Geometria Analítica
Décima Lista de Exercícios

12 de abril de 2019

1. Demonstre o seguinte teorema:
   Seja C uma secção cônica com excentricidade e, foco **F** *e reta diretriz L distando d de* **F**. *Se* **n** *for um vetor normal à diretriz e* **F** *estiver no semiplano positivo determinado por* **n**, *então C é o conjunto de todos os pontos* **x** *do plano que satisfazem a equação:*

   $$\|\mathbf{x} - \mathbf{F}\| = e|(\mathbf{x} - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} + d|.$$

2. Seja C uma secção cônica com excentricidade e, foco **F** na origem e com uma reta diretriz vertical L a uma distância d à esquerda de **F**.

   (a) Prove que se C for uma elipse ou uma parábola, todo ponto de C está à direita de L e satisfaz a equação polar:

   $$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}.$$

   (b) Prove que se C for uma hipérbole, todos os pontos no ramo direito satisfazem a equação polar da parte (a) e que todos os pontos do ramo esquerdo, a equação polar:

   $$r = -\frac{ed}{1 + e\cos\theta}.$$

3. Determine a excentricidade e e a distância d do foco à reta diretriz da cônica com foco na origem e diretriz vertical à direita do foco descrita pela equação polar:

   (a) $r = \frac{2}{1+\cos\theta}$

   (b) $r = \frac{6}{3+\cos\theta}$

   (c) $r = \frac{4}{1+2\cos\theta}$

4. Determine, caracterize[1] e esboce a cônica descrita pela equação cartesiana:

   (a) $9x^2 + 25y^2 - 25 = 0$

   (b) $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

   (c) $(x+2)^2 - 4y - 9 = 0$

5. Encontre a equação cartesiana da elipse com centro em $(0,0)$, um foco em $(3/4,0)$ e um vértice em $(1,0)$.

[1] Por caracterizar, entenda determinar as quantidades relevantes, como foco(s), centro, vértice(s), assíntotas, diretriz e eixo.

6. Encontre a equação cartesiana da hipérbole com vértices em $(\pm 2, 0)$ e assíntotas $y = \pm 2x$.
7. Encontre a equação cartesiana da parábola com vértice em $(0,0)$ e diretriz dada pela reta $x = -2$.
8. Prove que se $a > b$ então a elipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
está contida no disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ e no retângulo $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, cujos vértices são os 4 pontos $(\pm a, \pm b)$.
9. Prove que a função $f : [0, 2\pi] \to V_2$, descrita por $f(\theta) = (a\cos\theta, b\cos\theta)$, com respeito à base canônica de V_2 e $a, b \in \mathbb{R}_+$, parametriza uma elipse.
10. Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = 1/x$. Demonstre que o o gráfico de f é um ramo de hipérbole.
11. Mostre que $f(\theta) = \left(\frac{a}{\cos\theta}, b\tan\theta\right)$ com respeito à base canônica de V_2 é uma parametrização de uma hipérbole. Qual é o domínio de f? Quais são os focos de f?
12. Determine o foco e a equação da diretriz da parábola $y = 3x^2$.
13. Determine a translação que elimina os termos lineares da forma quadrática $9x^2 + 4y^2 + 18x + 24y = 26$ e com isso identifique a curva que ela representa.
14. Determine a rotação que elimina o termo misto da forma quadrática $31x^2 + 21y^2 + 10\sqrt{3}xy = 144$ e com isso identifique a curva que ela representa.
15. Que curva é representada pela equação $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 8x + 6y + 1 = 0$?
16. Para as superfícies descritas pelas equações cartesianas:
    (a) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 16$
    (b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} - 25 = 0$
    (c) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9}$
    - Descreva as simetrias das superfícies.
    - Encontre as intersecções das superfícies com planos $x = k_1$, $y = k_2$ e $z = k_3$, $k_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$.
    - Esboce e identifique as quádricas.
17. Considere a forma quadrática $\phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - xy - 2xz - 3yz$.
    (a) Completando os quadrados adequados encontre uma transformação de coordenadas que elimine os termos mistos.
    (b) Qual é a quádrica descrita por $\phi(x, y, z) = d$, $d \in \mathbb{R}^*_+$?