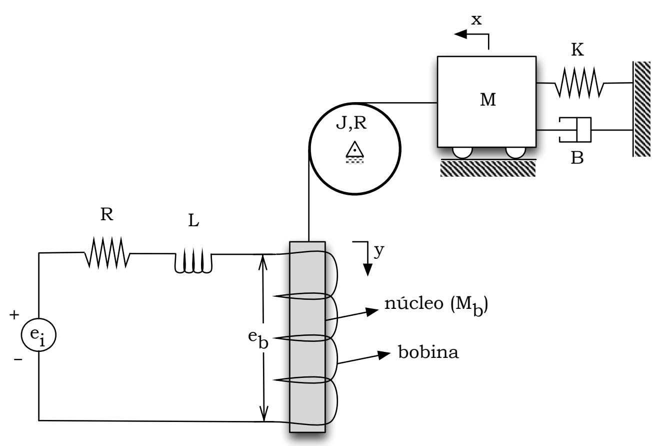
Problema

A figura anexa mostra um modelo de um sistema mecatrônico destinado à conversão de energia elétrica em mecânica. Um circuito elétrico (parâmetros R, L) é alimentado por uma fonte de tensão ideal e_i e é ligado à um solenoide composto por uma bobina e um núcleo M_b móvel de ferro. Quando em funcionamento, a corrente elétrica i que percorre o circuito gera um campo magnético na bobina provocando então o surgimento de uma força f que desloca o núcleo na direção vertical y. Este movimento de translação traciona o cabo que passa pela polia (propriedades J, R) gerando então uma força horizontal que movimenta a massa M. A tensão e_b é a tensão induzida, resultante da ação do campo magnético gerado pela bobina. Para a solução considere as seguintes relações: $e_b = k_b \frac{dy}{dy}$ onde k_b é uma constante; $f = k_f i$ onde k_f é uma constante e i a corrente elétrica do circuito. Estabeleça as hipóteses que julgar necessárias.

a) Obtenha o modelo matemático eletromecânico do sistema, o qual consiste das equações diferenciais no domínio do tempo para o circuito elétrico e subsistema mecânico. (*2,0 pontos*)
b) Determine a F.T. $X(s)/E_i(s)$. (*1,5 pontos*)



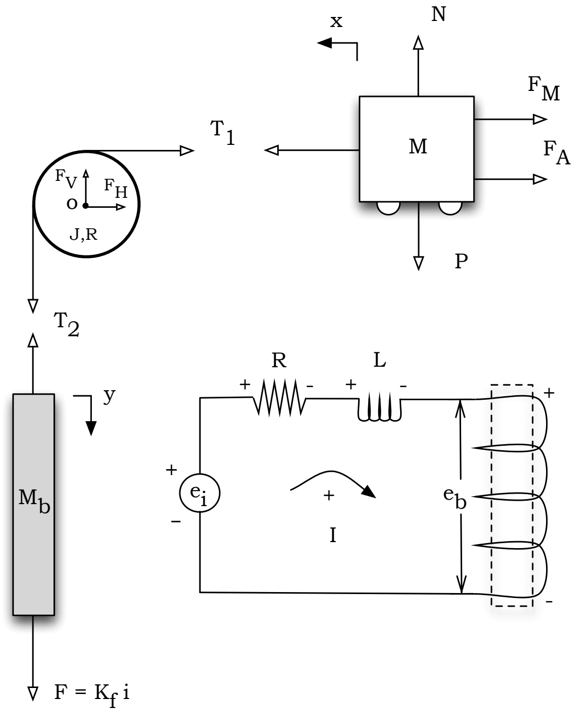
Solução:
Inicialmente estabelecemos as seguintes hipóteses simplificadoras para o modelo:

- Todos os elementos são puros e ideais
- Movimentos analisados a partir da posição de equilíbrio estático da mola de constante k
- O fio que passa pela polia é inextensível
- A massa do fio que passa pela polia é desprezível comparativamente às demais massas do modelo
- O atrito no mancal que sustenda a polia é desprezível

Considerando-se estas hipóteses, a figura abaixo mostra o diagrama de corpo livre para os elementos inerciais bem como o sentido de percurso para as tensões no circuito elétrico do modelo. Observar que, como a polia tem inércia não desprezível as forças tangenciais que atuam sobre ela através do fio não são iguais.

Com base nos diagramas acima, e levando em consideração o sentido de percurso da malha do circuito elétrico como mostrado, aplicamos a segunda lei de Newton às inércias M_b, M e J e a Lei das Malhas de Kirchhoff ao circuito elétrico

$$\sum_{j=1}^{N_y} \vec{F}_y = M_b \ddot{\vec{y}} \qquad \sum_{j=1}^{N_x} \vec{F}_x = M \ddot{\vec{x}} \qquad \sum_{j=1}^{N} \vec{T}_o = J_o \ddot{\vec{\theta}} \qquad \sum_{i=1}^{M} e_i = 0$$



Aplicando tais leis ao modelo temos as seguintes equações no domínio do tempo

$$\boxed{k_f i - T_2 = M_b \ddot{y} \qquad resp.(a)} \tag{1}$$

$$\boxed{T_2 R - T_1 R = J_o \ddot{\theta} \qquad resp.(a)} \tag{2}$$

$$\boxed{T_1 - B\dot{x} - Kx = M\ddot{x} \qquad resp.(a)} \tag{3}$$

$$\boxed{e_i - Ri - L\frac{di}{dt} - k_b \dot{y} = 0 \qquad resp.(a)} \tag{4}$$

Observe que a força peso do núcleo M_b não aparece na Eq. 1 tendo em vista a segunda hipótese simplificadora adotada.

b) Tendo em vista a terceira hipótese podemos escrever $x = y = R\theta$. Então, aplicando a T.L. às Eqs. 1 a 4 com esta última relação de compatibilidade de deslocamentos e rearranjando as expressões podemos obter a F.T. solicitada que é dada por

$$\boxed{\frac{X(s)}{E_i(s)} = \frac{k_f}{I_{eq} L s^3 + (LB + I_{eq} k)\, s^2 + (LK + k_f k_b + KB)\, s + K^2} \qquad resp.(b)} \tag{5}$$

onde $_{eq} = M + M_b + \frac{J_o}{R^2}$.