

Geometria Analítica

Sétima Lista de Exercícios

12 de abril de 2019

1. Sejam os seguintes vetores de V_3 : $\mathbf{a} = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 1, -1)$ e $\mathbf{c} = (1, 2, 2)$. Calcule:

- (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
- (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$
- (c) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
- (d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
- (e) $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b}$
- (f) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{c})$
- (g) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$

2. Encontre um vetor unitário de V_3 ortogonal aos seguintes vetores: $\mathbf{a} = (2, -3, 4)$ e $\mathbf{b} = (-1, 5, 7)$.

3. Demonstre que $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$, se e somente se, \mathbf{a} for ortogonal a \mathbf{b} .

4. Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3$ dois vetores ortonormais.

- (a) Demonstre que o conjunto $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ é uma base de V_3
- (b) Seja $\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$, demonstre que $\|\mathbf{c}\| = 1$.
- (c) Demonstre as relações:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \text{e} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = -\mathbf{a}$$

5. Sejam $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$, $\mathbf{c} = (3, 4, -1)$.

- (a) Encontre um vetor $\mathbf{b} \in V_3$ tal que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Há mais do que uma solução possível?
- (b) Encontre um vetor $\mathbf{b} \in V_3$ tal que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ e $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$. Há mais do que uma solução possível?

6. Encontre todos os $t \in \mathbb{R}$ tais que o conjunto de vetores de V_3 $\{(1, t, 1), (t, 1, 0), (0, 1, t)\}$ seja linearmente dependente.

7. Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_3$, demonstre a seguinte identidade vetorial:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}$$

8. Prove que o volume do tetraedro com vértices $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in V_3$ é

$$\frac{1}{6}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{d} - \mathbf{a})$$

Use essa expressão para calcular o volume do tetraedro de vértices $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 2)$, $\mathbf{c} = (0, 3, 0)$, $\mathbf{d} = (4, 0, 0)$.