma^* = \sqrt{(\sigma_{\text{máx}} \beta_{kf})^2 + H_{Fadm}^2 (\tau_{\text{máx}} \beta_{kt})^2}$$

com $H_{Fadm} = \frac{\sigma_{Fadm}}{\tau_{Fadm}};$

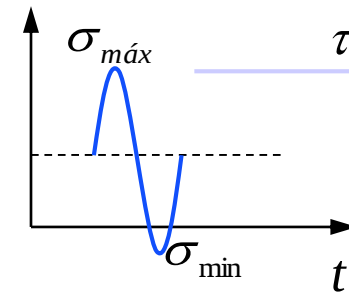
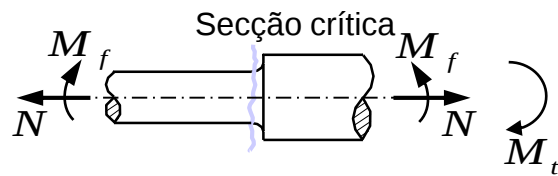
$$\sigma_{Fadm} = S_{Ffk} \frac{b_1 b_2 b_3}{\beta_{kf} \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5}, \quad \tau_{Fadm} = S_{Ftk} \frac{b_1 b_2 b_3}{\beta_{kt} \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5}$$

Obs.: Se não dispuser de β_k 's exatos usar β_k para $k=\infty$

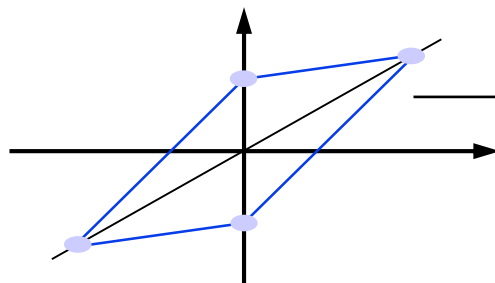
b3.3) Caso particular onde $k_f = \infty$ e $k_t = 1$

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma_{máx}^2 + H^2 \tau^2}$$

$$H = \frac{\sigma_{Faf} \beta_{kt}}{\tau_e \beta_{kaf}}$$



Entalhe $\beta_{kt}, k = 1$
 $\beta_{kaf}, k = \infty$



Goodman

σ_{Faf}

(estimativa)

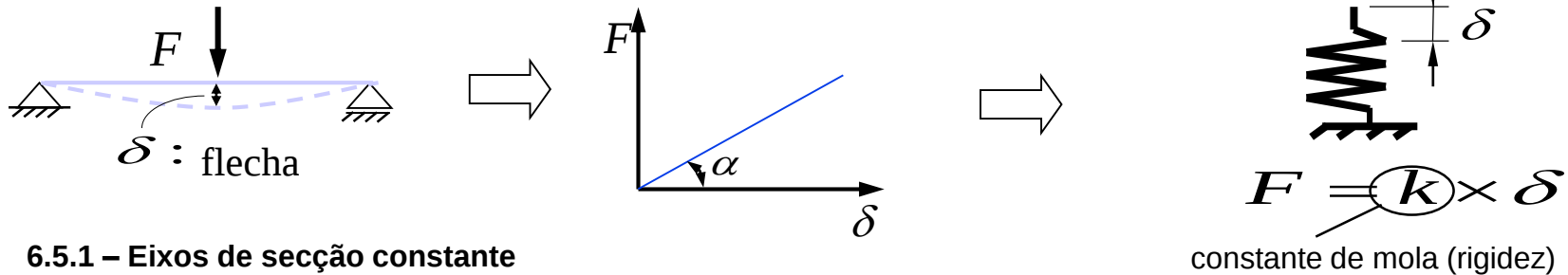
$$\tau_e \cong 0,577 \cdot \sigma_e$$

Normalmente não temos β_{kt} para $k = 1$. Usamos β_{kt} para $k = \infty$ a favor da segurança.

Se existir força normal N recai-se no caso b3.2) porque

$$k_f \neq \infty$$

6.5 - Cálculo de Eixos quanto à Rigidez (ou flecha admissível)

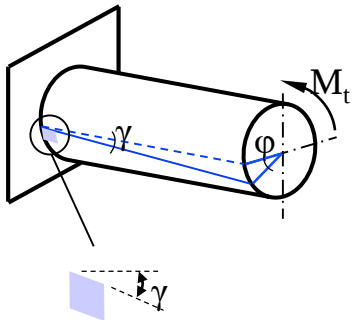


6.5.1 – Eixos de secção constante

• Tração / compressão

$$\sigma = E \times \varepsilon \rightarrow \frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \Rightarrow P = \left(\frac{EA}{L} \right)_k \delta \Rightarrow k_{en} = \frac{EA}{L}$$

• Torção



$$\gamma \cdot L = \varphi \frac{d}{2}$$

$$\varphi = \frac{\gamma L 2}{d}$$

$$\gamma = \varphi \frac{d}{2L}$$

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t d}{J_t \cdot 2}$$

$$\Rightarrow \frac{M_t \cdot d}{J_t \cdot 2} = G \cdot \varphi \cdot \frac{d}{2L}$$

$$\Rightarrow M_t = \left(\frac{G \cdot J_t}{L} \right)_k \varphi \Rightarrow k_{et} = \frac{G \cdot J_t}{L}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad J_t = \frac{\pi d^4}{32}$$

• Flexão

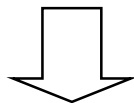
Da teoria de flexão :

Curvatura $\frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}$

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad (\text{carga distribuída})$$

Estudo das curvas planas



$$\theta = \text{inclinação} = \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

$$\frac{M}{EJ} = \frac{\text{momento fletor}}{EJ} = \frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (2)$$

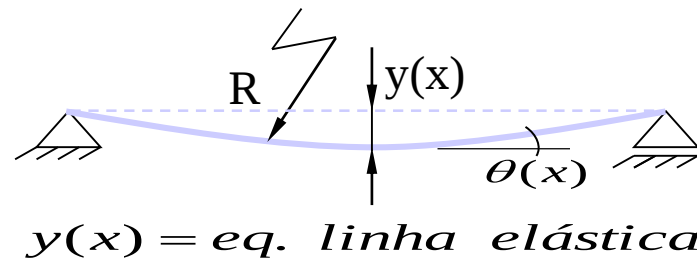
$$\frac{Q}{EJ} = \frac{\text{força cortante}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

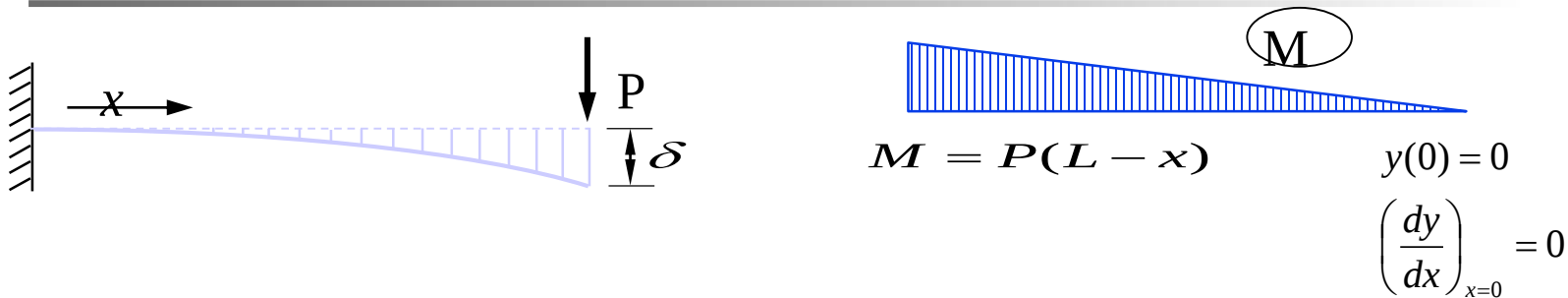
$$\frac{q}{EJ} = \frac{\text{carga distribuída}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{dQ}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$$

De (1) e (2) , partindo-se do diagrama de momento fletor :

$$\int_0^l \frac{M}{EJ} dx = \frac{dy}{dx} = \theta \quad \text{e}$$

$$\int_0^l \left(\int_0^x \frac{M}{EJ} dx \right) dx = y(x) \quad \text{eq. linha elástica}$$





$$\int M dx = PL \int dx - P \int x dx = P \left[Lx - \frac{x^2}{2} \right] + C_1$$

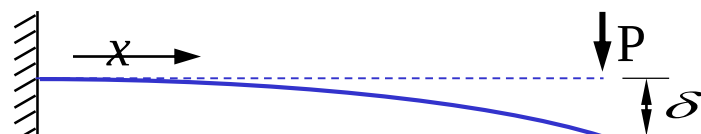
$$\frac{d}{dx}(EJ \cdot y(x)) = \int M dx = P \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \Rightarrow$$

$$EJ \cdot y(x) = \int \left[P \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \right] dx = PL \frac{x^2}{2} - \frac{P}{2} \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \text{ e } \theta(0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

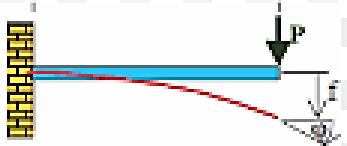
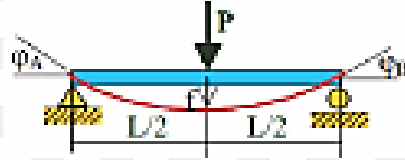
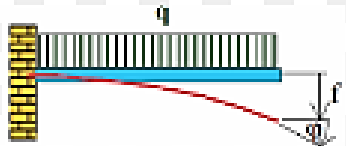
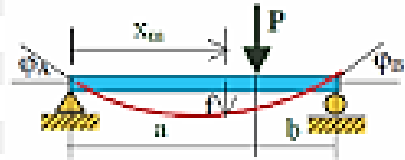
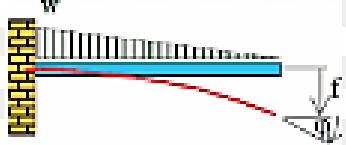
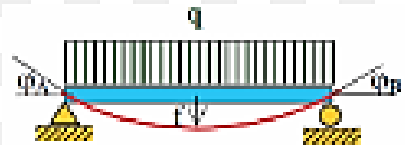
$$y(x) = \frac{1}{EJ} \left[PL \frac{x^2}{2} - \frac{P}{6} x^3 \right], \text{ pondo } x = L \text{ vem}$$

$$y(L) = \frac{P}{EJ} \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6} \right) \Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{3EJ}$$

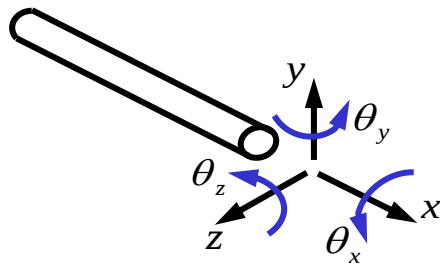


$$P = \frac{3EJ}{L^3} \delta \Rightarrow k_f = \frac{3EJ}{L^3}$$

Para demais casos simples tabelas. 

	$f = - PL^3 / 3 EI$ $M_A = 0$ $M_B = -PL$		 $f = - PL^3 / 48 EI$ $M_A = PL/4$ $M_B = 0$
	$f = - qL^4 / 8 EI$ $M_A = 0$ $M_B = -qL^2/2$		 $f = - \frac{P b (L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3} EI}$ para $x_m = \sqrt{(L^2 - b^2)/3}$ $M_A = (P(L-a)a)/L$ $M_B = 0$
	$f = - wL^4 / 30 EI$ $M_A = 0$ $M_B = -wL^3/6$		 $f = - 5 q L^4 / 384 EI$ $M_A = qL^2/8$ $M_B = 0$

6.5.1. Cálculo de Flechas de Eixos de Secção Variável (escalonados)



6 solicitações, deformações = 6 graus de liberdade

1 gdl $\longrightarrow$ 1 k (coeficiente de mola)

Vários gdl $\longrightarrow$ [K] Matriz de rigidez

$$F = kx \iff \{F\}_{n \times 1} = [K]_{n \times n} \cdot \{x\}_{n \times 1}$$

Cálculo dos K_{ij}



Método dos Elementos Finitos

Método numérico para resolver equações diferenciais



Aplicações do MEF :

- Problemas de elasticidade em sólidos – σ , ϵ , δ
- Vibrações em sólidos – ω_i , $\{X\}_i$
- Escoamento em fluidos – v , p
- Transmissão de calor – T
- Campos elétricos
- etc

Softwares de MEF disponíveis :

- Micro / workstations e Host
- Ansys, COSMOS, ABAQUS, IDEAS

Associação de Rigidezes (molas)



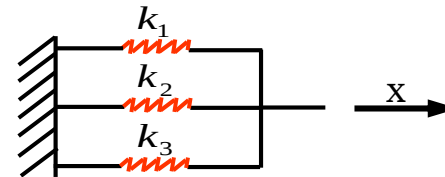
Molas em paralelo

Deslocamento igual para todas.

$$F_t = k_1 x + k_2 x + k_3 x \Rightarrow \underbrace{k_{eq//} \cdot x}_{F_t} = (k_1 + k_2 + k_3) \cdot x$$

$$F_t = \sum F_i$$

$$k_{eq//} = k_1 + k_2 + k_3$$



Molas em série

Força igual para todas.

$$x_t = \sum x$$

$$x_t = \frac{F}{k_{eqS}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3}$$



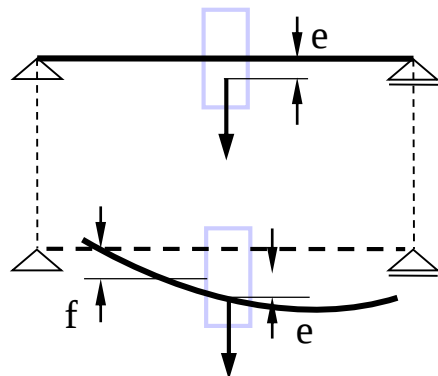
$$k_{eqS} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}}$$

Valores de flecha e ângulo de flexão admissíveis para algumas construções mecânicas

Aplicação	Flecha admissível (f_{adm})	Ângulo de inclinação β [rad]
Eixos de máquinas ferramentas com engrenagens	0.1 m	-
Motores assíncronos	0.1 δ	-
Construções mecânicas em geral	0.0002 L	-
Eixos apoiados em mancais hidrodinâmicos ou de lubrificação mista	-	0.001
Eixos apoiados em mancais de rolamento radial fixo de esferas		0.008
Eixos apoiados em mancais autocompensadores		0.05

- m = módulo da engrenagem
- δ = entreferro do motor elétrico
- L = distância entre apoios do eixo

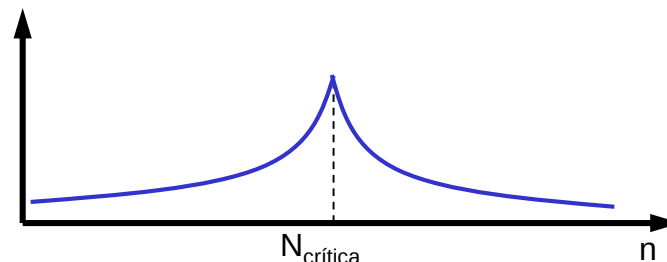
6.6 - Cálculo de Eixos quanto à Rotação Crítica



Modelagem :

- Despreza-se o peso do eixo
- Despreza-se a inércia do eixo
- Despreza-se o momento centrífugo

Amplitude vibrações



$$\sum F_{ext} = M.a = M.\omega^2 r = M.\omega^2(f + e)$$

No caso de viga bi-apoiada :

$$f = \frac{FL^3}{48EJ} \Rightarrow F = \frac{\overbrace{48EJ}^K}{L^3} \cdot f$$

como

$$\sum F_{ext} = F \Rightarrow k.f = M\omega^2(f + e) \Rightarrow$$

$$kf - Mf\omega^2 - Me\omega^2 = 0 \Rightarrow f = \frac{Me\omega^2}{k - M\omega^2} \quad \text{ou}$$

$$f = \frac{e}{\frac{k}{M\omega^2} - 1}$$

quando $\frac{k}{M\omega^2} \rightarrow 1 \Rightarrow f \rightarrow \infty, \forall e!! \Rightarrow \omega_{crit} = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad [\text{rad/s}]$

$$\omega_{crit} = \frac{2\pi}{60} n_{crit} \Rightarrow n_{crit} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (\text{rpm})$$

Novamente desprezando-se o peso do eixo, a flecha estática é

$$f_{st} = \frac{GL^3}{48EJ} \Rightarrow f_{st} = \frac{G}{k} = \frac{Mg}{k}, \quad M = \text{massa do disco}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{M} = \frac{g}{f_{st}} \Rightarrow \boxed{n_{crit} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}}$$

OBSERVAÇÕES

1. $N_{crit} \exists$ mesmo se $e = 0$, entretanto desbalanceamento favorece fenômeno.

2. A dedução vale para $M_{eixo} \ll M_{disco} !!$

3. $n_{crit} \propto \sqrt{k} \Rightarrow$ influem

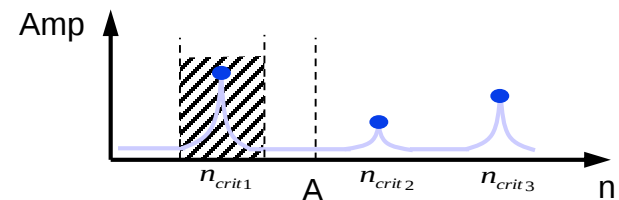
- Elasticidade E
- Forma da secção J
- Tipo de carregamento
- Vínculos

4. $N_{trabalho}$ fora da faixa : $0,7 \sim 1,3 n_{crit}$.

5. $\exists n_{crit.1,2,3}$

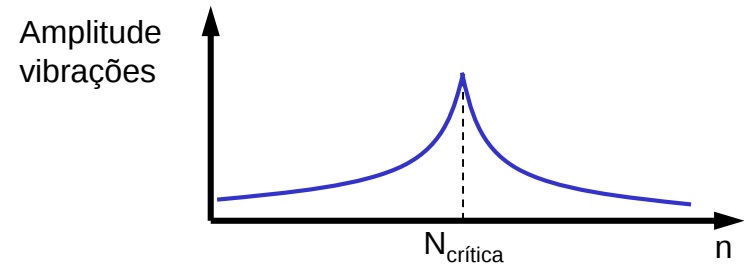
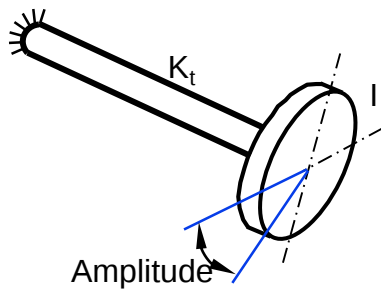
6. Pode-se trabalhar em “A”

Passa-se pela crítica com potência suficiente e amortecimento alto.



ROTAÇÃO CRÍTICA TORCIONAL

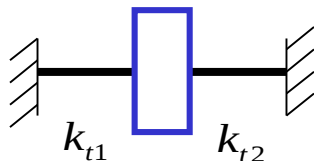
Da mesma forma que flexional, existe n_{crit} torcional, especialmente para eixos $d \ll L$



$$n_{crit \text{ torc}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{k_t}{I}}$$

- K_t : Rigidez torcional
- I : Inércia do disco
- G : Módulo de elasticidade transversal

Neste caso (eixo em balanço) :



$$\left\{ \begin{array}{l} k_t = \frac{GJ_t}{L} \\ I = m \frac{d^2}{8} \end{array} \right.$$

$$k_{eq//} = k_{t1} + k_{t2}$$

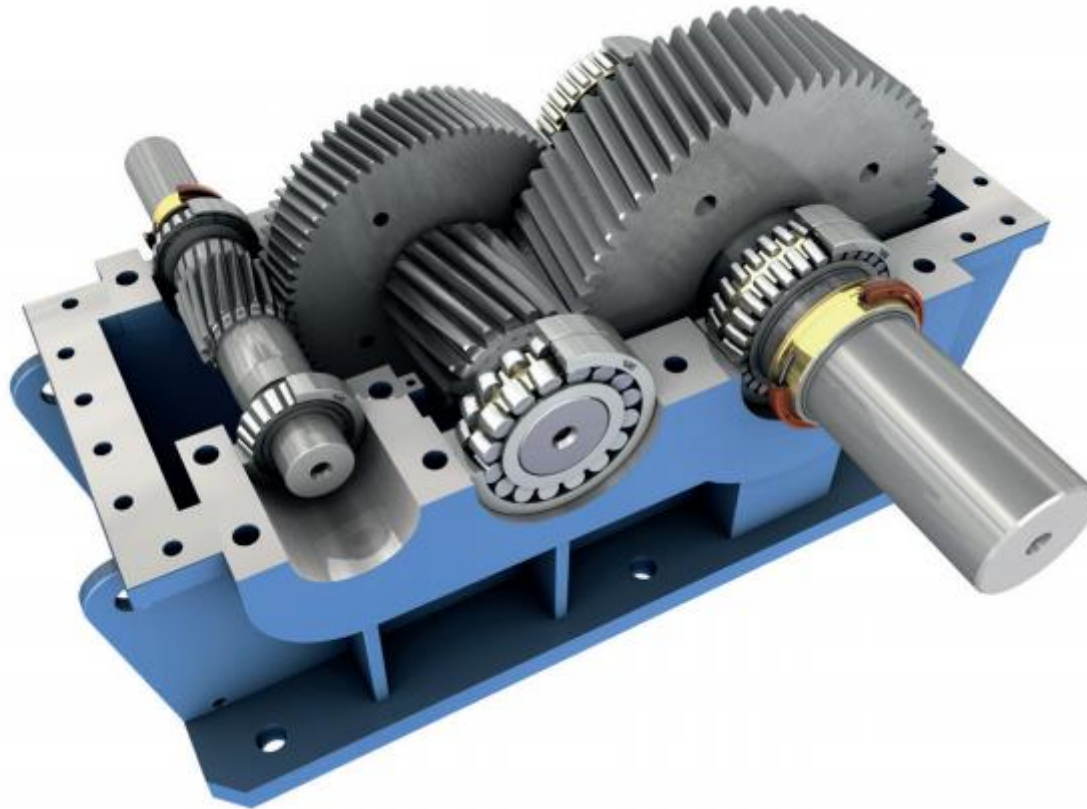
Exemplo de cálculo (Exercício 06 – Lista 06)

Dimensionar o eixo pertencente a um redutor utilizado em um sistema de elevação de cargas .

A engrenagem 1 recebe 30 [HP] a 80 [rpm] . A engrenagem 2 é montada com interferência sobre o eixo.

Dados: Engrenagem :	1	2
Número de dentes (retos)	57	34
Módulo [mm]	8	8
Ângulo de pressão		
Largura [mm]	100	100

- Eixo feito de ABNT 8620, acabamento médio em torno;
- Adotar demais dados que julgar necessários.



Exemplo de cálculo (Exercício 06 – Lista 06)

Dimensionar o eixo abaixo pertencente a um redutor utilizado em um sistema de elevação de cargas .
A engrenagem 1 recebe 30 [HP] a 80 [rpm] . A engrenagem 2 é montada com interferência sobre o eixo.

Dados: Engrenagem :	1	2
Número de dentes (retos)	57	34
Módulo [mm]	8	8
Ângulo de pressão		
Largura [mm]	100	100

- Eixo feito de ABNT 8620, acabamento médio em torno;
- Adotar demais dados que julgar necessários.

