Mecânica Quântica II - 4302404

$4^{\underline{a}}$ lista

1) Use a função de onda gaussiana: $\Psi(x,b) = Ae^{-bx^2}$ como função tentativa para obter uma estimativa para a energia do nível fundamental de uma partícula submetida a:
a) um potencial linear $V(x) = \alpha|x|$;
b) um potencial quártico: $V(x) = \alpha x^4$.

2) Estime a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio usando como função tentativa $\Psi(x,b) = Ne^{-br}$. Compare com o resultado exato.

3) considere um sistema quântico cuja hamiltoniana H_0 admita apenas dois autoestados: Ψ_a com energia E_a e Ψ_b com energia E_b. Os estados são ortogonais, normalizados e não degenerados com $E_a < E_b$. Considere uma perturbação H', com os seguintes elementos de matrix:

$$\langle\Psi_a|H'|\Psi_a\rangle = \langle\Psi_b|H'|\Psi_b\rangle = 0; \ \ \langle\Psi_a|H'|\Psi_b\rangle = \langle\Psi_b|H'|\Psi_a\rangle = h, \tag{1}$$

onde h é uma constante.
a) Encontre os autovalores exatos da hamiltoniana perturbada.
b) Estime as correções na energia usando teoria de perturbação até segunda ordem.
c) Estime a energia do estado fundamental do sistema perturbado usando o princípio variacional, com a função tentativa na forma:

$$\Psi(\phi) = \cos\phi\Psi_a + \sin\phi\Psi_b,$$

onde ϕ é o parâmetro variacional. Veja que essa forma de escrever a função tentativa garante que ela está normalizada.
d) Compare as respostas dos ítens a), b) e c). Porque o método variacional é tão preciso neste caso?

4) Como um exemplo explícito do método discutido no problema 3), considere um elétron em repouso num campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{k}$, para o qual a hamiltoniana do sistema é:

$$H_0 = \frac{eB_0}{m}S_z.$$

Considere uma perturbação na forma de um campo magnético constante na direção x:

$$H' = \frac{eB'}{m}S_x.$$

a) Encontre os elementos de matrix de H' e confirme que eles têm a estrutura da Eq. (1) no problema 3). Quem é h?
b) Usando o resultado do problema 3(b), encontre a energia do estado fundamental até segunda ordem em teoria de perturbação .
c) Usando o resultado do problema 3(c), encontre a energia do estado fundamental usando o princípio variacional.

5) Aplique o resultado obtido, pelo princípio variacional, para a energia do átomo de ${}^4He$, em função de Z, para determinar a energia do estado fundamental dos íons H^- e Li^+ (cada

um deles tem dois elétrons, mas com $Z = 1$ e $Z = 3$ respectivamente). Determine também a carga nuclear efetiva.

6) Use a aproximação WKB para encontrar o espectro de energia de um poço quadrado infinito com fundo deformado:

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2 \\ 0, & a/2 < x < a \\ \infty, & x < 0,\ x > a \end{cases}.$$

Compare seu resultado com o obtido com teoria de perturbação em primeira ordem.

7) Sabendo que a probabilidade de transição aproximada para um partícula de energia E atravessar uma barreira quadrada de altura $V_0 > E$ e espessura $2a$ é:

$$T \simeq e^{-2\gamma}, \quad \text{com} \ \ \gamma = \frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)},$$

explique em que limite essa aproximação se compara com o resultado exato:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh^2\gamma}.$$