Geometria Analítica
Nona Lista de Exercícios

14 de junho de 2019

1. Determine as equações paramétricas da circunferência descrita como o lugar geométrico do conjunto $\gamma = \{(x,y,z) \in V_3 \,|\, x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0,\ z = 3\}$.

2. Três pontos não colineares determinam um único círculo. Lembrando que a circunferência é o lugar geométrico do conjunto $S^1 = \{(x,y) \in V_2 \,|\, x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$, determine a equação cartesiana da circunferência que passa pelos pontos: $(-1,2), (0,1), (-3,2)$ com respeito à base canônica de V_2.

3. Considere a curva descrita pelo conjunto $\gamma = \{\mathbb{r} : [0, 2\pi] \to V_3 \,|\, \mathbb{r}(t) = 2\mathbb{e}_1 + 3\cos t\mathbb{e}_2 + 3\sin t\mathbb{e}_3\}$.
   (a) Determine as equações coordenadas paramétricas.
   (b) Determine a equação cartesiana.
   (c) Que curva é essa?

4. Uma hipocicloide é uma curva descrita pelo movimento de um ponto fixo $\mathbb{P} \in V_2$, de um círculo de raio $b \in \mathbb{R}_+$ que gira dentro de um círculo fixo de raio $a > b$.
   (a) Determine a equação paramétrica vetorial de uma hipocicloide.
   (b) Para o caso particular em que $a = 4b$. Determine:
      i. As equações paramétricas coordenadas.
      ii. A equação cartesiana.
      iii. O gráfico dessa curva.

5. Considere a mudança de coordenadas $\Omega = (\mathbb{O}, B) \mapsto \tilde{\Omega} = (\tilde{\mathbb{O}}, B)$, em que $B = (\{\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2\})$ e $\tilde{\mathbb{O}} = (-1, 3)$ com respeito a Ω. Se um objeto geométrico for descrito a partir da equação
$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0,$$
com respeito ao sistema de coordenadas Ω, determine sua equação definidora com respeito a $\tilde{\Omega}$.

6. Seja um objeto geométrico descrito como o lugar geométrico do conjunto $\sigma = \{(x,y) \in V_2 \,|\, \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta \in \mathbb{R}\}$. Demonstre que uma translação irá eliminar os termos lineares, se, e somente se, $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$.

7. Determine as novas coordenadas dos pontos $(1,0)$ e $(0,1)$ com respeito à base canônica de V_2, quando os eixos são girados por um ângulo de $\frac{\pi}{6}$.

8. Seja o objeto geométrico $\sigma = \{(x,y) \in V_2 \,|\, \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta \in \mathbb{R}\}$ e considere a rotação por um ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$ que elimine o termo misto, ou seja, descreva σ através da seguinte equação definidora:
$$\tilde{\alpha} x^2 + \tilde{\gamma} y^2 + \tilde{\delta} x + \tilde{\epsilon} y + \tilde{\zeta} = 0.$$

Demonstre que

$$\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}=\alpha+\gamma \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha}-\tilde{\gamma}=\beta\sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\right)^2+1}.$$

9. Encontre a transformação de coordenadas que elimina os termos lineares e mistos da seguinte equação definidora:

$$4x^2-4xy+7y^2+12x+6y-9=0.$$

10. Qual é a mudança de coordenadas que relaciona os seguintes sistemas de coordenadas:
    - $\Omega=(\mathbb{0},B)$, com B sendo a base canônica de V_3;
    - $\tilde{\Omega}=(\tilde{\mathbb{0}},\tilde{B})$, com $\tilde{O}=(1,2,1)_\Omega$ e $\tilde{B}=(\tilde{\mathbb{e}}_1=\mathbb{e}_1,\tilde{\mathbb{e}}_2=\mathbb{e}_3,\tilde{\mathbb{e}}_3=\mathbb{e}_1+2\mathbb{e}_2-\mathbb{e}_3)$.

11. Determine os valores de x e y de forma que a matriz

$$M=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & 6 & x\\ 3 & 2 & y\\ 6 & -3 & 2\end{pmatrix},$$

de forma que $M\in O(3)$. A matriz M representa uma rotação pura ou uma rotação seguida de uma reflexão?

12. A mudança de coordenadas $V_n\ni\mathbb{x}\mapsto\tilde{\mathbb{x}}\in V_n$ pode ser parametrizadas como

$$\tilde{\mathbb{x}}=M^t(\mathbb{x}-\mathbb{r}),$$

em termos de uma matriz $M\in O(n)$ e de um vetor $\mathbb{r}\in V_n$. Mostre que a composição de duas mudanças de coordenadas parametrizadas sequencialmente por $(M_1,\mathbb{r}_1)$ e $(M_2,\mathbb{r}_2)$ é parametrizada por $M=M_1M_2$ e $\mathbb{r}=M_1\mathbb{r}_2+\mathbb{r}_1$.